

Правительство Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
**«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»**

Факультет Бизнес-информатики  
Отделение Прикладной математики и информатики  
Кафедра Анализа данных и искусственного интеллекта

## ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

на тему

**«Уравнения типа Блэка-Шоулза для европейских опционов  
и численные методы их решения»**

**«Equations of the Black-Scholes type for European options  
and numerical methods for their solving»**

Выполнила студентка группы 471ПМИ  
**Сучкова Светлана Сергеевна**

Научный руководитель:  
**Злотник Александр Анатольевич,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры высшей математики  
на факультете экономики

Москва, 2013

# Аннотация

В данной дипломной работе рассматривается ценообразование производных финансовых инструментов в непрерывном времени, что является предметом многих как теоретических, так и практических исследований. Для модели, задаваемой уравнением срочной структуры, реализуются две разностные схемы и на примерах проводится их сравнительный анализ. Для модели, задаваемой уравнением Блэка-Шоулза рассматривается несколько подходов к заданию волатильности, реализуется разностная схема, приводятся численные решения и анализируются их свойства. Обращается внимание на некоторые свойства, слабо акцентированные ранее.

**Ключевые слова:** опционы, уравнения в частных производных, уравнение срочной структуры, уравнение Блэка-Шоулза, численные методы, разностные схемы.

## Abstract

This diploma paper considers some problems arising when applying option pricing models in continuous time that is the field of a number of both theoretical and practical investigations. In terms of model with nondeterministic risk-free rate, two finite-difference schemes are applied and their comparison study is provided. As regards the Black-Scholes model, several adjustments concerning volatility are studied through the examination of corresponding numerical solutions. The important moment is that certain features are detected overlooked in earlier works.

**Key words:** options, partial differential equations, stochastic risk-free rate, Black-Scholes equation, numerical methods, finite-difference schemes.

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>1 Используемые модели ценообразования опционов</b>	<b>6</b>
1.1 Классическая модель Блэка-Шоулза . . . . .	6
1.2 Модификации модели Блэка-Шоулза . . . . .	7
1.2.1 Модель Леланда . . . . .	8
1.2.2 Модель Барльса-Сонера . . . . .	8
1.2.3 Модель Risk Adjusted Pricing Methodology (RAPM) . . . . .	9
1.3 Другие модели ценообразования деривативов . . . . .	9
1.3.1 Биномиальная модель . . . . .	10
1.3.2 Методы Монте-Карло . . . . .	10
1.3.3 Модели с недетерминированной волатильностью и процентной ставкой. Модель Кокса-Ингерсолла-Росса . . . . .	10
<b>2 Уравнение срочной структуры и разностные схемы для его решения</b>	<b>12</b>
2.1 Схема Кранка-Николсон для уравнения срочной структуры . . . . .	13
2.2 Смешанная схема для уравнения срочной структуры . . . . .	16
2.3 Сравнение схем. Результаты и свойства . . . . .	18
2.4 Иллюстрации к численному решению уравнения срочной структуры . . . . .	21
<b>3 Уравнение Блэка-Шоулза с переменной волатильностью и его численное решение</b>	<b>25</b>
3.1 Построение численных решений . . . . .	25
3.2 Качественный анализ моделей. Свойства и модификации . . . . .	29
3.3 Иллюстрации к численному решению уравнения Блэка-Шоулза . . . . .	31
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>4 Приложения</b>	<b>39</b>

# Введение

Интерес к ценообразованию производных финансовых инструментов (**деривативов**), в частности, опционов, вызван тем, что данные финансовые инструменты позволяют минимизировать потери от колебаний цен базовых активов. Такой вид защиты от рисков называется **хеджированием**. На рынке существует множество видов деривативов: фьючерсы, форварды, свопы и опционы. Данная работа посвящена ценообразованию **европейских опционов** в непрерывном времени.

Европейский опцион — это контракт, дающий право его владельцу через определенное время купить (если это опцион колл — *call option*) или продать (если это опцион пут — *put option*) базовый актив, то есть акцию или другую ценную бумагу, по заранее фиксированной цене. В отличие от американских опционов, европейские опционы нельзя исполнять до даты, указанной в контракте, иначе говоря, до **экспирации**. Фиксированная в контракте цена актива называется **страйком**, и справедливая цена опциона колл в момент его исполнения  $T$  в точности определяется выражением

$$u(S, T) = \max \{0, S - K\},$$

где  $S$  — цена базового актива,  $K$  — страйк. Для опциона пут выражение меняется на

$$u(S, T) = \max \{0, K - S\}$$

Перед исследователями и финансовыми компаниями, чья деятельность непосредственно связана с покупкой и продажей деривативов, стоит задача оценить эту справедливую цену  $u(S, T)$  как можно более точно.

Ценообразование европейских опционов описывается сравнительно более простыми методами, чем для американских опционов. Одной из классических моделей является **модель Блэка-Шоулза**, выведенная Фишером Блэком и Майроном Шоулзом, а также дополненная Робертом Мертоном. Двое последних были удостоены Нобелевской премии по экономике в 1997 году за разработку этой модели. Более подробно об этой модели, её вариациях и других моделях ценообразования опционов будет рассказано в **Главе 1 Используемые модели**.

Что касается целей и задач данной работы, то они, в первую очередь, включают изучение численных методов решения разных вариантов уравнения Блэка-Шоулза. Ставится задача познакомиться с существующими методами решения уравнений типа Блэка-Шоулза, дать их программную реализацию, выполнить сравнение и исследование свойств.

Актуальность изучения численных методов решения уравнений в частных производных, каким является уравнение Блэка-Шоулза, не вызывает сомнений, и тому есть ряд причин. Во-первых, как было упомянуто выше, опционы и другие деривативы — важный и широко используемый инструмент защиты от рисков. Ценообразованием опционов занимаются как

аналитические департаменты ключевых финансовых и промышленных организаций (банки, биржи, консалтинговые компании, инвестиционные подразделения крупных корпораций), так и научно-исследовательские центры. Во-вторых, очевидным является то, что точное решение многих математических задач не всегда может быть найдено аналитически. Особенно это касается задач, связанных с интегрированием нелинейных уравнений в частных производных, а именно уравнения такого типа наиболее реалистично описывают динамику справедливой цены опциона. Именно поэтому очень важными оказываются методы, позволяющие приближенно вычислить необходимые величины, причем эти методы должны удовлетворять определенным требованиям к их точности, устойчивости, эффективности алгоритма расчета и, что не менее важно, универсальности. По этим причинам в работе серьезное внимание уделено сравнительному анализу известных численных методов, а также условиям их применимости для получения корректных результатов.

В работе будут представлены различные численные эксперименты по применению разностных схем для уравнений типа Блэка-Шоулза на тестовых функциях и при получении реальных (представляющих практический интерес) решений. Для такого рода задач был использован математический пакет *Mathcad*. Также для этих целей распространены другие программные средства: пакет *MATLAB*, языки программирования *C++* и *C#*.

В главе будут более подробно рассмотрены конкретные существующие модели для ценообразования опционов, используемые в них предположения и их соответствие процессам на реальных финансовых рынках.

# Глава 1

## Используемые модели ценообразования опционов

### 1.1 Классическая модель Блэка-Шоулза

Классическая модель ценообразования Блэка-Шоулза была предложена Фишером Блэком и Майроном Шоулзом в работе [7] и основана на ряде устоявшихся предположений, которые позволяют обеспечить корректность выводов о справедливой цене опциона, получаемой при ее использовании.

Предположения классической модели формулируются следующим образом.

- 1 Безрисковая процентная ставка  $r$  не меняется с течением времени.
- 2 Цена базового актива  $S(t)$  изменяется в соответствии с геометрическим броуновским движением и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

где  $\mu$  — снос случайного процесса, представляющий средний уровень роста доходности актива,  $\sigma$  — волатильность доходности,  $W(t)$  — геометрическое броуновское движение.

- 3 По базовому активу не выплачивается никаких дивидендов.
- 4 Опцион европейского типа, то есть не может быть исполнен до экспирации.
- 5 Нет транзакционных издержек покупки или продажи активов или опционов.
- 6 Любой актив на рынке является совершенно делимым, то есть может быть продано или куплено любое действительное число акций или других ценных бумаг.
- 7 Нет штрафов за так называемые короткие продажи — продажу взятых в долг на рынке активов.

- 8 Нет возможностей для арбитража, то есть для получения безрисковой прибыли.
- 9 Из предшествующих пунктов следует, что рынок является полным, то есть любой актив на нем может быть представлен портфелем из других активов, который будет иметь такие же характеристики риска и доходности.

При выполнении указанных условий, а также предположения о постоянстве волатильности  $\sigma$ , справедливая цена опциона  $V(S, t)$  будет удовлетворять линейному **дифференциальному уравнению Блэка-Шоулза**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (1.1)$$

Данная модель была первой математической моделью для описания ценообразования опционов в непрерывном времени. Многие другие модели, в том числе известная биномиальная модель для дискретного времени, были придуманы на основе классической модели Блэка-Шоулза. Однако у классической модели имеется ряд очевидных недостатков, связанных с нереалистичностью предположений модели. В связи с этим многие математики и экономисты работали над её модификациями. Было предложено немало усовершенствованных моделей, учитывающих неликвидность на рынке (невозможность моментального совершения операций с ценными бумагами), транзакционные издержки, портфельные риски и другие факторы. Эти изменения отразились на виде уравнения, так как величины, выше предполагаемые постоянными, стали функциями, зависящими от  $S, V, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ , превратив исходное линейное уравнение Блэка-Шоулза в нелинейное. Программная реализация для одной из таких модификаций будет рассмотрена в **Главе 3**.

Заметим также, что подробный вывод уравнения Блэка-Шоулза требует введения ряда концепций, связанных со стохастическим анализом, что не входит в задачи текущего исследования. Все построения, использованные в данной работе, будут так или иначе основываться на готовых моделях без подробного рассмотрения их вывода.

## 1.2 Модификации модели Блэка-Шоулза

Как было упомянуто выше, существуют различные факторы, усложняющие исходную модель и, вообще говоря, ведущие к нелинейности уравнения Блэка-Шоулза.

Один из наиболее важных и часто рассматриваемых факторов — транзакционные издержки, которые почти всегда присутствуют на реальных рынках. В связи с этим существует ряд моделей, определяющих волатильность цены базового актива, которая больше не будет считаться постоян-

ной. Коротко рассмотрим три основные модели волатильности при наличии транзакционных издержек.

### 1.2.1 Модель Леланда

Данная модель была предложена Гайне Леландом в работе [16]. Она предполагает совершение отдельных транзакций через дискретные промежутки времени, что отличается от непрерывного изменения портфеля активов (portfolio adjustment) в классической модели Блэка-Шоулза.

Показатель модифицированной волатильности в этой модели определяется по формуле

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( 1 + Le \operatorname{sign} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right).$$

Здесь  $\sigma$  — волатильность из линейной модели,  $Le$  — число Леланда, определяемое как

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa}{\sigma \sqrt{\delta t}}.$$

Числа  $\kappa$  и  $\delta t$  — константы в рамках модели:  $\frac{\kappa}{2}$  отвечает за транзакционные издержки покупки или продажи одной акции (или другого актива), а  $\delta t$  — за частоту транзакций.

Отметим, что при нарушении некоторых условий, в частности, при  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} < 0$  (то есть когда возникают участки вогнутости  $V$  как функции  $S$ ) и  $Le > 1$ , математическая постановка задачи вычисления справедливой цены опциона становится некорректной, и соответствующие численные методы (разностные схемы) не дают верного результата. Эта особенность отмечена в работе [5], однако далее там предполагается, что  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0$ , то есть выпуклость функции  $V$  по  $S$ . В **Главе 3** будет рассмотрено, правомерно ли такое допущение.

### 1.2.2 Модель Барльса-Сонера

Данная модель была предложена Гаем Барльсом и Халилом Мете Сонером в работе [6]. В дальнейшем она была несколько изменена, и в конечном итоге она задает следующую модифицированную волатильность:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( 1 + \Psi \left( e^{r(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right).$$

Здесь  $a$  — также константа в рамках модели, и от неё зависит показатель транзакционных издержек на акцию. Функция  $\Psi$ , в свою очередь, является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Psi'(x) = \frac{\Psi(x) + 1}{2\sqrt{x\Psi(x)} - x}, \quad x \neq 0$$



с начальным условием  $\Psi(0) = 0$ . Авторы работы [5] ссылаются на результат, полученный Барльсом и Сонером относительно этой функции, и пользуются следующим её свойством:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1.$$

Это позволяет несколько упростить формулу для волатильности, приняв замену

$$\tilde{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2 \left( 1 + e^{r(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)$$

при достаточно большом положительном аргументе  $e^{r(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ . Как и для модели Леланда, в **Главе 3** будут рассмотрены результаты численных экспериментов для такой модификации волатильности.

### 1.2.3 Модель Risk Adjusted Pricing Methodology (RAPM)

Данная модель была приведена к удобному виду Мартином Яндачем и Даниэлем Севковичем в работе [15] (она используется в статье [5]). Построение этой модели было основано на задаче о минимизации транзакционных издержек и снижении риска от незащищенного портфеля. Так был найден оптимальный интервал времени для совершения транзакций, и модифицированная волатильность приобрела вид

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( 1 + 3 \left( \frac{C^2 M}{2\pi} S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right).$$

Величины  $M \geq 0$  и  $C \geq 0$  постоянны в рамках модели, причем первая величина отражает меру транзакционных издержек, вторая — меру **премии за риск**. Премией за риск называется такая сумма, при выплате которой инвестору также становится выгодно приобретать рискованный актив, как и безрисковый с одинаковыми ожидаемыми нормами отдачи от вложений.

## 1.3 Другие модели ценообразования деривативов

Модель Блэка-Шоулза, безусловно, является первой и одной из основных моделей ценообразования производных финансовых инструментов. Тем не менее на практике и в теоретических исследованиях распространены и другие модели как для дискретного, так и для непрерывного времени. Для полноты рассмотрим основные из них.

### 1.3.1 Биномиальная модель

Одна из наиболее популярных моделей нахождения справедливой цены опционов, как европейских, так и американских, — это модель бинарного дерева. Она была предложена Джоном Коксом, Стивеном Россом и Марком Рубинштейном в работе [13] на основании уже известной тогда классической модели Блэка-Шоулза. Здесь не будут рассматриваться конкретные примеры её применения. Стоит лишь отметить, что нахождение цены опциона производится путем разбиения отрезка времени до экспирации на некоторое число периодов, в каждом из которых цена базового актива может пойти вверх или вниз. Далее, начиная с самого последнего периода, подсчитываются цены опциона при разных значениях цены базового актива (в разных узлах бинарного дерева, находящихся на одном уровне) при условии отсутствия арбитража. Этот процесс продолжается до корня дерева, значение цены опциона в котором и будет являться справедливой ценой опциона при заданных времени экспирации, начальной цене базового актива и безрисковой процентной ставке.

Эта модель ценообразования деривативов в дискретном времени стала очень распространенной благодаря своей простоте и интуитивно понятной программной реализации.

### 1.3.2 Методы Монте-Карло

Методы Монте-Карло известны с 1940-х годов и широко применяются в самых разных областях. Первым предложил их использовать к ценообразованию опционов Фелим Бойль в работе [8]. Идея подобных методов заключается в моделировании возможных траекторий цены базового актива с учетом вероятностных характеристик изменения этой цены и других параметров модели. Подобно биномиальной модели, методы Монте-Карло также популярны благодаря своей простоте реализации.

### 1.3.3 Модели с недетерминированной волатильностью и процентной ставкой. Модель Кокса-Ингерсолла-Росса

Помимо рассмотренных выше моделей, где волатильность цены базового актива и безрисковая процентная ставки полагались постоянными либо однозначно определенными функциями других переменных, существуют модели, где эти величины имеют стохастический характер.

Примером модели со стохастической волатильностью может служить модель Стивена Гестона, предложенная в работе [14]. В ней также предполагается стохастический характер изменения цены базового актива, и эта модель позволяет вывести ещё некоторые модификации классической модели Блэка-Шоулза.

Тем не менее более интересной оказывается модель Кокса-Ингерсолла-Росса, предложенная в работе [12]. Там дается способ описания динамики краткосрочной процентной ставки ( $x$  в терминах статьи [4], рассматриваемой в **Главе 2**) с помощью следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$dx(t) = (\alpha - \eta x(t))dt + \sigma \sqrt{x(t)}dW(t),$$

где  $\eta$  — скорость корректировки,  $\frac{\alpha}{\eta}$  — долгосрочное среднее значение процентной ставки, а  $W(t)$ , как и выше — геометрическое броуновское движение. В открытых экономиках, если считать, что все рынки находятся в равновесии, то как известно, этот показатель будет совпадать с общемировым уровнем процентных ставок.

Коэффициенты уравнения срочной структуры для цены дериватива (2.1) из **Главы 2** непосредственно связаны с коэффициентами модели Кокса-Ингерсолла-Росса: параметр  $\alpha$  имеет то же значение, в то время как  $\beta$  в уравнении представляет собой сумму  $\eta$  и показателя рискованности для краткосрочной процентной ставки.

# Глава 2

## Уравнение срочной структуры и разностные схемы для его решения

В данной главе будет рассматриваться одно из уравнений типа Блэка-Шоулза, а именно уравнение срочной структуры для цены дериватива. Оно отличается от уравнения Блэка-Шоулза как по своему виду, так и содержательно, несмотря на то, что оба этих уравнения задают соотношение для справедливой цены опциона. **Уравнение срочной структуры** связывает справедливую цену дериватива  $u$  с краткосрочной процентной ставкой  $x$ , которая подчиняется закону, описанному в модели **Кокса-Ингерсолла-Росса** (см. **Главу 1**), и  $t$  — временем, оставшимся до экспирации (исполнения) опциона. С математической точки зрения это дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\beta x - \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma^2}{2} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu \quad (2.1)$$

на  $x \in [0, X]$ ,  $t \in [0, T]$ . Оно аналогично известному в математической физике **уравнению конвекции-диффузии**.

В таком виде уравнение имеет определенное сходство с классическим уравнением Блэка-Шоулза, если учитывать, что в данной модели изменение времени имеет противоположное направление. Итак, если принять  $\tau = T - t$  (данная замена не будет использована в дальнейшем, она нужна лишь для иллюстрации), то уравнение (2.1) приобретет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha - \beta x) \frac{\partial u}{\partial x} - xu = 0,$$

в то время как уравнение Блэка-Шоулза таково

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Исходное уравнение в так называемой потоковой форме (со свободным членом) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(C(x)u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x)u + F(x, t), \quad (2.2)$$

где

$$\mu(x) = \frac{\sigma^2}{2}x, \quad C(x) = \beta x - \alpha + \frac{\sigma^2}{2}, \quad f(x) = \beta - x.$$

Так как во всех разностных схемах, рассматриваемых ниже, будет использоваться базовая равномерная сетка по обоим переменным, эту часть дискретизации можно описать заранее.

Сетки по пространственной переменной и по времени таковы ( $N$  и  $M$  — количество соответствующих отрезков разбиения):

$$\begin{aligned} h &= \frac{X}{m}, \quad x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq N, \\ \tau &= \frac{T}{M}, \quad t_m = m\tau, \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Значения искомой функции в узлах обозначим через  $u_i^m = u(x_i, t_m)$ . Также для смешанной схемы определим узлы — середины сеточных интервалов:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

## 2.1 Схема Кранка-Николсон для уравнения срочной структуры

Большинство стандартных разностных схем для уравнений, содержащих первую производную по времени, предполагают её аппроксимацию с использованием конечной разности вперед. Существуют исследования, посвященные обоснованию того, что  $\frac{\partial u}{\partial t}$  не следует аппроксимировать центральными разностями, так как в результате могут получаться конечно-разностные схемы с плохими свойствами.

**Схема Кранка-Николсон** (или, как её ещё называют, **симметричная** схема) предполагает, что справа от аппроксимации производной по времени будет стоять полусумма выражений, аппроксимирующих остальные слагаемые уравнения в узлах

$$(x_i, t_m) \text{ и } (x_i, t_{m+1}), \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq m \leq M - 1,$$

а также значение свободного члена  $F(x, t)$  в промежуточном по времени узле  $(x_i, t_{m+\frac{1}{2}})$ , где  $t_{m+\frac{1}{2}} = t_m + \frac{\tau}{2}$ .

Данная схема достаточно давно известна и широко применяется в современной вычислительной математике. Дополнительные сведения о ней можно найти в книге [1].

Для тестирования наиболее простого случая в данной схеме, как и в рассматриваемой далее, проще всего взять линейное решение  $u(x, t) = d0 + d1 \cdot x + d2 \cdot t$  и постоянные коэффициенты  $\mu, C, f$ . Тогда свободный член примет вид  $F(x, t) = d2 + C \cdot d1 - f \cdot u(x, t)$ .

Приближенное решение будет обозначаться символом  $v$ . Для него будет точно выполняться следующее равенство — дискретизация уравнения (2.2) при произвольных  $\mu(x)$ ,  $C(x)$ ,  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} = \mu_i \frac{v_{i+1}^m - 2v_i^m + v_{i-1}^m + v_{i+1}^{m+1} - 2v_i^{m+1} + v_{i-1}^{m+1}}{2h^2} + \left( \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} \right)_i - C_i \right) \cdot \\ \cdot \frac{v_{i+1}^m - v_{i-1}^m + v_{i+1}^{m+1} - v_{i-1}^{m+1}}{4h} + \left( f_i - \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_i \right) \frac{v_i^m + v_i^{m+1}}{2} + F_i^{m+1/2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начальные условия и краевые условия Дирихле берутся напрямую из тестовой функции, линейной либо рассматриваемой ниже реальной.

Для вычисления значений искомой функции  $u$  на сетке формируется система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} c_0 v_0^{m+1} - b_0 v_1^{m+1} = d_0, \\ -a_i v_{i-1}^{m+1} + c_i v_i^{m+1} - b_i v_{i+1}^{m+1} = d_i, & 1 \leq i \leq N-1 \\ -a_i v_{i-1}^{m+1} + c_i v_i^{m+1} = d_i, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $0 \leq m \leq M-1$  и свободные члены  $d_i$  вычисляются через значения  $u$  на предшествующем временном слое следующим образом:

$$d_i = a_2 v_{i-1}^m + b_2 v_{i+1}^m + c_2 v_i^m + F(x_i, t_{m+\frac{1}{2}}).$$

В случае линейного решения коэффициенты системы определяются путем группировки слагаемых с соответствующими значениями  $v$ :

$$\begin{aligned} a_i = a_2 i &= \frac{\mu}{2h^2} + \frac{C}{4h}, \\ b_i = b_2 i &= \frac{\mu}{2h^2} - \frac{C}{4h}, \\ c_i = c_2 i &= \frac{1}{\tau} + \frac{\mu}{h^2} - \frac{f}{2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Однако в первую очередь стоит обратить внимание на то, как найти решение исходного уравнения (с  $F(x, t) \equiv 0$ ) с использованием симметричной схемы. Как отмечено в статье [4], известно аналитическое решение данного уравнения с единичным начальным условием, и оно вычисляется согласно формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = A(t)e^{-B(t)x}, \\ A(t) = \left( \frac{U(t)}{V(t)} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}, \\ B(t) = \frac{W(t)}{V(t)}, \\ U(t) = 2\gamma e^{(\beta+\gamma)t/2}, \\ V(t) = 2\gamma + (\beta + \gamma)(e^{\gamma t} - 1), \\ W(t) = 2(e^{\gamma t} - 1), \\ \gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

То обстоятельство, что точное решение для рассматриваемого уравнения известно, поможет далее оценить качество двух используемых в данной главе разностных схем.

Имея в виду то, как изначально были заданы функции  $\mu(x)$ ,  $C(x)$ ,  $f(x)$ , можно переписать дискретизацию (2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{\tau} = & \mu_i \frac{v_{i+1}^m - 2v_i^m + v_{i-1}^m + v_{i+1}^{m+1} - 2v_i^{m+1} + v_{i-1}^{m+1}}{2h^2} + \\ & + \left( \frac{\sigma^2}{2} - C_i \right) \frac{v_{i+1}^m - v_{i-1}^m + v_{i+1}^{m+1} - v_{i-1}^{m+1}}{4h} + (f_i - \beta) \frac{v_i^m + v_i^{m+1}}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь, как и выше, индексы при сеточных функциях служат для обозначения значений функций в соответствующих узлах:

$$\mu_i = \mu(x_i), \quad C_i = C(x_i), \quad f_i = f(x_i)$$

Коэффициенты системы (2.5) для реального решения, вычисляемого по схеме Кранка-Николсон, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i = a2_i &= \frac{\mu_i}{2h^2} - \frac{\frac{\sigma^2}{2} - C_i}{4h}, \\ b_i = b2_i &= \frac{\mu_i}{2h^2} + \frac{\frac{\sigma^2}{2} - C_i}{4h}, \\ c_i &= \frac{1}{\tau} + \frac{\mu_i}{h^2} - \frac{f_i - \beta}{2}, \\ c2_i &= \frac{1}{\tau} - \frac{\mu_i}{h^2} + \frac{f_i - \beta}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полученная система уравнений обладает **трехдиагональной** матрицей, и она решается стандартным алгоритмом **прогонки** (в англоязычной литературе он называется **алгоритмом Томаса**):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{b_0}{c_0}, & \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i &= \overline{1, N-1} \\
\beta_1 &= \frac{d_0}{c_0}, & \beta_{i+1} &= \frac{d_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i &= \overline{1, N-1} \\
v_i^{m+1} &= \frac{d_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & v_{i-1}^{m+1} &= \alpha_i v_i^{m+1} + \beta_i, & i &= \overline{m, 1}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь использована иная нотация для индексов, так как она указывает на способ организации циклов, а в данном случае важен именно указанный порядок вычисления вспомогательных коэффициентов и значений искомой функции в узлах сетки. Также важно не путать прогоночные коэффициенты  $\alpha, \beta$  с обозначаемыми теми же буквами параметрами модели.

Дополнительные сведения об указанном алгоритме даны в книге [2].

Результаты применения симметричной схемы для различных значений параметров сетки даны ниже.

## 2.2 Смешанная схема для уравнения срочной структуры

В этом разделе рассмотрим схему, разработанную и описанную в работе [4]. Данная схема является частным случаем схемы с весами для уравнения конвекции-диффузии, причем возникающие здесь веса  $\bar{q}_i, \bar{q}_i, \bar{p}_i, \bar{p}_i$  будут зависеть от сетки и значений  $C(x)$  на сетке, как будет видно ниже.

Для вывода формул данной разностной схемы удобно ввести следующую вспомогательную функцию  $\lambda(x, t)$ :

$$\lambda(x, t) = \mu(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - C(x)u(x, t).$$

Уравнение указанной разностной схемы (с дополнительным произвольным свободным членом, чтобы желаемая тестовая функция удовлетворяла уравнению) имеет вид :

$$\begin{aligned}
h(v_i^{m+1} - v_i^m) &= \frac{\tau}{2}(\lambda(x_{i+\frac{1}{2}}, t_m) + \lambda(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{m+1})) - \\
&- \frac{\tau}{2}(\lambda(x_{i-\frac{1}{2}}, t_m) + \lambda(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{m+1})) + \frac{\tau}{2} h f(x_i)(v_i^{m+1} + v_i^m).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\lambda(x_{i+\frac{1}{2}}, t_m) &= \mu(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i+1}^m - v_i^m}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}})(\bar{q}_i v_i^m + (1 - \bar{q}_i) v_{i+1}^m), \\
\lambda(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{m+1}) &= \mu(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i+1}^{m+1} - v_i^{m+1}}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}})(\bar{q}_i v_i^{m+1} + (1 - \bar{q}_i) v_{i+1}^{m+1}),
\end{aligned}$$



$$\lambda(x_{i-\frac{1}{2}}, t_m) = \mu(x_{i-\frac{1}{2}}) \frac{v_i^m - v_{i-1}^m}{h} - C(x_{i-\frac{1}{2}})(\bar{p}_i v_i^m + (1 - \bar{p}_i) v_{i-1}^m),$$

$$\lambda(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{m+1}) = \mu(x_{i-\frac{1}{2}}) \frac{v_i^{m+1} - v_{i-1}^{m+1}}{h} - C(x_{i-\frac{1}{2}})(\bar{\bar{p}}_i v_i^{m+1} + (1 - \bar{\bar{p}}_i) v_{i-1}^{m+1}).$$

Коэффициенты смешанной схемы определяются следующим образом:

$$\bar{q}_i = \frac{h + \tau C(x_{i+\frac{1}{2}})}{2h}, \quad \bar{\bar{q}}_i = \frac{h - \tau C(x_{i+\frac{1}{2}})}{2h},$$

$$\bar{p}_i = \frac{h - \tau C(x_{i-\frac{1}{2}})}{2h}, \quad \bar{\bar{p}}_i = \frac{h + \tau C(x_{i-\frac{1}{2}})}{2h}.$$

Сгруппируем в формуле разностной схемы коэффициенты перед значениями  $v$  в разных точках:

$$\begin{aligned} & v_i^{m+1} \left[ h - \frac{\tau}{2} \left( hf(x_i) - \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}}) \bar{\bar{q}}_i - \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}}) \bar{p}_i \right) \right] - \\ & - v_{i+1}^{m+1} \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}}) (1 - \bar{\bar{q}}_i) \right) - \\ & - v_{i-1}^{m+1} \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}}) (1 - \bar{p}_i) \right) = \\ & = v_i^m \left[ h + \frac{\tau}{2} \left( hf(x_i) - \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}}) \bar{q}_i - \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}}) \bar{p}_i \right) \right] + \\ & + v_{i+1}^m \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}}) (1 - \bar{q}_i) \right) + \\ & + v_{i-1}^m \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}}) (1 - \bar{p}_i) \right) + \\ & + \tau h F(x_i, t_{m+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Дальнейший алгоритм решения полностью повторяет использованный в случае симметричной схемы в **Разделе 2.1**. Остается лишь верно определить коэффициенты системы (2.5).

Коэффициенты перед значениями  $v$  на  $(m+1)$ -м временном слое таковы:

$$a_i = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}}) (1 - \bar{\bar{p}}_i) \right),$$

$$b_i = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}})(1 - \bar{q}_i) \right),$$

$$c_i = h - \frac{\tau}{2} \left( hf(x_i) - \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}})\bar{q}_i - \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}})\bar{p}_i \right). \quad (2.12)$$

Коэффициенты под номерами 0 и  $N$  определяются граничными условиями, которые берутся из тестовых функций.

Для свободных членов вида

$$d_i = a2_i v_{i-1}^m + b2_i v_{i+1}^m + c2_i v_i^m + \tau h F(x_i, t_{m+\frac{1}{2}}),$$

соответствующие коэффициенты будут следующими:

$$a2_i = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}})(1 - \bar{p}_i) \right),$$

$$b2_i = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}})(1 - \bar{q}_i) \right),$$

$$c2_i = h + \frac{\tau}{2} \left( hf(x_i) - \frac{\mu(x_{i+\frac{1}{2}})}{h} - C(x_{i+\frac{1}{2}})\bar{q}_i - \frac{\mu(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + C(x_{i-\frac{1}{2}})\bar{p}_i \right). \quad (2.13)$$

В частности, заметим, что если рассматривать  $\mu(x)$ ,  $C(x)$ ,  $f(x)$  такими, как они заданы в исходном уравнении (2.2), полученном из (2.1), то для линейного решения свободный член будет иметь вид

$$F(x, t) = d2 - \alpha d1 + (\beta d1 + d0)x + d2tx + d1x^2.$$

Результаты применения данной схемы также приведены ниже.

## 2.3 Сравнение схем. Результаты и свойства

Для сравнения свойств рассмотренных разностных схем можно воспользоваться различными величинами, отражающими погрешность приближенного решения  $v$  по сравнению с точным решением  $u$  в разных нормах. В качестве первой пары таких величин в работе [4] были использованы

$$D_2 = \sqrt{h \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^M - u(x_i, t_M))^2},$$

$$D_\infty = \max_{1 \leq i \leq N-1} |v_i^M - u(x_i, t_M)|.$$

Данные величины подходят для рассматриваемой задачи, так как в вопросе ценообразования европейских опционов важно лишь, насколько верно будет определена изначальная справедливая цена, когда до исполнения опциона остается время  $T$ , а что происходит с приближенным решением в другие моменты времени, значения не имеет.

Однако для того чтобы понять, какая из предложенных схем лучше с вычислительной точки зрения, важно рассмотреть и то, какова величина погрешности на всей области определения функции  $u$ . Поэтому по аналогии введем также величины

$$Err_2 = \sqrt{h\tau \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M (v_i^m - u(x_i, t_m))^2},$$

$$Err_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq m \leq M}} |v_i^m - u(x_i, t_m)|.$$

Для наглядности сравнения приведем таблицу значений  $D_2$ ,  $D_\infty$ ,  $Err_2$ ,  $Err_\infty$  для тестовых линейного и реального решений и для разных сеток:

Таблица 2.1: Погрешности разностных схем в зависимости от числа узлов сетки

Линейное решение								
$N \times M$	Симметричная схема				Смешанная схема			
	$D_2$	$D_\infty$	$Err_2$	$Err_\infty$	$D_2$	$D_\infty$	$Err_2$	$Err_\infty$
$10 \times 40$	$3.3 \cdot 10^{-15}$	$4.9 \cdot 10^{-15}$	$2.6 \cdot 10^{-15}$	$6.2 \cdot 10^{-15}$	$3.9 \cdot 10^{-15}$	$5.3 \cdot 10^{-15}$	$2.8 \cdot 10^{-15}$	$5.3 \cdot 10^{-15}$
$20 \times 80$	$1.4 \cdot 10^{-15}$	$2.2 \cdot 10^{-15}$	0	$2.7 \cdot 10^{-15}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$
$40 \times 160$	$3.5 \cdot 10^{-15}$	$5.3 \cdot 10^{-15}$	$2.8 \cdot 10^{-15}$	$6.2 \cdot 10^{-15}$	$2.0 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-14}$	$1.6 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-14}$
$40 \times 20$	$3.3 \cdot 10^{-15}$	$5.3 \cdot 10^{-15}$	$2.7 \cdot 10^{-15}$	$6.9 \cdot 10^{-15}$	$3.9 \cdot 10^{-14}$	$5.3 \cdot 10^{-14}$	$3.0 \cdot 10^{-14}$	$5.3 \cdot 10^{-14}$
$120 \times 30$	$8.0 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-14}$	$1.2 \cdot 10^{-14}$	$4.6 \cdot 10^{-14}$	$6.0 \cdot 10^{-14}$	$8.5 \cdot 10^{-14}$	$4.5 \cdot 10^{-14}$	$8.5 \cdot 10^{-14}$
Реальное решение								
$N \times M$	Симметричная схема				Смешанная схема			
	$D_2$	$D_\infty$	$Err_2$	$Err_\infty$	$D_2$	$D_\infty$	$Err_2$	$Err_\infty$
$10 \times 40$	$1.9 \cdot 10^{-8}$	$9.3 \cdot 10^{-8}$	$4.8 \cdot 10^{-8}$	$2.8 \cdot 10^{-7}$	$7.0 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
$20 \times 80$	$4.1 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$8.6 \cdot 10^{-7}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$
$40 \times 160$	$9.6 \cdot 10^{-10}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$	$3.7 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-9}$	$4.0 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$9.5 \cdot 10^{-7}$
$40 \times 20$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$4.5 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	<b><math>2.7 \cdot 10^3</math></b>	<b><math>5.3 \cdot 10^4</math></b>	<b><math>8.9 \cdot 10^2</math></b>	<b><math>5.3 \cdot 10^4</math></b>
$120 \times 30$	$4.5 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-7}$	<b><math>2.8 \cdot 10^{15}</math></b>	<b><math>7.9 \cdot 10^{16}</math></b>	<b><math>7.4 \cdot 10^{14}</math></b>	<b><math>7.9 \cdot 10^{16}</math></b>

На линейной функции обе разностные схемы дают точность в пределах вычислительной погрешности: при единичных коэффициентах функции разность реального решения и полученного в результате действия алгоритма имеет порядок  $10^{-15} - 10^{-14}$  (см. Рис. 2.1b и Рис. 2.1c).

Как упомянуто выше, для рассматриваемого изначальное уравнения также известно точное решение при  $F(x, t) = 0$ . Его график при значениях параметров  $\alpha = 0.01925$ ,  $\beta = 0.55$ ,  $\sigma = 0.39$  и характеристиках сетки  $X = 0.1$ ,  $N = 20$ ,  $T = 2$ ,  $M = 80$  приведен на Рис. 2.2a.

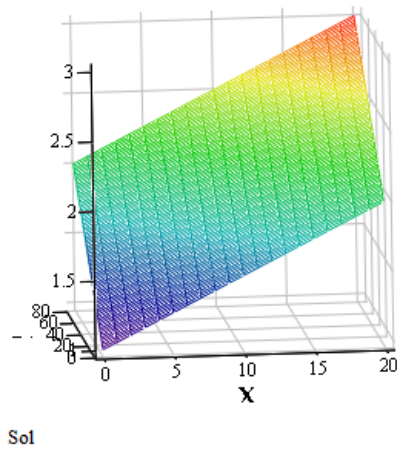
График погрешности при данном количестве узлов и других параметрах, взятых как в работе [4], на Рис. 2.2b и Рис. 2.2c демонстрирует порядок  $10^{-8}$  и  $10^{-6}$  для симметричной схемы и смешанной схемы соответственно.

Однако существен тот факт, что результаты, получаемые при использовании смешанной разностной схемы, вообще говоря, сильно зависят от количества узлов по обоим переменным и особенно от соотношения числа узлов по  $t$  и  $x$ . Так, если выбрать число узлов по  $x$  превышающим число узлов по  $t$ , погрешность решения начинает быстро расти, а при кратном превышении наблюдается очевидная неустойчивость схемы (см. Рис. 2.4b и Рис. 2.6b). Для симметричной схемы такого поведения не наблюдается. Более того, в остальных случаях симметричная схема дает результаты примерно на порядок точнее смешанной схемы, что ставит под вопрос целесообразность разработки и применения смешанной схемы (взамен более простых вариантов).

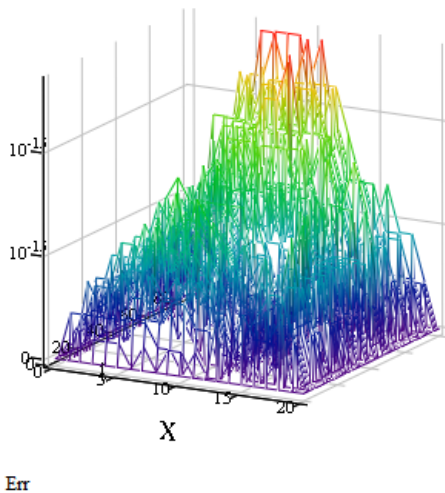
Что касается теоретических свойств разностных схем, то симметричная схема, известна достаточно давно, хорошо исследована и обладает многими важными свойствами. Так, она обладает вторым **порядком точности** (то есть её погрешность оценивается через  $C(h^2 + \tau^2)$ ) и является **безусловно устойчивой** для простых параболических уравнений (см. [1]), какими являются линейные уравнения типа Блэка-Шоулза. Безусловная устойчивость гарантирует устойчивую работу схемы независимо от параметров сетки и их соотношений. Как будет видно в **Главе 3**, это свойство не всегда может распространяться на более сложные уравнения.

В то же время смешанная схема очевидно не является безусловно устойчивой, что подразумевает её устойчивость только при выполнении ограничений на соотношение шагов  $h$  и  $\tau$ . Этим она схожа с традиционно рассматриваемыми явными разностными схемами (см. [1] и [2]). Очевидно, что из-за особого вида разностной схемы и включенных в неё весовых коэффициентов такие ограничения будут иметь более сложный вид и зависеть от значений заданных функций  $C(x)$  и  $\mu(x)$  в этих узлах. Здесь такие свойства смешанной схемы были выявлены эмпирически.

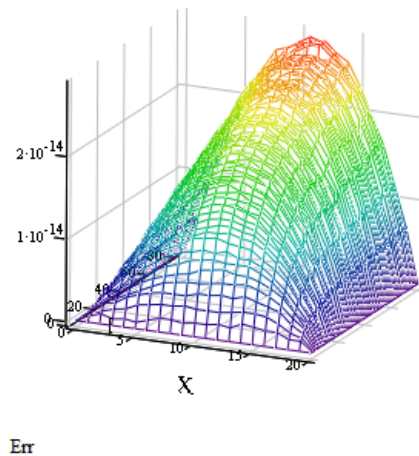
## 2.4 Иллюстрации к численному решению уравнения срочной структуры



(a) Линейное решение

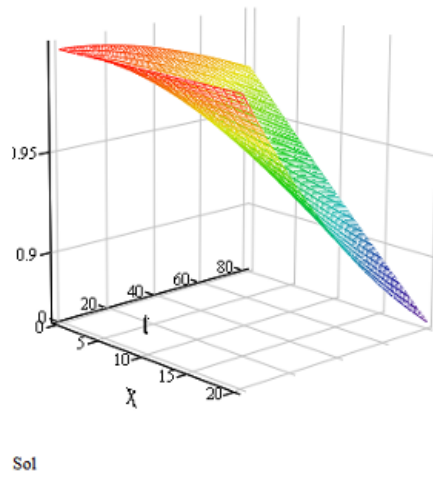


(b) Погрешность при применении симметричной схемы

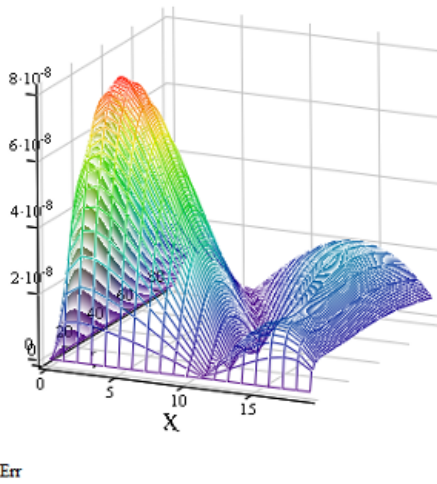


(c) Погрешность при применении смешанной схемы

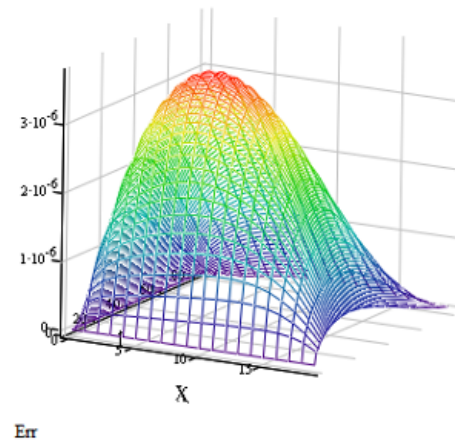
Рис. 2.1: Линейное решение при  $N = 20$ ,  $M = 80$  и погрешности для разных схем



(a) Реальное решение

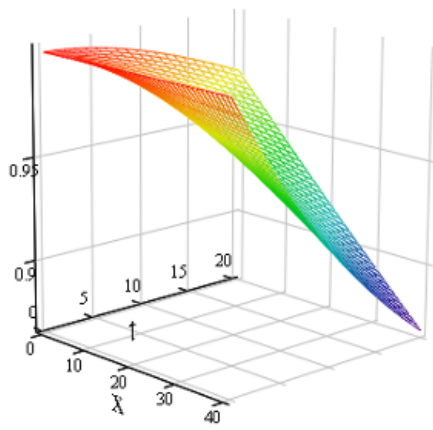


(b) Погрешность при применении симметричной схемы



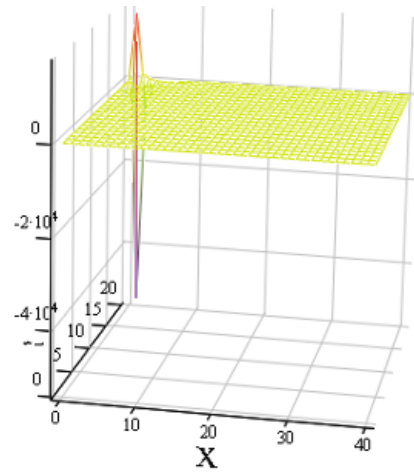
(c) Погрешность при применении смешанной схемы

Рис. 2.2: Реальное решение при  $N = 20, M = 80$  и погрешности для разных схем



Sol

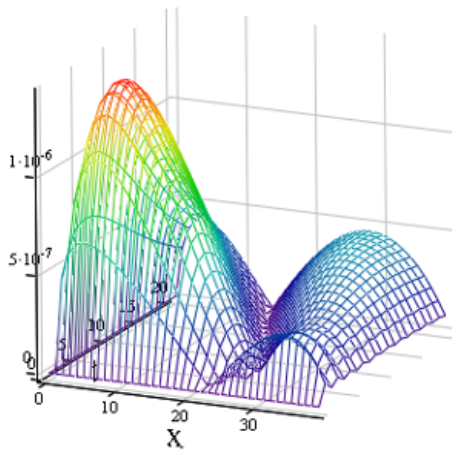
(a) Решение при применении симметричной схемы



Sol

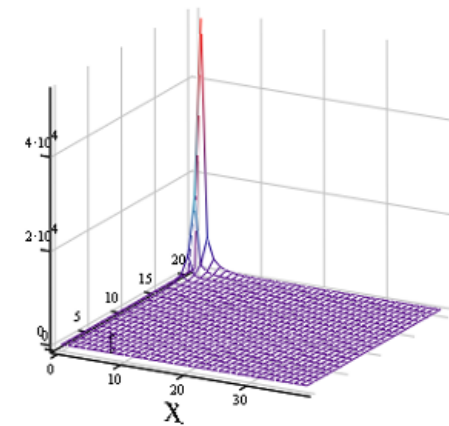
(b) Решение при применении смешанной схемы

Рис. 2.3: Реальное решение при  $N = 40, M = 20$



Err

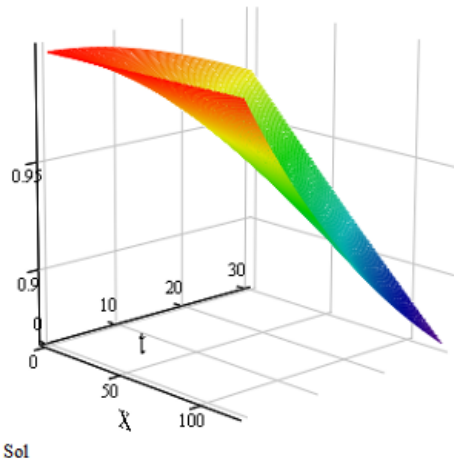
(a) Погрешность при применении симметричной схемы



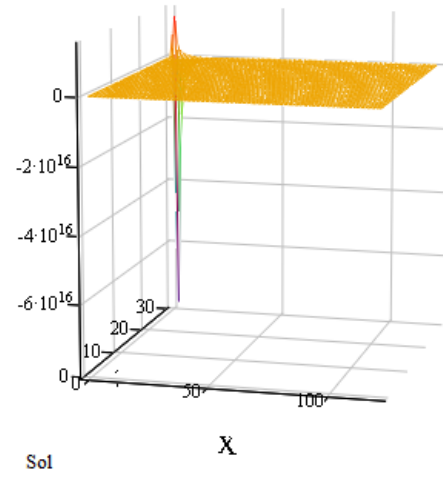
Err

(b) Погрешность при применении смешанной схемы

Рис. 2.4: Погрешности на реальном решении при  $N = 40, M = 20$  для разных схем

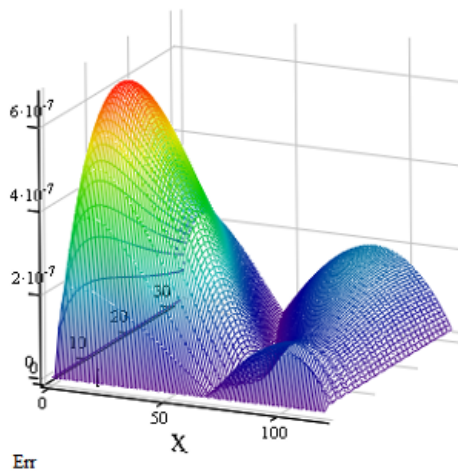


(a) Решение при применении симметричной схемы

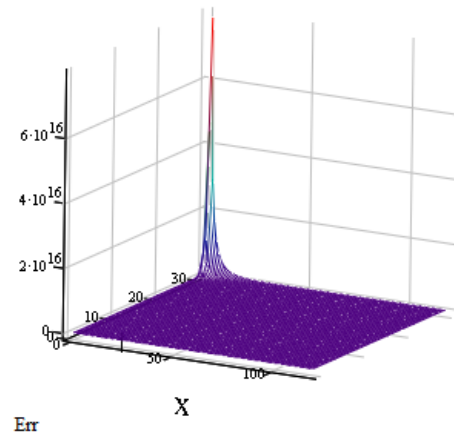


(b) Решение при применении смешанной схемы

Рис. 2.5: Реальное решение при  $N = 120, M = 30$



(a) Погрешность при применении симметричной схемы



(b) Погрешность при применении смешанной схемы

Рис. 2.6: Погрешности на реальном решении при  $N = 120, M = 30$  для разных схем



# Глава 3

## Уравнение Блэка-Шоулза с переменной волатильностью и его численное решение

### 3.1 Построение численных решений

В данной главе будут рассмотрены непосредственно уравнения Блэка-Шоулза и некоторые его модификации. Напомним, что в общем случае для непостоянной волатильности уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \left( S, V, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.1)$$

Изначально уравнение Блэка-Шоулза рассматривается на бесконечном луче  $S \in (0; +\infty)$  и отрезке  $t \in [0; T]$ . Однако численное решение невозможно при бесконечном интервале, поэтому в задачах подобного вида такие области ограничиваются отрезком с достаточно широкими границами. В дальнейшем область, на которой решается уравнение, также будет ограничена, но сделано это будет после замены переменных.

Мы сравним результаты, получающиеся при использовании разных моделей волатильности: линейной (как в классической модели Блэка-Шоулза), модели Леланда, упрощенной модели Барльса-Сонера и модели RАРМ.

Перед построением разностной схемы для решения обратимся к замене переменных, выполненной в работе [5]. Она позволит избавиться от коэффициента  $S^2$  в главном слагаемом уравнения:

$$\begin{aligned} x &= \ln \left( \frac{S}{K} \right), & \tau &= \frac{\sigma^2}{2}(T - t), & u(x, \tau) &= e^{-x} \frac{V(S, t)}{K}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\sigma^2}{2} S \frac{\partial u}{\partial \tau}, & \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial u}{\partial x} + u, & \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{1}{S} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + u \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставив данные выражения в исходное уравнение (3.1), домножив его на  $-\frac{2}{\sigma^2 S}$  и далее полностью избавившись от «старых» переменных, получим

уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\tilde{\sigma}^2 \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}{\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

на  $x \in (-\infty; +\infty)$ ,  $\tau \in [0; \tilde{T}]$ , где  $\tilde{T} = \frac{\sigma^2 T}{2}$ . Здесь  $\sigma^2$  — константа из линейной модели Блэка-Шоулза. Она необходима для сравнения результатов использования линейной модели и других моделей волатильности.

Прежние конечные и краевые условия для опциона колл ставились следующим образом:

$$\begin{cases} V(S, T) = \max\{0, S - K\}, & S \in (0; +\infty) \\ V(0, t) = 0, & t \in [0; T] \\ V(S, t) \rightarrow S - Ke^{-r(T-t)}, & t \in [0; T], S \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.4)$$

В новых переменных эти условия преобразуются в следующие

$$\begin{cases} u(x, 0) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}, & x \in (-\infty; +\infty) \\ u(x, \tau) = 0, & x \rightarrow -\infty, \tau \in [0; \tilde{T}] \\ u(x, \tau) \rightarrow 1 - e^{-\left(\frac{2\tau r}{\sigma^2} + x\right)}, & x \rightarrow +\infty, \tau \in [0; \tilde{T}]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Как было упомянуто выше, для численного решения полученного уравнения необходимо ввести сетку, которая предполагает конечность интервалов (отрезков) по всем переменным. Таким образом, вводятся ограничения на пределы изменения отношения рыночной цены базового актива к страйку, цене исполнения опциона:  $x \in [-R; R]$ ,  $R > 0$ . Параметр времени будет изменяться в прежних пределах:  $\tau \in [0; \tilde{T}]$ .

Сетка по пространственной и временной переменным такова ( $2N$  и  $M$  — количество соответствующих отрезков разбиения):

$$\begin{aligned} h &= \frac{R}{m}, & x_i &= -R + ih, & 0 \leq i \leq 2N, \\ k &= \frac{\tilde{T}}{M}, & \tau_m &= mk, & 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Значение приближенного решения в узле  $(x_i, \tau_m)$  обозначим теперь через  $U_i^m$ .

Сеточные начальное и краевые условия здесь будут следующими:

$$\begin{cases} U_i^0 = \max\{0, 1 - e^{-x_i}\}, & 0 \leq i \leq 2N \\ U_0^m = 0, & 1 \leq m \leq M \\ U_{2N}^m = 1 - e^{-\left(\frac{2\tau_m r}{\sigma^2} + R\right)}, & 1 \leq m \leq M. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для сеточной аппроксимации волатильности введем функцию

$$s(\cdot) = \frac{\tilde{\sigma}^2(\cdot)}{\sigma^2} - 1.$$

Аналогичная сеточная функция задается формулами:

$$s_i^m = \frac{\tilde{\sigma}^2(x_i, \tau_m)}{\sigma^2} - 1, \quad 1 \leq i \leq 2N - 1, \quad 0 \leq m \leq M - 1.$$

Заметим, что в линейной модели  $s \equiv 0$ , так как  $\tilde{\sigma}^2 \equiv \sigma^2$ . Для остальных моделей волатильности используем формулы, использованные выше (см. также [5]):

$$\begin{aligned} s_i^m &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa}{\sigma \sqrt{\delta t}} \operatorname{sign} \left( \partial_x \bar{\partial}_x U_i^m + \frac{\partial_x U_i^m + \bar{\partial}_x U_i^m}{2} \right) \text{ — модель Леланда,} \\ s_i^m &= \Psi \left( e^{\frac{r\tau_m}{\sigma^2} + x_i} a^2 K \left( \partial_x \bar{\partial}_x U_i^m + \frac{\partial_x U_i^m + \bar{\partial}_x U_i^m}{2} \right) \right) \text{ — модель Барльса-Сонера,} \\ s_i^m &= 3 \left( \frac{C^2 M}{2\pi} \left( \partial_x \bar{\partial}_x U_i^m + \frac{\partial_x U_i^m + \bar{\partial}_x U_i^m}{2} \right) \right)^{1/3} \text{ — модель RAPM,} \end{aligned} \tag{3.8}$$

где разностные отношения по традиции определяются как

$$\begin{aligned} \partial_x U_i^m &= \frac{U_{i+1}^m - U_i^m}{h} \text{ — разностное отношение вперед,} \\ \bar{\partial}_x U_i^m &= \frac{U_i^m - U_{i-1}^m}{h} \text{ — разностное отношение назад,} \\ \frac{\partial_x U_i^m + \bar{\partial}_x U_i^m}{2} &= \frac{U_{i+1}^m - U_{i-1}^m}{2h} \text{ — центральное разностное отношение,} \\ \partial_x \bar{\partial}_x U_i^m &= \frac{U_{i+1}^m - 2U_i^m + U_{i-1}^m}{h^2} \text{ — разностное отношение 2-го порядка.} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Чтобы несколько упростить решение поставленной задачи, воспользуемся приемом из работы [5] относительно модели Барльса-Сонера. В **Главе 1** упомянуто свойство функции  $\Psi$ , согласно которому для больших значений аргумента она также стремится к этому аргументу. Тем самым сеточная функция  $s_i^m$  для модели Барльса-Сонера заменяется просто на её аргумент.

Заметим, что зависимость  $s_i^m$  от сеточных значений  $U_i^m$  заставляет несколько изменить структуру программы в отличие от использованной в **Главе 2**, выделив многие операции во внешний цикл по временным слоям.

Теперь запишем общую формулу для симметричной разностной схемы (схемы Кранка-Николсон), упростив ее взятием значения  $s$  на нижнем слое

по времени:

$$2\frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{k} = (s_i^m + 1)\frac{U_{i+1}^{m+1} - 2U_i^{m+1} + U_{i-1}^{m+1} + U_{i+1}^m - 2U_i^m + U_{i-1}^m}{h^2} + \left(s_i^m + 1 + \frac{2r}{\sigma^2}\right)\frac{U_{i+1}^{m+1} - U_{i-1}^{m+1} + U_{i+1}^m - U_{i-1}^m}{2h}. \quad (3.10)$$

Стоит обратить внимание на то, что теперь коэффициенты системы будут в общем случае различными для разных временных слоев, поэтому верно будет обозначать их двумя индексами (что, однако, не подразумевает, что надо хранить двумерные массивы таких коэффициентов: наоборот, можно обойтись всего четырьмя числами  $a, b, c, d$ , так как они используются только внутри одного цикла):

$$\begin{aligned} a_i^m &= \frac{s_i^n + 1}{h^2} - \frac{s_i^n + 1 + \frac{2r}{\sigma^2}}{2h}, \\ b_i^m &= \frac{s_i^n + 1}{h^2} + \frac{s_i^n + 1 + \frac{2r}{\sigma^2}}{2h}, \\ c_i^m &= \frac{2}{k} + \frac{2s_i^n + 2}{h^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$d_i^m = a2_i^m U_{i-1}^m + b2_i^m U_{i+1}^m + c2_i^m U_i^m,$$

где величины, входящие в  $d$ , также можно не хранить, поскольку:

$$\begin{aligned} a2_i^m &= a_i^m, \\ b2_i^m &= b_i^m, \\ c2_i^m &= \frac{2}{k} - \frac{2s_i^n + 2}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Трехдиагональная система уравнений вида

$$\begin{cases} c_0^m v_0^{m+1} - b_0^m v_1^{m+1} = d_0^{m+1}, \\ -a_i^m v_{i-1}^{m+1} + c_i^m v_i^{m+1} - b_i^m v_{i+1}^{m+1} = d_i^m, & 1 \leq i \leq N-1 \\ -a_i^m v_{i-1}^{m+1} + c_i^m v_i^{m+1} = d_i^{m+1}, \end{cases} \quad (3.13)$$

при  $0 \leq m \leq M-1$  решается, как и в предыдущих случаях, уже описанным выше методом прогонки.

Перейдем к подробному рассмотрению решений, полученных при использовании разных моделей волатильности.

## 3.2 Качественный анализ моделей. Свойства и модификации

В качестве исходных воспользуемся параметрами моделей, использованными в работе [5]:

$$r = 0.1, \quad \sigma = 0.2, \quad T = 1 \left( \tilde{T} = \frac{\sigma^2 T}{2} = 0.02 \right), \quad R = 1, \quad K = 100,$$

$$\kappa = 0.05, \quad \delta t = 0.01 \quad (\text{модель Леланда}),$$

$$a = 0.02 \quad (\text{модель Барльса-Сонера}),$$

$$M' = 0.01, \quad C = 30 \quad (\text{модель RАРМ}).$$

Параметры сетки были выбраны следующие:

$$N = 20, \quad M = 160 \Rightarrow h = 0.05, \quad k = 1.25 \cdot 10^{-4}.$$

Вид функции  $u(x, \tau)$  представлен на Рис. 3.1а. Сравнение цен опциона на начальный момент времени  $V(S, 0)$  представлено на Рис. 3.1б. Как видно из графика, линейная модель и упрощенная модель Барльса-Сонера оценивают опцион дешевле, чем остальные модели, а дороже всего его оценивает модель RАРМ. При таких параметрах всех моделей и сетки функция  $V(S, 0)$  выпукла по  $S$ , как и предполагалось в статье [5]. Наиболее сильные отличия в оценке цены опциона наблюдаются для средних значений цены акции: от 60 до 150, что соответствует отклонению от страйка  $K = 100$  примерно на половину его величины. При меньших и больших значениях различия между моделями сглаживаются.

Как видно из Рис. 3.2а, 3.2б и 3.3а, увеличение волатильности в случаях применения любой из моделей вызывает рост цены опциона, причем как и выше, наиболее сильные различия наблюдаются в диапазоне цены базового актива от 60 до 150. Исключение составляет модель RАРМ, для которой функция  $V(S, 0)$  также становится менее выпуклой и имеющей более заметный излом в начале, для значений цены акции между 30 и 40.

Заметим, что при изменении срока экспирации на более долгий расчеты согласно моделям Леланда и Барльса-Сонера перестают быть корректными: при  $T = 3$  (три года) решение по модели Леланда расходится (см. Рис. 3.4а), а при  $T = 20$  решение по модели Барльса-Сонера становится неустойчивым и осциллирует по времени (см. Рис. 3.4б).

Аналогичные свойства проявляются и при соответствующем подборе параметров модели. Так, для  $a = 0.2$  расчеты по модели Барльса-Сонера не дают корректных результатов (см. Рис. 3.5б), а для модели Леланда решение некорректно при  $\kappa = 0.5$ ,  $\delta t = 0.25$  (см. Рис. 3.5а).

Данные особенности численного решения необходимо было отметить по той причине, что они свидетельствуют о неуниверсальности рассматриваемых моделей ценообразования. Это значит, что при использовании данных

методов на практике необходим очень тщательный контроль получаемых результатов, что подразумевает дополнительные издержки.

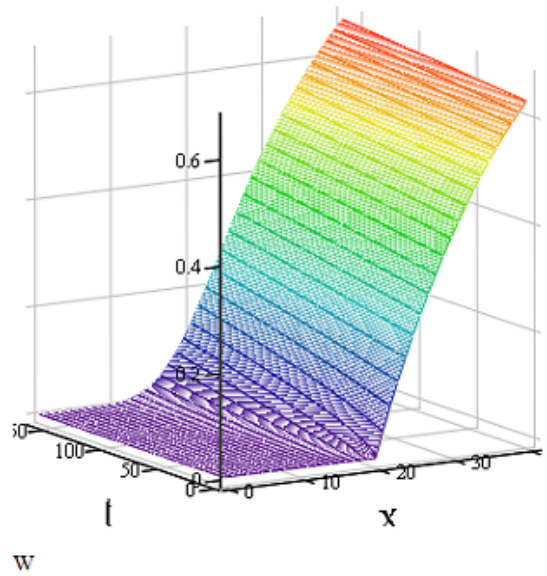
Стоит отметить, что изменения параметров сетки также могут негативно повлиять на результат применения разностной схемы: для модели Леланда при  $N = 30$ ,  $M = 40$  решение расходится (см. Рис. 3.6а). Положительным моментом является то, что подобное поведение не наблюдается для других моделей волатильности, в том числе для линейной модели.

Выявленные свойства во многом диктуют необходимость поиска подходящих модификаций рассматриваемых моделей. Наиболее простое решение — обеспечить неотрицательность значений  $s_i^m$ , что можно сделать путем постановки модуля на выражение  $\left(\partial_x \bar{\partial}_x U_i^m + \frac{\partial_x U_i^m + \bar{\partial}_x U_i^m}{2}\right)$  во всех моделях. Как свидетельствуют эксперименты, эта мера позволяет избавиться от неустойчивости решений во всех случаях: при больших значениях экспирации, при неблагоприятных параметрах моделей и сетки.

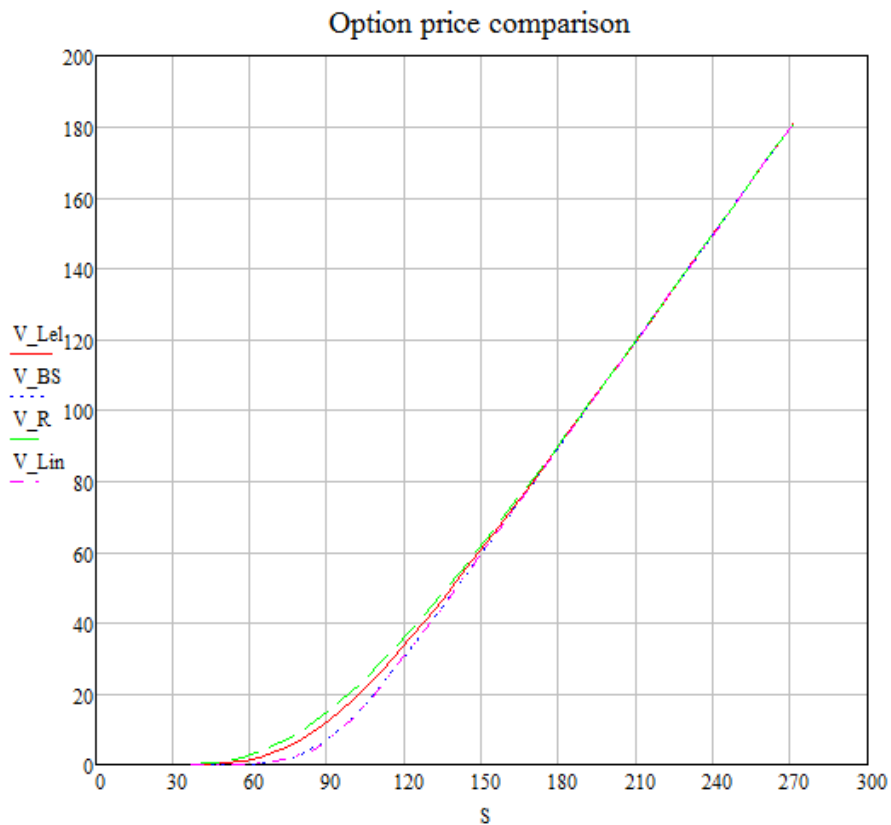
Рассмотрим случай, в котором не выполняется изначальное предположение о выпуклости  $V(S, t)$  по  $S$ . Этот случай соответствует сроку экспирации  $T = 50$  лет. Если использовать модели без постановки знака абсолютной величины на сумму соответствующих производных, то решение будет некорректным (за исключением, вероятно, модели RАРМ, на которую предложенная модификация влияет незначительно). В другом случае, обеспечив неотрицательность  $s_i^m$ , можно получить хорошо интерпретируемые результаты. Примерный вид решения для этой задачи представлен на Рис. 3.7а. Сравнение решений для разных моделей — на Рис. 3.7б. На графике видно, что все полученные приближения функции  $V(S, 0)$  являются вогнутыми, что согласуется с отказом от свойства  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0$ . Также ранжировка цен опциона относительно различных моделей изменилась на противоположную: линейная модель теперь оценивает опцион дороже остальных, а RАРМ — дешевле.

На данный момент трудно делать выводы относительно содержательности такой модификации, поскольку это подразумевает более серьезное изучение процессов, происходящих на финансовых рынках. Тем не менее не вызывает сомнения, что необходимо дальнейшее рассмотрение возникших проблем и поиск возможных решений.

### 3.3 Иллюстрации к численному решению уравнения Блэка-Шоулза

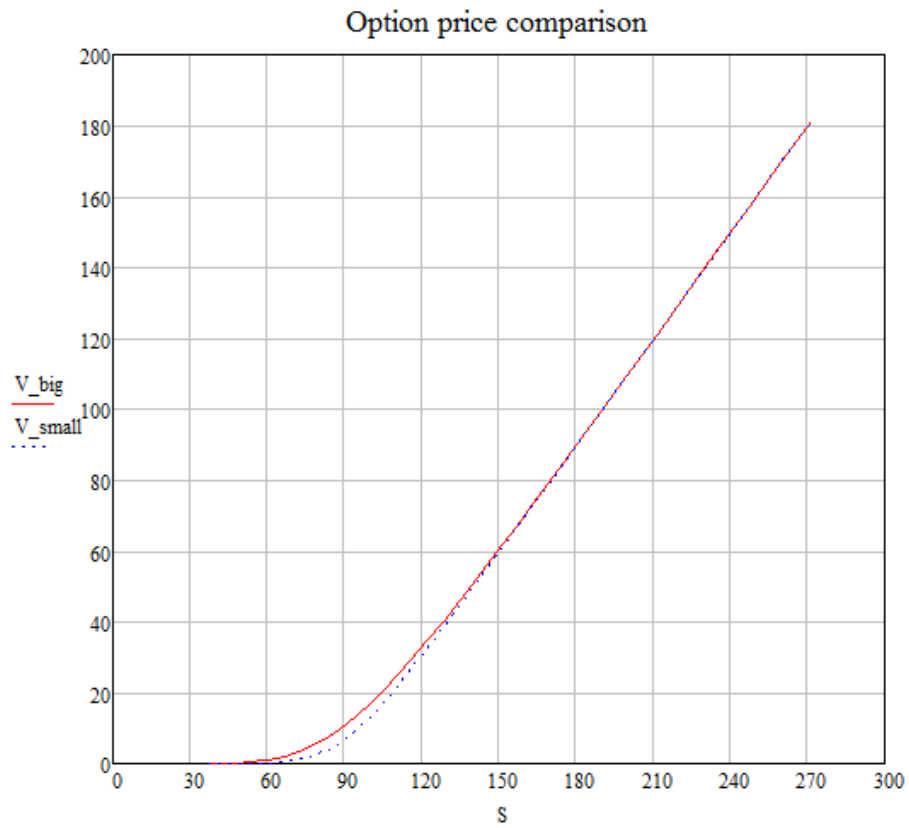


(a) Вид решения при исходных параметрах моделей

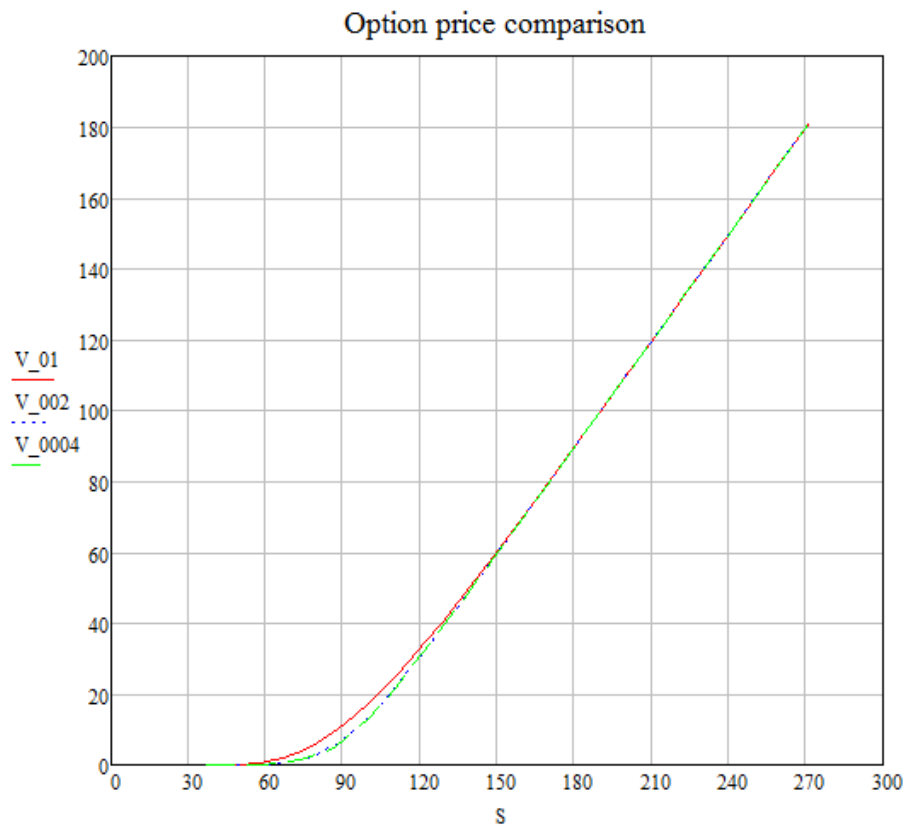


(b) Сравнение решений для разных моделей волатильности при исходных параметрах моделей

Рис. 3.1: Вид решений при исходных параметрах моделей



(a) Зависимость решения от параметров модели Леланда при  $\kappa = 0.05, \delta t = 0.02$  и  $\kappa = 0.001, \delta t = 0.25$

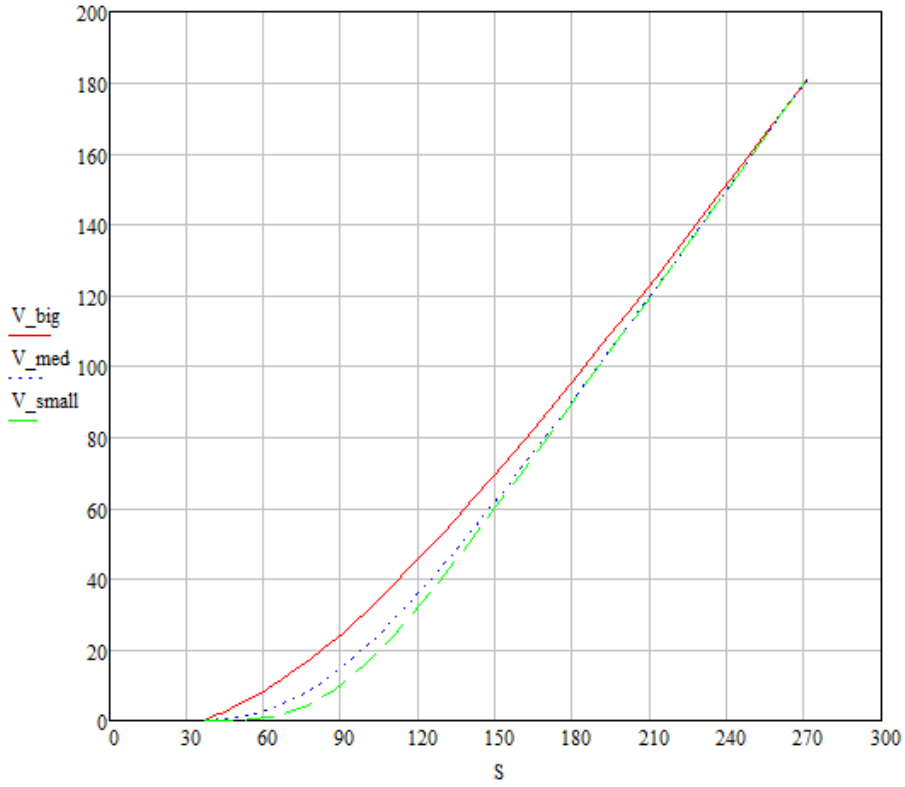


(b) Зависимость решения от параметров модели Барльса-Сонера при  $a = 0.1, a = 0.02$  и  $a = 0.004$

Рис. 3.2: Зависимость решений от параметров моделей

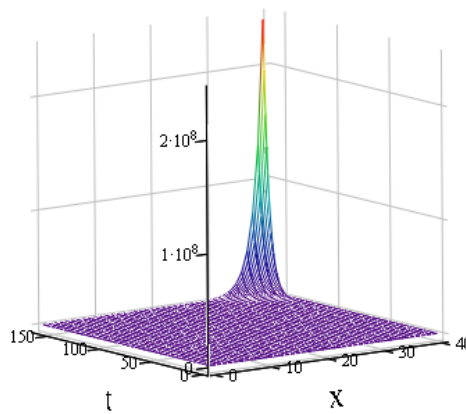


Option price comparison

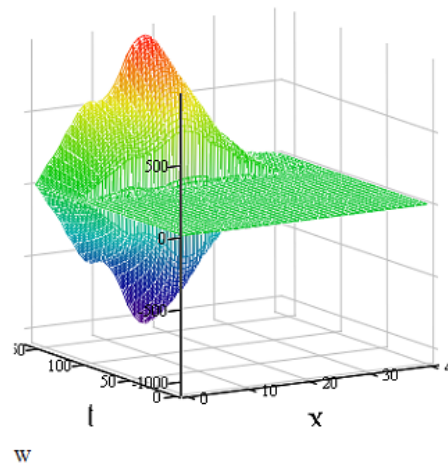


(a) Зависимость решения от параметров модели RAPM при  $C = 100, M = 0.05, C = 30, M = 0.01$  и  $C = 10, M = 0.002$

Рис. 3.3: Зависимость решений от параметров моделей

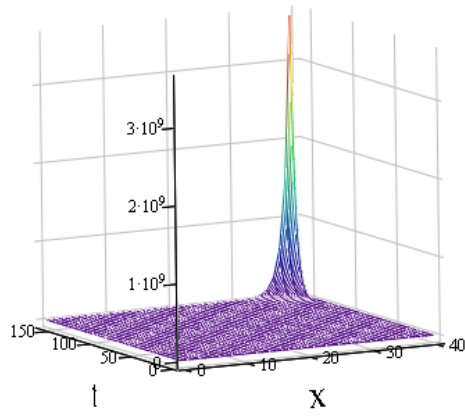


(a) Неустойчивость решения для модели Леланда при  $T = 3$



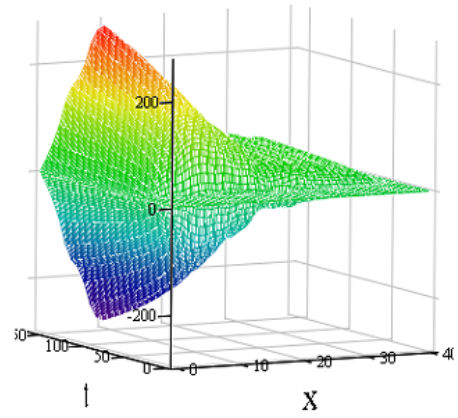
(b) Неустойчивость решения для модели Барльса-Сонера при  $T = 20$

Рис. 3.4: Плохие свойства решений при увеличенной экспирации



w

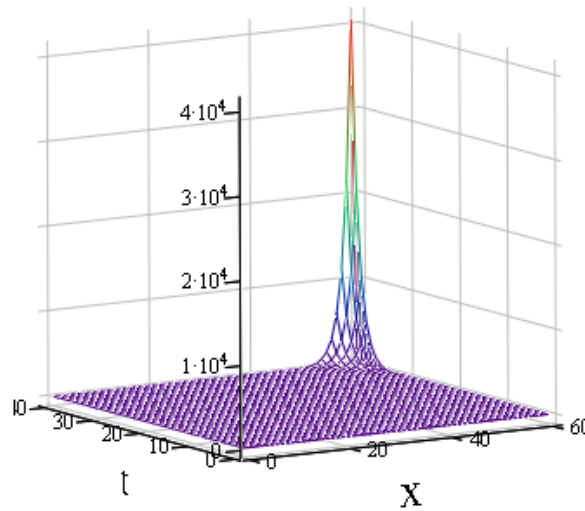
(a) Неустойчивость решения для модели Леланда при  $\kappa = 0.5, \delta t = 0.25$



w

(b) Неустойчивость решения для модели Барльса-Сонера при  $a = 0.2$

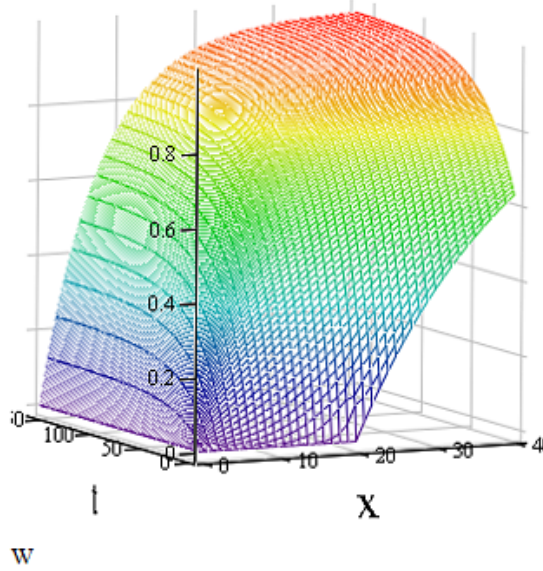
Рис. 3.5: Плохие свойства решений при изменении параметров моделей



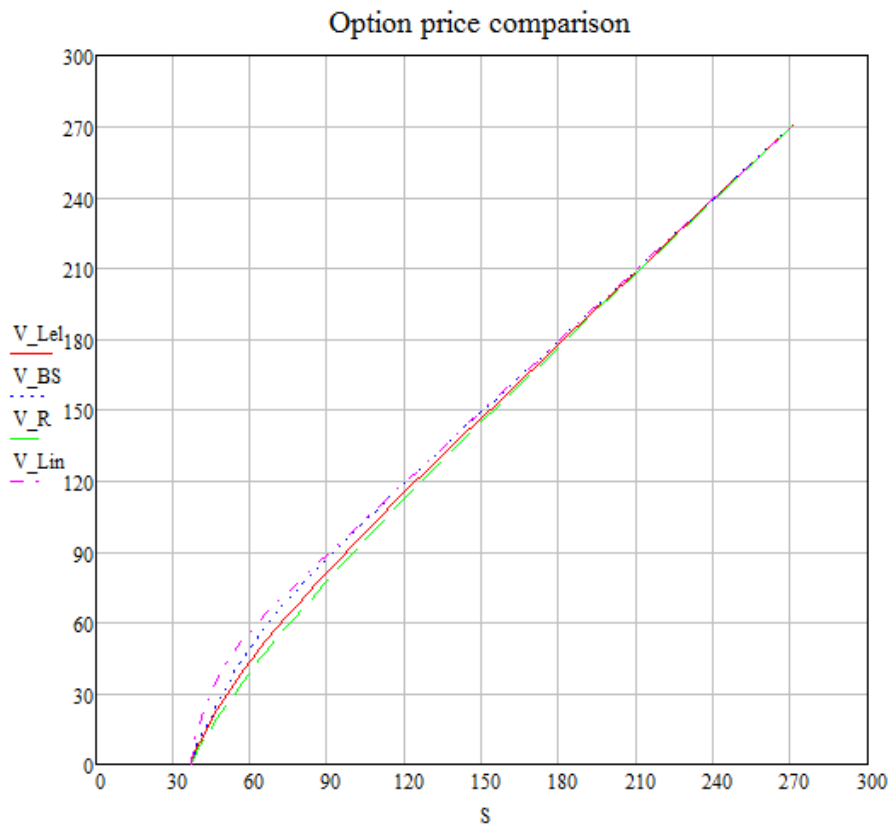
w

(a) Неустойчивость решения для модели Леланда при  $N = 30, M = 40$

Рис. 3.6: Плохие свойства решения при изменении параметров сетки



(a) Вид решения при  $T = 50$  и модифицированной волатильности



(b) Сравнение решений для разных модифицированных моделей волатильности при  $T = 50$

Рис. 3.7: Вид решений при  $T = 50$  и модифицированной волатильности

## Заключение

В данной работе были рассмотрены способы определения справедливой цены опциона при использовании различных моделей и предположений. В центре внимания оказались две модели ценообразования европейских опционов в непрерывном времени, описываемые уравнениями срочной структуры для цены дериватива и уравнением Блэка-Шоулза с переменной волатильностью. Эти уравнения в частных производных решались с помощью численных методов (разностных схем), которые были программно реализованы.

Для уравнения срочной структуры построены численные решения с использованием двух различных разностных схем. Также проведен сравнительный анализ свойств этих схем (погрешности и устойчивости), в результате которого было выявлено — в противоположность опубликованным результатам — преимущество более традиционного метода над новым, который оказался лишь условно устойчивым.

Для уравнения Блэка-Шоулза рассмотрены важные модификации, связанные с уточненными методиками определения волатильности. Проведен сравнительный анализ численных решений для анализа влияния этих методик на результат; в определенных ситуациях оно носит монотонный характер. Существенно, что эти достаточно известные методики оказались неуниверсальными, поскольку в ряде случаев была обнаружена ошибочность и неустойчивость решения. Таким образом, необходима корректировка этих моделей, и одна из простейших из них была апробирована.

# Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. — 632 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. — 512 с.
3. Люу Ю.Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / пер. с англ. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. — 751 с.
4. Макуев Н.Р., Шведов А.С. Об оценке процентных финансовых инструментов путем численного решения уравнения срочной структуры // *Экономический журнал ВШЭ*. 2011. №3. С. 375—382.
5. Ankudinova J., Ehrhardt M. On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. Vol. 56. №3. P. 799—812.
6. Barles G., Soner H.M., Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation // *Finance and Stochastics*. 1998. 2. P. 369—397.
7. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *The Journal of Political Economy*. May — June, 1973. Vol. 81 (Issue 3). P. 637—654.
8. Boyle Ph. Options: a Monte Carlo approach // *Journal of Financial Economics*. 1977. 4. P. 323—338.
9. Brandimarte P. Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction. — 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006. — 669 p.
10. Cen Zh., Le A. A robust and accurate finite difference method for a generalized Black-Scholes equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2011. 235. P. 3728—3733.
11. Company R. et al. Numerical analysis and simulation of option pricing problems modeling illiquid markets // *Computers and Mathematics with Applications*, 2010. 59. P. 2964—2975.
12. Cox J.C., Ingersoll J.E. Jr., Ross S.A. A theory of the term structure of interest rates // *Econometrica*. March, 1985. Vol. 53 (Issue 2). P. 385—408.

13. Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach // *Journal of Financial Economics*, September, 1979. 7. P. 229–263.
14. Heston S.L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // *The Review of Financial Studies*. 1993. Vol. 6 (Issue 2). P. 327–343.
15. Jandačka M., Ševčovič D., On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile // *Journal of Applied Mathematics*. 2005. 3. P. 235–258.
16. Leland H.E. Option pricing and replication with transactions costs // *The Journal of Finance*, 1985. 40. P. 1283–1301.
17. Ramirez-Espinoza G., Ehrhardt M. Conservative and finite volume methods for the convectiondominated pricing problem // *Bergische Universität Wuppertal – Institute of Mathematical Modelling, Analysis and Computational Mathematics* (preprint). Feb. 2012. 32 p.
18. Rigal A. High order difference schemes for unsteady one-dimensional diffusion-convection problems // *Journal of Computational Physics*. 1994. 114. P. 59–76.

## Глава 4

# Приложения

Далее на отдельных страницах будут приведены коды программ (рабочие листы) в среде *Mathcad*.

1) Программа для тестирования симметричной схемы для уравнения конвекции-диффузии на линейной функции

```

Solver(A, B, Func) :=
  (C)
  (μ)
  (f)
  (T) ← A
  (X)
  (J)
  (N)
  (u0)
  (g0) ← B
  (g1)
  (v) ← Func
  (F)
  h ← X/J
  u ← 0
  τ ← T/N
  for n ∈ 0..N
    t_n ← n·τ
  c_0 ← 1
  c_J ← 1
  b_0 ← 0
  a_J ← 0
  x_0 ← 0
  for j ∈ 1..J
    x_j ← j·h
  for j ∈ 0..J
    | u_{j,0} ← u0(x_j)
    | for n ∈ 0..N
    |   U_{j,n} ← v(x_j, t_n)
  Err_{J,N} ← 0

```



for  $j \in 1..J-1$

$$a_j \leftarrow \frac{\mu}{2 \cdot h^2} + \frac{C}{4 \cdot h}$$

$$b_j \leftarrow \frac{\mu}{2 \cdot h^2} - \frac{C}{4 \cdot h}$$

$$c_j \leftarrow \frac{1}{\tau} + \frac{\mu}{h^2} - \frac{f}{2}$$

$$a2_j \leftarrow a_j$$

$$b2_j \leftarrow b_j$$

$$c2_j \leftarrow \frac{1}{\tau} - \frac{\mu}{h^2} + \frac{f}{2}$$

for  $n \in 1..N$

$$u_{0,n} \leftarrow g0(t_n)$$

$$u_{J,n} \leftarrow g1(t_n)$$

$$\alpha_1 \leftarrow \frac{b_0}{c_0}$$

for  $j \in 1..J-1$

$$\alpha_{j+1} \leftarrow \frac{b_j}{c_j - a_j \cdot \alpha_j}$$

for  $n \in 0..N-1$

$$d_0 \leftarrow u_{0,n+1}$$

$$d_j \leftarrow u_{J,n+1}$$

$$\beta_1 \leftarrow \frac{d_0}{c_0}$$

for  $j \in 1..J-1$

$$d_j \leftarrow c2_j \cdot u_{j,n} + b2_j \cdot u_{j+1,n} + a2_j \cdot u_{j-1,n} + F\left(x_j, t_n + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\beta_{j+1} \leftarrow \frac{d_j + a_j \cdot \beta_j}{c_j - a_j \cdot \alpha_j}$$

for  $j \in J..2$

$$u_{j-1,n+1} \leftarrow \alpha_j \cdot u_{j,n+1} + \beta_j$$

```

for j ∈ 1..J - 1
  for n ∈ 1..N
    Errj,n ← |uj,n - Uj,n|
    Errinf ← max(Errinf, |uj,n - Uj,n|)
    ErrE ← ErrE + (uj,n - Uj,n)2
    Dinf ← max(Dinf, |uj,N - Uj,N|)
    DE ← DE + (uj,N - Uj,N)2
  DE ← √(h·DE)
  ErrE ← √(h·τ·ErrE)
  (
    u
    Dinf
    DE
    Errinf
    ErrE
    Err
  )

```

$$d0 := 1 \quad d1 := 1 \quad d2 := 1$$

$$u(x,t) := d0 + d1 \cdot x + d2 \cdot t$$

$$\underline{\underline{C}} := 1 \quad \underline{\underline{\mu}} := 1 \quad f := 1 \quad X := 1 \quad \underline{\underline{J}} := 20 \quad \underline{\underline{T}} := 1 \quad \underline{\underline{N}} := 80$$

$$u0(x) := u(x,0) \quad g0(t) := u(0,t) \quad g1(t) := u(X,t) \quad \underline{\underline{F}}(x,t) := d2 + (C \cdot d1 - f \cdot u(x,t))$$

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} C \\ \mu \\ f \\ T \\ X \\ J \\ N \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} u0 \\ g0 \\ g1 \end{pmatrix} \quad \text{Func} := \begin{pmatrix} u \\ F \end{pmatrix}$$

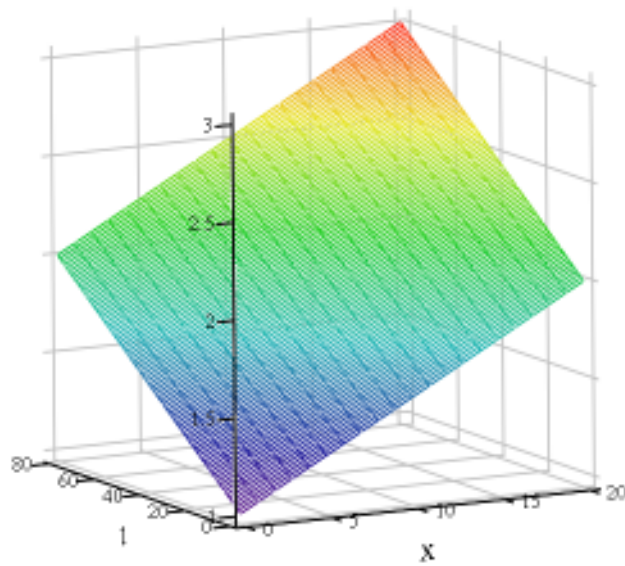
$$\begin{pmatrix} \text{Sol} \\ \text{Dinf} \\ \text{DE} \\ \text{Errinf} \\ \text{ErrE} \\ \text{Err} \end{pmatrix} := \text{Solver}(A, B, \text{Func})$$

$$\text{DE} = 1.425 \times 10^{-15}$$

$$\text{Dinf} = 2.22 \times 10^{-15}$$

$$\text{ErrE} = 0$$

$$\text{Errinf} = 2.665 \times 10^{-15}$$



Sol

2) Программа для решения уравнения конвекции-диффузии с использованием симметричной схемы

```

Solver(A, B, v) :=
  (
    (
      beta
      sigma
      T
      X
      J
      N
    )
    ← A
  )
  (
    C
    mu
    f
    u0
    g0
    g1
  )
  ← B
  h ← X / J
  u ← 0
  tau ← T / N
  for n ∈ 0..N
    t_n ← n * tau
  c_0 ← 1
  c_J ← 1
  b_0 ← 0
  a_J ← 0
  x_0 ← 0
  for j ∈ 1..J
    x_j ← j * h
  for j ∈ 0..J
    |
    | u_{j,0} ← u0(x_j)
    | for n ∈ 0..N
    | U_{j,n} ← v(x_j, t_n)
  for j ∈ 1..J - 1

```



```

| | u_{j-1,n+1} ← α_j · u_{j,n+1} + β_j
| for j ∈ 1..J - 1
| | for n ∈ 1..N
| | | Err_{j,n} ← |u_{j,n} - U_{j,n}|
| | | Errinf ← max(Errinf, |u_{j,n} - U_{j,n}|)
| | | ErrE ← ErrE + (u_{j,n} - U_{j,n})^2
| | | Dinf ← max(Dinf, |u_{j,N} - U_{j,N}|)
| | | DE ← DE + (u_{j,N} - U_{j,N})^2
| DE ← √(h · DE)
| ErrE ← √(h · τ · ErrE)
| (
|   u
|   Dinf
|   DE
|   Errinf
|   ErrE
|   Err
| )

```

$$\text{alpha} := 0.01925 \quad \text{beta} := 0.55 \quad \sigma := 0.39 \quad \gamma := \sqrt{\text{beta}^2 + 2 \cdot \sigma^2}$$

$$U(t) := 2 \cdot \gamma \cdot e^{\frac{(\text{beta} + \gamma) \cdot t}{2}} \quad \underline{\underline{V(t)}} := 2 \cdot \gamma + (\text{beta} + \gamma) \cdot (e^{\gamma \cdot t} - 1) \quad \underline{\underline{W(t)}} := 2 \cdot (e^{\gamma \cdot t} - 1)$$

$$\underline{\underline{A(t)}} := \left( \frac{U(t)}{V(t)} \right)^{\frac{2 \cdot \text{alpha}}{\sigma^2}} \quad B(t) := \frac{W(t)}{V(t)} \quad u(x,t) := A(t) \cdot e^{-B(t) \cdot x}$$

$$X := 0.1 \quad \underline{\underline{J}} := 120 \quad \underline{\underline{T}} := 2 \quad M := 30$$

$$u0(x) := u(x, 0) \quad g0(t) := u(0, t) \quad g1(t) := u(X, t)$$

$$\mu(x) := \frac{\sigma^2}{2} \cdot x \quad \underline{\underline{C(x)}} := \text{beta} \cdot x - \text{alpha} + \frac{\sigma^2}{2} \quad f(x) := \text{beta} - x$$

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} \text{beta} \\ \sigma \\ T \\ X \\ J \\ M \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} := \begin{pmatrix} C \\ \mu \\ f \\ u0 \\ g0 \\ g1 \end{pmatrix}$$

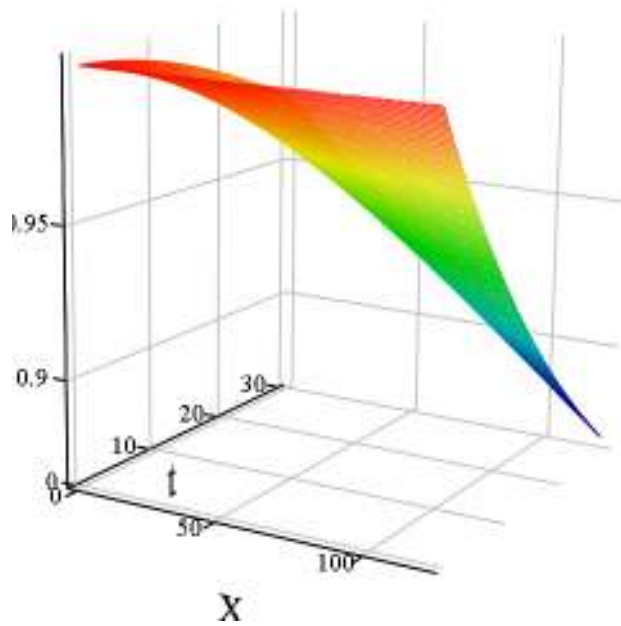
$$\begin{pmatrix} \text{Sol} \\ \text{Dinf} \\ \text{DE} \\ \text{Errinf} \\ \text{ErrE} \\ \text{Err} \end{pmatrix} := \text{Solver}(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, u)$$

$$\text{Dinf} = 2.163 \times 10^{-7}$$

$$\text{DE} = 4.529 \times 10^{-8}$$

$$\text{Errinf} = 6.7 \times 10^{-7}$$

$$\text{ErrE} = 1.194 \times 10^{-7}$$



Sol

3) Программа для тестирования смешанной схемы для уравнения конвекции-диффузии на линейной функции

```

Solver(A, B, Func) :=
  (
    (T)
    (X)
    (J)
    (N)
  ) ← A
  (
    (u0)
    (g0)
    (g1)
    (C)
    (μ)
    (f)
  ) ← B
  (
    (v)
    (F)
  ) ← Func
  h ← X / J
  u ← 0
  τ ← T / N
  for n ∈ 0..N
    t_n ← n·τ
  c_0 ← 1
  c_J ← 1
  b_0 ← 0
  a_J ← 0
  x_0 ← 0
  xhb_0 ← 0
  for j ∈ 1..J
    x_j ← j·h
    xhb_j ← x_j - h/2
  for j ∈ 0..J
    u_{j,0} ← u0(x_j)
    for n ∈ 0..N

```



```

| U_{j,n} ← v(x_j, t_n)
Err_{J,N} ← 0
for j ∈ 1..J-1
|
|   qc ← (1 + (τ/h)·C(xhb_{j+1})) / 2
|   qf ← (1 - (τ/h)·C(xhb_{j+1})) / 2
|   pf ← (1 + (τ/h)·C(xhb_j)) / 2
|   pc ← (1 - (τ/h)·C(xhb_j)) / 2
|   a2_j ← (τ/2) · [ (μ(xhb_j)/h) + C(xhb_j)·(1 - pc) ]
|   b2_j ← (τ/2) · [ (μ(xhb_{j+1})/h) - C(xhb_{j+1})·(1 - qc) ]
|   temp ← h·f(x_j) - (μ(xhb_{j+1})/h) - (μ(xhb_j)/h)
|   c2_j ← h + (τ/2) · (temp - C(xhb_{j+1})·qc + C(xhb_j)·pc)
|   a_j ← (τ/2) · [ (μ(xhb_j)/h) + C(xhb_j)·(1 - pf) ]
|   b_j ← (τ/2) · [ (μ(xhb_{j+1})/h) - C(xhb_{j+1})·(1 - qf) ]
|   c_j ← h - (τ/2) · (temp - C(xhb_{j+1})·qf + C(xhb_j)·pf)
for n ∈ 1..N
|
|   u_{0,n} ← g0(t_n)
|   u_{J,n} ← g1(t_n)
α_1 ← b_0 / c_0
for j ∈ 1..J-1

```

$$\alpha_{j+1} \leftarrow \frac{b_j}{c_j - a_j \cdot \alpha_j}$$

for  $n \in 0..N-1$

$$\left( \begin{array}{l} d_0 \leftarrow u_{0,n+1} \\ d_J \leftarrow u_{J,n+1} \\ \beta_1 \leftarrow \frac{d_0}{c_0} \\ \text{for } j \in 1..J-1 \\ \left| \begin{array}{l} d_j \leftarrow c2_j \cdot u_{j,n} + b2_j \cdot u_{j+1,n} + a2_j \cdot u_{j-1,n} + \tau \cdot h \cdot F\left(x_j, t_n + \frac{\tau}{2}\right) \\ \beta_{j+1} \leftarrow \frac{d_j + a_j \cdot \beta_j}{c_j - a_j \cdot \alpha_j} \end{array} \right. \\ \text{for } j \in J..2 \\ u_{j-1,n+1} \leftarrow \alpha_j \cdot u_{j,n+1} + \beta_j \end{array} \right)$$

for  $j \in 1..J-1$

$$\left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 1..N \\ \left| \begin{array}{l} \text{Err}_{j,n} \leftarrow |u_{j,n} - U_{j,n}| \\ \text{Errinf} \leftarrow \max(\text{Errinf}, \text{Err}_{j,n}) \\ \text{ErrE} \leftarrow \text{ErrE} + (u_{j,n} - U_{j,n})^2 \end{array} \right. \\ \text{Dinf} \leftarrow \max(\text{Dinf}, |u_{j,N} - U_{j,N}|) \\ \text{DE} \leftarrow \text{DE} + (u_{j,N} - U_{j,N})^2 \end{array} \right.$$

$$\text{ErrE} \leftarrow \sqrt{h \cdot \tau \cdot \text{ErrE}}$$

$$\text{DE} \leftarrow \sqrt{h \cdot \text{DE}}$$

$$\left( \begin{array}{l} u \\ \text{Dinf} \\ \text{DE} \\ \text{Errinf} \\ \text{ErrE} \\ \text{Err} \end{array} \right)$$

$$d0 := 1 \quad d1 := 1 \quad d2 := 1$$

$$u(x,t) := d0 + d1 \cdot x + d2 \cdot t$$

$$\underline{C}(x) := 1 \quad \mu(x) := 1 \quad f(x) := 1 \quad X := 1 \quad \underline{J} := 20 \quad \underline{T} := 1 \quad \underline{N} := 80$$

$$u0(x) := u(x,0) \quad g0(t) := u(0,t) \quad g1(t) := u(X,t)$$

$$\underline{F}(x,t) := d2 + (C(x) \cdot d1 - f(x) \cdot u(x,t))$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} T \\ X \\ J \\ N \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} u0 \\ g0 \\ g1 \\ C \\ \mu \\ f \end{pmatrix} \quad \text{Func} := \begin{pmatrix} u \\ F \end{pmatrix}$$

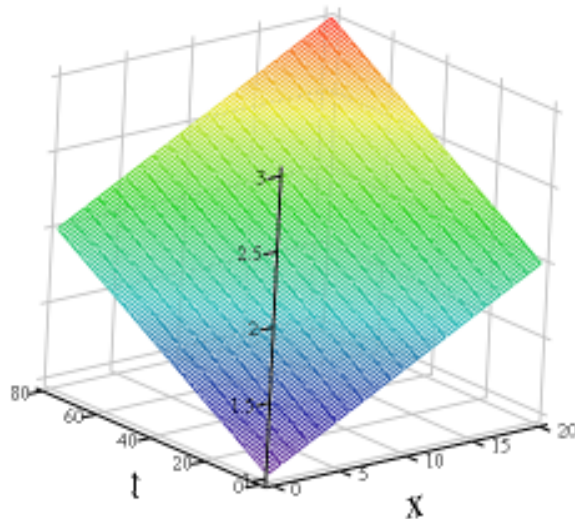
$$\begin{pmatrix} \text{Sol} \\ \text{Dinf} \\ \text{DE} \\ \text{Errinf} \\ \text{ErrE} \\ \text{Err} \end{pmatrix} := \text{Solver}(\underline{A}, \underline{B}, \text{Func})$$

$$\text{DE} = 2.007 \times 10^{-14}$$

$$\text{Dinf} = 2.798 \times 10^{-14}$$

$$\text{ErrE} = 1.568 \times 10^{-14}$$

$$\text{Errinf} = 2.842 \times 10^{-14}$$



Sol

4) Программа для решения уравнения конвекции-диффузии при помощи смешанной схемы

```

Solver(A, B, Func) :=
  (
    (T)
    (X)
    (J)
    (N)
  ) ← A
  (
    (u0)
    (g0)
    (g1)
    (C)
    (μ)
    (f)
  ) ← B
  (v) ← Func
  (F)
  h ← X / J
  u ← 0
  τ ← T / N
  for n ∈ 0..N
    tn ← n·τ
    c0 ← 1
    cJ ← 1
    b0 ← 0
    aJ ← 0
    x0 ← 0
    xhb0 ← 0
    for j ∈ 1..J
      xj ← j·h
      xhbj ← xj - h/2
    for j ∈ 0..J
      uj,0 ← u0(xj)
      for n ∈ 0..N

```

```

| U_{j,n} ← v(x_j, t_n)
for j ∈ 1..J-1
|
|   1 + \frac{\tau}{h} \cdot C(xhb_{j+1})
qc ← -----
|   2
|
|   1 - \frac{\tau}{h} \cdot C(xhb_{j+1})
qf ← -----
|   2
|
|   1 + \frac{\tau}{h} \cdot C(xhb_j)
pf ← -----
|   2
|
|   1 - \frac{\tau}{h} \cdot C(xhb_j)
pc ← -----
|   2
|
|   a2_j ← \frac{\tau}{2} \cdot \left[ \frac{\mu(xhb_j)}{h} + C(xhb_j) \cdot (1 - pc) \right]
|
|   b2_j ← \frac{\tau}{2} \cdot \left[ \frac{\mu(xhb_{j+1})}{h} - C(xhb_{j+1}) \cdot (1 - qc) \right]
|
|   temp ← h \cdot f(x_j) - \frac{\mu(xhb_{j+1})}{h} - \frac{\mu(xhb_j)}{h}
|
|   c2_j ← h + \frac{\tau}{2} \cdot (temp - C(xhb_{j+1}) \cdot qc + C(xhb_j) \cdot pc)
|
|   a_j ← \frac{\tau}{2} \cdot \left[ \frac{\mu(xhb_j)}{h} + C(xhb_j) \cdot (1 - pf) \right]
|
|   b_j ← \frac{\tau}{2} \cdot \left[ \frac{\mu(xhb_{j+1})}{h} - C(xhb_{j+1}) \cdot (1 - qf) \right]
|
|   c_j ← h - \frac{\tau}{2} \cdot (temp - C(xhb_{j+1}) \cdot qf + C(xhb_j) \cdot pf)
|
for n ∈ 1..N
|
|   u_{0,n} ← g0(t_n)
|   u_{J,n} ← g1(t_n)
|
|   \alpha_1 ← \frac{b_0}{c_0}
|
for j ∈ 1..J-1
|
|   \alpha_{j+1} ← b_j \cdot (c_j - a_j \cdot \alpha_j)^{-1}

```

```

for n ∈ 0..N - 1
  d0 ← u0,n+1
  dJ ← uJ,n+1
  β1 ←  $\frac{d_0}{c_0}$ 
  for j ∈ 1..J - 1
    dj ← c2j·uj,n + b2j·uj+1,n + a2j·uj-1,n + τ·h·F(xj, tn +  $\frac{\tau}{2}$ )
    βj+1 ←  $\frac{d_j + a_j \cdot \beta_j}{c_j - a_j \cdot \alpha_j}$ 
  for j ∈ J..2
    uj-1,n+1 ← αj·uj,n+1 + βj
for j ∈ 1..J - 1
  for n ∈ 1..N
    Errj,n ← |uj,n - Uj,n|
    Errinf ← max(Errinf, |uj,n - Uj,n|)
    ErrE ← ErrE + (uj,n - Uj,n)2
  Dinf ← max(Dinf, |uj,N - Uj,N|)
  DE ← DE + (uj,N - Uj,N)2
ErrE ←  $\sqrt{h \cdot \tau \cdot \text{ErrE}}$ 
DE ←  $\sqrt{h \cdot \text{DE}}$ 
(
  u
  Dinf
  DE
  Errinf
  ErrE
  Err
)

```

$$\alpha := 0.01925 \quad \beta := 0.55 \quad \sigma := 0.39 \quad \gamma := \sqrt{\beta^2 + 2 \cdot \sigma^2}$$

$$U(t) := 2 \cdot \gamma \cdot e^{\frac{(\beta + \gamma) \cdot t}{2}} \quad \underline{V}(t) := 2 \cdot \gamma + (\beta + \gamma) \cdot (e^{\gamma \cdot t} - 1) \quad \underline{W}(t) := 2 \cdot (e^{\gamma \cdot t} - 1)$$

$$\underline{A}(t) := \left( \frac{U(t)}{V(t)} \right)^{\frac{2 \cdot \text{alpha}}{\sigma^2}} \quad B(t) := \frac{W(t)}{V(t)} \quad u(x,t) := A(t) \cdot e^{-B(t) \cdot x}$$

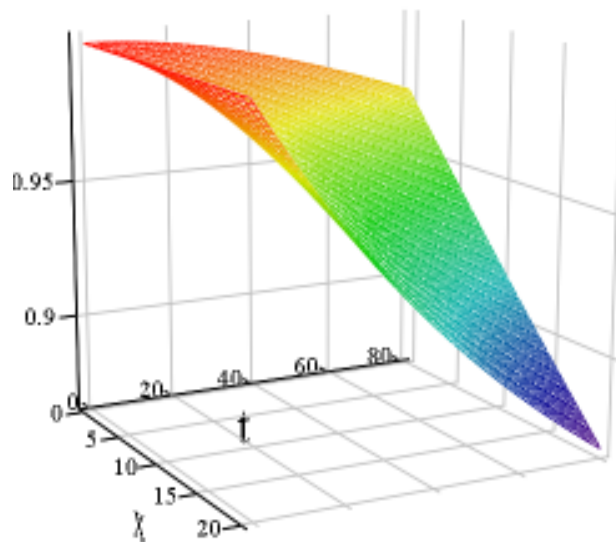
$$\underline{T} := 2 \quad \underline{N} := 80 \quad X := 0.1 \quad \underline{J} := 20$$

$$u0(x) := u(x, 0) \quad g0(t) := u(0, t) \quad g1(t) := u(X, t)$$

$$\mu(x) := \frac{\sigma^2}{2} \cdot x \quad \underline{C}(x) := \text{beta} \cdot x - \text{alpha} + \frac{\sigma^2}{2} \quad f(x) := \text{beta} - x$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} T \\ X \\ J \\ N \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} u0 \\ g0 \\ g1 \\ C \\ \mu \\ f \end{pmatrix} \quad \text{Func} := \begin{pmatrix} u \\ F \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{Sol} \\ \text{Dinf} \\ \text{DE} \\ \text{Errinf} \\ \text{ErrE} \\ \text{Err} \end{pmatrix} := \text{Solver}(\underline{A}, \underline{B}, \text{Func})$$

$$\begin{aligned} \text{DE} &= 2.623 \times 10^{-8} \\ \text{Dinf} &= 1.316 \times 10^{-7} \\ \text{ErrE} &= 8.567 \times 10^{-7} \\ \text{Errinf} &= 3.711 \times 10^{-6} \end{aligned}$$



Sol





$$\beta_1 \leftarrow \frac{d}{c}$$

for  $i \in 1..2 \cdot N - 1$

$$D2U \leftarrow \frac{u_{i+1,n-1} - 2 \cdot u_{i,n-1} + u_{i-1,n-1}}{h^2}$$

$$D1U \leftarrow \frac{u_{i+1,n-1} - u_{i-1,n-1}}{2 \cdot h}$$

$$s_{i,n-1} \leftarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\kappa}{\sigma \cdot \sqrt{\delta t}} \cdot |\text{sign}(D2U + D1U)|$$

$$a \leftarrow \frac{s_{i,n-1} + 1}{h^2} - \frac{s_{i,n-1} + 1 + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}{2 \cdot h}$$

$$b \leftarrow \frac{s_{i,n-1} + 1}{h^2} + \frac{s_{i,n-1} + 1 + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}{2 \cdot h}$$

$$c \leftarrow \frac{2}{k} + \frac{2 \cdot s_{i,n-1} + 2}{h^2}$$

$$a2 \leftarrow a$$

$$b2 \leftarrow b$$

$$c2 \leftarrow \frac{2}{k} - \frac{2 \cdot s_{i,n-1} + 2}{h^2}$$

$$d \leftarrow c2 \cdot u_{i,n-1} + b2 \cdot u_{i+1,n-1} + a2 \cdot u_{i-1,n-1}$$

$$\alpha_{i+1} \leftarrow \frac{b}{c - a \cdot \alpha_i}$$

$$\beta_{i+1} \leftarrow \frac{d + a \cdot \beta_i}{c - a \cdot \alpha_i}$$

$$d \leftarrow u_{2 \cdot N, n}$$

for  $i \in 2 \cdot N..2$

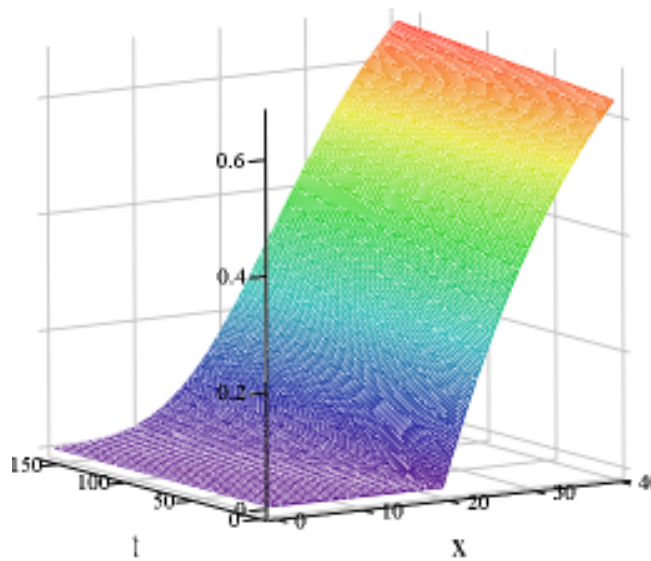
$$u_{i-1, n} \leftarrow \alpha_i \cdot u_{i, n} + \beta_i$$

$\begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{llll}
 \underline{R} := 1 & \underline{N} := 20 & \sigma := 0.2 & r := 0.1 \\
 \underline{T} := \frac{\sigma^2}{2} & M := 160 & \delta t := 0.01 & \kappa := 0.05 \\
 u_0(x) := \max(1 - e^{-x}, 0) & g_0(\tau) := 0 & g_1(\tau) := 1 - e^{-\left(\frac{2 \cdot r \cdot \tau}{\sigma^2} + R\right)} & 
 \end{array}$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \sigma \\ \kappa \\ \delta t \\ r \\ R \\ T \\ N \\ M \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} u_0 \\ g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} \quad \underline{W} := \text{Solver}(\underline{A}, \underline{B})$$

$$\underline{V} := \underline{W}^{(M)}$$



W



$$\beta_1 \leftarrow \frac{d}{c}$$

for  $i \in 1..2 \cdot N - 1$

$$D2U \leftarrow \frac{u_{i+1,n-1} - 2 \cdot u_{i,n-1} + u_{i-1,n-1}}{h^2}$$

$$D1U \leftarrow \frac{u_{i+1,n-1} - u_{i-1,n-1}}{2 \cdot h}$$

$$s_{i,n-1} \leftarrow e^{\frac{r \cdot \tau_{n-1}}{\sigma^2} + x_i} \cdot a a^2 \cdot K \cdot (D2U + D1U)$$

$$a \leftarrow \frac{s_{i,n-1} + 1}{h^2} - \frac{s_{i,n-1} + 1 + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}{2 \cdot h}$$

$$b \leftarrow \frac{s_{i,n-1} + 1}{h^2} + \frac{s_{i,n-1} + 1 + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}{2 \cdot h}$$

$$c \leftarrow \frac{2}{k} + \frac{2 \cdot s_{i,n-1} + 2}{h^2}$$

$$a2 \leftarrow a$$

$$b2 \leftarrow b$$

$$c2 \leftarrow \frac{2}{k} - \frac{2 \cdot s_{i,n-1} + 2}{h^2}$$

$$d \leftarrow c2 \cdot u_{i,n-1} + b2 \cdot u_{i+1,n-1} + a2 \cdot u_{i-1,n-1}$$

$$\alpha_{i+1} \leftarrow \frac{b}{c - a \cdot \alpha_i}$$

$$\beta_{i+1} \leftarrow \frac{d + a \cdot \beta_i}{c - a \cdot \alpha_i}$$

$$d \leftarrow u_{2 \cdot N, n}$$

for  $i \in 2 \cdot N..2$

$$u_{i-1, n} \leftarrow \alpha_i \cdot u_{i, n} + \beta_i$$

$\begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix}$

$$\underline{R} := 1 \quad \underline{N} := 20 \quad \sigma := 0.2 \quad aa := 0.02 \quad r := 0.1$$

$$\underline{T} := \frac{\sigma^2}{2} \quad M := 160 \quad \underline{K} := 100 \quad g0(\tau) := 0$$

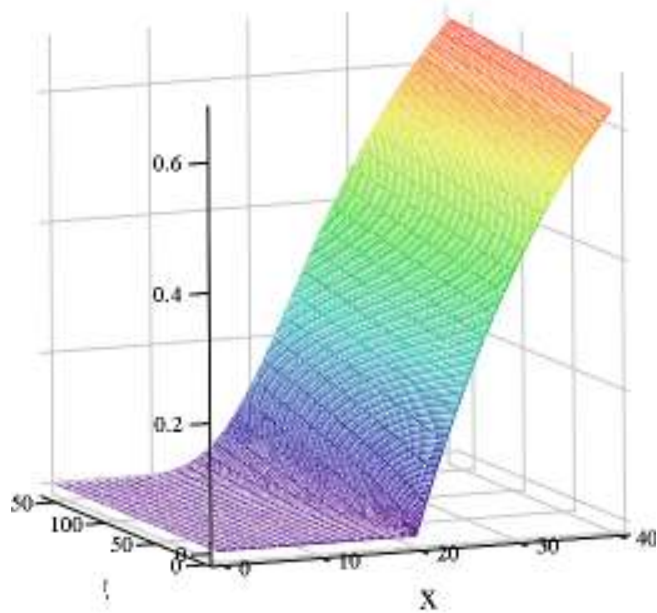
$$u0(x) := \max(1 - e^{-x}, 0)$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \sigma \\ aa \\ K \\ r \\ R \\ T \\ N \\ M \end{pmatrix} \quad g1(\tau) := 1 - e^{-\left(\frac{2 \cdot r \cdot \tau}{\sigma^2} + R\right)}$$

$$B := \begin{pmatrix} u0 \\ g0 \\ g1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{W} \\ \underline{S} \end{pmatrix} := \text{Solver}(A, B)$$

$$\underline{V} := \underline{W}^{(M)}$$



W



$$\beta_1 \leftarrow \frac{d}{c}$$

for  $i \in 1..2 \cdot N - 1$

$$D2U \leftarrow \frac{u_{i+1,n-1} - 2 \cdot u_{i,n-1} + u_{i-1,n-1}}{h^2}$$

$$D1U \leftarrow \frac{u_{i+1,n-1} - u_{i-1,n-1}}{2 \cdot h}$$

$$s_{i,n-1} \leftarrow 3 \cdot \left[ \frac{\text{risk\_p}^2 \cdot \text{tcm}}{2 \cdot \pi} \cdot (D2U + D1U) \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$a \leftarrow \frac{s_{i,n-1} + 1}{h^2} - \frac{s_{i,n-1} + 1 + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}{2 \cdot h}$$

$$b \leftarrow \frac{s_{i,n-1} + 1}{h^2} + \frac{s_{i,n-1} + 1 + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}{2 \cdot h}$$

$$c \leftarrow \frac{2}{k} + \frac{2 \cdot s_{i,n-1} + 2}{h^2}$$

$$a2 \leftarrow a$$

$$b2 \leftarrow b$$

$$c2 \leftarrow \frac{2}{k} - \frac{2 \cdot s_{i,n-1} + 2}{h^2}$$

$$d \leftarrow c2 \cdot u_{i,n-1} + b2 \cdot u_{i+1,n-1} + a2 \cdot u_{i-1,n-1}$$

$$\alpha_{i+1} \leftarrow \frac{b}{c - a \cdot \alpha_i}$$

$$\beta_{i+1} \leftarrow \frac{d + a \cdot \beta_i}{c - a \cdot \alpha_i}$$

$$d \leftarrow u_{2 \cdot N, n}$$

for  $i \in 2 \cdot N .. 2$

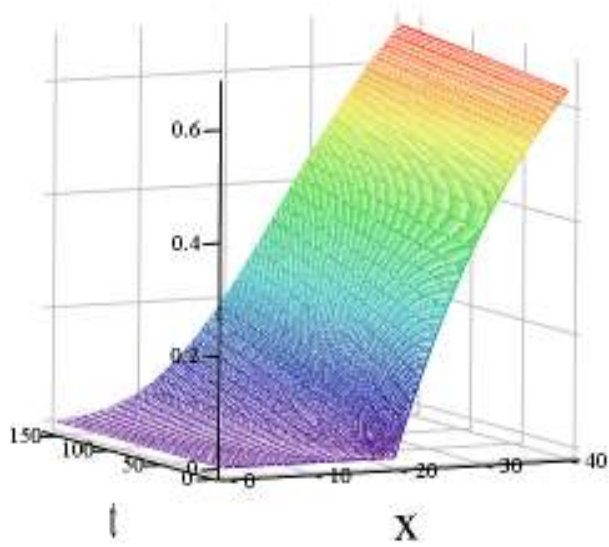
$$u_{i-1, n} \leftarrow \alpha_i \cdot u_{i, n} + \beta_i$$

$\begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 R &:= 1 & N &:= 20 & \sigma &:= 0.2 & tcm &:= 0.01 & g0(\tau) &:= 0 \\
 T &:= \frac{\sigma^2}{2} & M &:= 160 & r &:= 0.1 & risk\_p &:= 30 & u0(x) &:= \max(1 - e^{-x}, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{A} &:= \begin{pmatrix} \sigma \\ tcm \\ risk\_p \\ r \\ R \\ T \\ N \\ M \end{pmatrix} & g1(\tau) &:= 1 - e^{-\left(\frac{2 \cdot r \cdot \tau}{\sigma^2} + R\right)} \\
 \underline{B} &:= \begin{pmatrix} u0 \\ g0 \\ g1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} W \\ \underline{s} \end{pmatrix} &:= \text{Solver}(\underline{A}, \underline{B})
 \end{aligned}$$

$$\underline{V} := W^{(M)}$$



W





$$b_i \leftarrow \frac{s_{i,n} + 1}{h^2} + \frac{s_{i,n} + 1 + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}{2 \cdot h}$$

$$c_i \leftarrow \frac{2}{k} + \frac{2 \cdot s_{i,n} + 2}{h^2}$$

$$a2_i \leftarrow a_i$$

$$b2_i \leftarrow b_i$$

$$c2_i \leftarrow \frac{2}{k} - \frac{2 \cdot s_{i,n} + 2}{h^2}$$

for  $n \in 1..M$

$$u_{0,n} \leftarrow g0(\tau_n)$$

$$u_{2 \cdot N,n} \leftarrow g1(\tau_n)$$

$$\alpha_1 \leftarrow \frac{b_0}{c_0}$$

for  $i \in 1..2 \cdot N - 1$

$$\alpha_{i+1} \leftarrow \frac{b_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}$$

for  $n \in 0..M - 1$

$$d_0 \leftarrow u_{0,n+1}$$

$$d_{2 \cdot N} \leftarrow u_{2 \cdot N,n+1}$$

$$\beta_1 \leftarrow \frac{d_0}{c_0}$$

for  $i \in 1..2 \cdot N - 1$

$$d_i \leftarrow c2_i \cdot u_{i,n} + b2_i \cdot u_{i+1,n} + a2_i \cdot u_{i-1,n}$$

$$\beta_{i+1} \leftarrow \frac{d_i + a_i \cdot \beta_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}$$

for  $i \in 2 \cdot N..2$

$$u_{i-1,n+1} \leftarrow \alpha_i \cdot u_{i,n+1} + \beta_i$$

u

$$\underline{R} := 1 \quad \underline{N} := 20 \quad \sigma := 0.2 \quad \text{eps} := 0 \quad r := 0.1$$

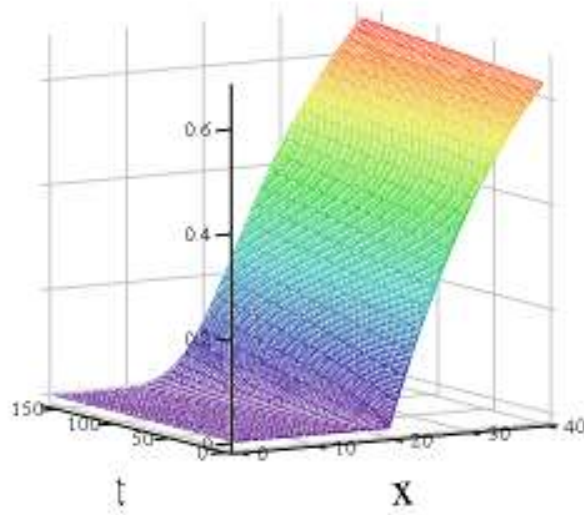
$$\underline{T} := \frac{\sigma^2}{2} \quad M := 160 \quad \text{sigma\_tsq}(x, \tau) := \sigma^2 \cdot (1 + \text{eps})$$

$$u_0(x) := \max(1 - e^{-x}, 0) \quad g_0(\tau) := 0 \quad g_1(\tau) := 1 - e^{-\left(\frac{2 \cdot r \cdot \tau}{\sigma^2} + R\right)}$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \sigma \\ r \\ R \\ N \\ T \\ M \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} u_0 \\ g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{W} := \text{ThomasAlgorithm}(\underline{A}, \underline{B}, \text{sigma\_tsq})$$

$$\underline{V} := \underline{W}^{(M)}$$



W

9) Программа для сравнения результатов для разных моделей волатильности при исходных значениях параметров

$\underline{W} :=$   
u\_x\_data.csv

	0	1	2	3	4
0	-1	0	0	0	0
1	-0.95	$7.78 \cdot 10^{-4}$	$2.12 \cdot 10^{-6}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
2	-0.9	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$5.95 \cdot 10^{-6}$	$4.05 \cdot 10^{-3}$	$4.52 \cdot 10^{-6}$
3	-0.85	$2.58 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$	$6.47 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-5}$
4	-0.8	$3.86 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$9.44 \cdot 10^{-3}$	$2.71 \cdot 10^{-5}$
5	-0.75	$5.55 \cdot 10^{-3}$	$7.99 \cdot 10^{-5}$	0.013	$6.23 \cdot 10^{-5}$
6	-0.7	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-4}$	0.018	$1.38 \cdot 10^{-4}$
7	-0.65	0.011	$3.68 \cdot 10^{-4}$	0.023	$2.93 \cdot 10^{-4}$
8	-0.6	0.015	$7.45 \cdot 10^{-4}$	0.03	$5.99 \cdot 10^{-4}$
9	-0.55	0.02	$1.44 \cdot 10^{-3}$	0.038	$1.18 \cdot 10^{-3}$
10	-0.5	0.026	$2.68 \cdot 10^{-3}$	0.047	$2.21 \cdot 10^{-3}$
11	-0.45	0.033	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.057	$3.99 \cdot 10^{-3}$
12	-0.4	0.042	$8.13 \cdot 10^{-3}$	0.069	$6.92 \cdot 10^{-3}$
13	-0.35	0.053	0.013	0.082	0.011
14	-0.3	0.066	0.021	0.097	0.018
15	-0.25	0.081	0.031	0.113	...

$x := W^{(0)}$                        $\underline{R} := 1$                        $\underline{T} := 1$   
 $u_{Lel} := W^{(1)}$                        $\sigma := 0.2$                        $\underline{K} := 100$   
 $u_{BS} := W^{(2)}$                        $\underline{S} := K \cdot e^x$   
 $u_R := W^{(3)}$                        $V_{Lel} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{Lel}^T)$   
 $u_{Lin} := W^{(4)}$                        $V_{BS} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{BS}^T)$   
      $V_R := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_R^T)$   
      $V_{Lin} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{Lin}^T)$

10) Программа для сравнения результатов для разных значений параметров модели Леланда

$W :=$   
lel\_u\_x\_data.csv

	0	1	2
0	-1	0	0
1	-0.95	$3.28 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$
2	-0.9	$6.93 \cdot 10^{-4}$	$4.79 \cdot 10^{-6}$
3	-0.85	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$1.19 \cdot 10^{-5}$
4	-0.8	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$2.84 \cdot 10^{-5}$
5	-0.75	$2.86 \cdot 10^{-3}$	$6.51 \cdot 10^{-5}$
6	-0.7	$4.28 \cdot 10^{-3}$	$1.43 \cdot 10^{-4}$
7	-0.65	$6.27 \cdot 10^{-3}$	$3.04 \cdot 10^{-4}$
8	-0.6	$9.01 \cdot 10^{-3}$	$6.18 \cdot 10^{-4}$
9	-0.55	0.013	$1.21 \cdot 10^{-3}$
10	-0.5	0.018	$2.26 \cdot 10^{-3}$
11	-0.45	0.024	$4.07 \cdot 10^{-3}$
12	-0.4	0.032	$7.03 \cdot 10^{-3}$
13	-0.35	0.041	0.012
14	-0.3	0.053	0.019
15	-0.25	0.067	...

$$x := W^{(0)}$$

$$u\_big := W^{(1)}$$

$$u\_small := W^{(2)}$$

$$R := 1$$

$$T := 1$$

$$\sigma := 0.2$$

$$K := 100$$

$$S := K \cdot e^x$$

$$V\_big := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u\_big^T)$$

$$V\_small := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u\_small^T)$$

11) Программа для сравнения результатов для разных значений параметров модели Барльса-Сонера

$\underline{W} :=$   
 ...\bs\_u\_data.csv

$$W =$$

	0	1	2	3
0	-1	0	0	0
1	-0.95	$3.07 \cdot 10^{-5}$	$2.12 \cdot 10^{-6}$	$1.62 \cdot 10^{-6}$
2	-0.9	$8.2 \cdot 10^{-5}$	$5.95 \cdot 10^{-6}$	$4.58 \cdot 10^{-6}$
3	-0.85	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$	$1.15 \cdot 10^{-5}$
4	-0.8	$4.16 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$2.74 \cdot 10^{-5}$
5	-0.75	$8.66 \cdot 10^{-4}$	$7.99 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$
6	-0.7	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-4}$	$1.39 \cdot 10^{-4}$
7	-0.65	$3.16 \cdot 10^{-3}$	$3.68 \cdot 10^{-4}$	$2.96 \cdot 10^{-4}$
8	-0.6	$5.51 \cdot 10^{-3}$	$7.45 \cdot 10^{-4}$	$6.05 \cdot 10^{-4}$
9	-0.55	$9.06 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$1.19 \cdot 10^{-3}$
10	-0.5	0.014	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$2.23 \cdot 10^{-3}$
11	-0.45	0.021	$4.77 \cdot 10^{-3}$	$4.03 \cdot 10^{-3}$
12	-0.4	0.03	$8.13 \cdot 10^{-3}$	$6.97 \cdot 10^{-3}$
13	-0.35	0.04	0.013	0.012
14	-0.3	0.053	0.021	0.018
15	-0.25	0.068	0.031	...

$x := W^{(0)}$

$u_{01} := W^{(1)}$

$u_{002} := W^{(2)}$

$u_{0004} := W^{(3)}$

$\underline{R} := 1$

$\underline{T} := 1$

$\sigma := 0.2$

$\underline{K} := 100$

$\underline{S} := K \cdot e^x$

$V_{01} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{01}^T)$

$V_{002} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{002}^T)$

$V_{0004} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{0004}^T)$

12) Программа для сравнения результатов для разных значений параметров модели RAPM

$\underline{W} :=$   
rapm\_u\_data.csv

	0	1	2	3
0	-1	0	0	0
1	-0.95	0.016	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$5.16 \cdot 10^{-5}$
2	-0.9	0.03	$4.05 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$
3	-0.85	0.044	$6.47 \cdot 10^{-3}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$
4	-0.8	0.058	$9.44 \cdot 10^{-3}$	$5.72 \cdot 10^{-4}$
5	-0.75	0.072	0.013	$1.08 \cdot 10^{-3}$
6	-0.7	0.085	0.018	$1.94 \cdot 10^{-3}$
7	-0.65	0.099	0.023	$3.31 \cdot 10^{-3}$
8	-0.6	0.113	0.03	$5.39 \cdot 10^{-3}$
9	-0.55	0.127	0.038	$8.41 \cdot 10^{-3}$
10	-0.5	0.142	0.047	0.013
11	-0.45	0.157	0.057	0.018
12	-0.4	0.172	0.069	0.026
13	-0.35	0.188	0.082	0.035
14	-0.3	0.205	0.097	0.047
15	-0.25	0.221	0.113	...

$x := W^{(0)}$

$u\_big := W^{(1)}$

$u\_med := W^{(2)}$

$u\_small := W^{(3)}$

$R := 1$

$T := 1$

$\sigma := 0.2$

$K := 100$

$S := K \cdot e^x$

$V\_big := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u\_big^T)$

$V\_med := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u\_med^T)$

$V\_small := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u\_small^T)$

13) Программа для сравнения результатов для разных моделей волатильности при экспирации T=50 (вогнутые решения)

$W :=$  ...\incor\_u\_data.csv

	0	1	2	3	4
0	-1	0	0	0	0
1	-0.95	0.125	0.129	0.094	0.258
2	-0.9	0.234	0.269	0.189	0.448
3	-0.85	0.33	0.363	0.269	0.589
4	-0.8	0.414	0.471	0.336	0.693
5	-0.75	0.487	0.543	0.406	0.77
6	-0.7	0.551	0.626	0.462	0.827
7	-0.65	0.607	0.68	0.517	0.87
8	-0.6	0.656	0.743	0.571	0.901
9	-0.55	0.699	0.782	0.614	0.924
10	-0.5	0.737	0.828	0.659	0.942
11	-0.45	0.769	0.857	0.696	0.955
12	-0.4	0.798	0.889	0.726	0.964
13	-0.35	0.823	0.909	0.756	0.971
14	-0.3	0.846	0.931	0.785	0.977
15	-0.25	0.865	0.946	0.81	...

$x := W^{(0)}$   
 $u_{Lel} := W^{(1)}$   
 $u_{BS} := W^{(2)}$   
 $u_R := W^{(3)}$   
 $u_{Lin} := W^{(4)}$

$R := 1$   
 $T := 1$   
 $\sigma := 0.2$   
 $K := 100$   
 $S := K \cdot e^x$

$V_{Lel} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{Lel}^T)$   
 $V_{BS} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{BS}^T)$   
 $V_R := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_R^T)$   
 $V_{Lin} := \text{diag}(K \cdot e^x \cdot u_{Lin}^T)$