6. Шестая лекция, 21 мая 2013 г.

6.1. **Расширения полей.** Это важный пример, показывающий, как тензорное произведение встречается "в реальной жизни". Пусть $L \supset K$ — поле, содержащее основное поле K в качестве подполя (например, $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$). В частности, L является векторным пространством над K. Пусть V — какое-то еще векторное пространство над K. Рассмотрим тензорное произведение

$$V(L) = L \otimes_K V.$$

Это векторное пространство над K, но его несложно превратить в векторное пространство над L; для этого определим в $V(L)$ умножение на элементы из L так:

$$\lambda(\mu \otimes v) = \lambda\mu \otimes v.$$

Можно считать, что V вкладывается в $V(L)$ как векторное пространство над K: при вложении $v \mapsto 1 \otimes v$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис V как векторного пространства над K, то векторы $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n$ будут образовывать базис $V(L)$ *как векторного пространства над* L. В частности, $\dim_K V = \dim_L V(L)$. Таким образом, про $V(L)$ можно думать как про V, в котором мы разрешили умножать на скаляры из L, а не только из K.

Обратно, $V(L)$ можно рассматривать как векторное пространство над K размерности $\dim_K V \cdot \dim_K L$, базис в котором образован элементами вида $\theta_i \otimes e_j$. Здесь $\theta_1, \ldots, \theta_d$ — базис L как векторного пространства над K.

Например, в случае $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ мы получаем утверждение о том, что всякий вектор из $V(\mathbb{C})$ представи́м в виде $v + iw$, где $v, w \in V$. В этом случае пространство $V(\mathbb{C})$ называется *комплексификацией* пространства V.

6.2. **Свойства тензорного произведения.**

Предложение 6.1. *Имеют место следующие канонические (т.е. не зависящие от выбора базисов) изоморфизмы:*

(1) $V \otimes W \cong W \otimes V$;
(2) $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$;
(3) $V \otimes (W \oplus U) \cong V \otimes W \oplus V \otimes U$.

Упражнение 6.2. Докажите это предложение.

Из этого предложения, в частности, следует, что можно говорить о $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, не заботясь о порядке расстановки скобок.

Упражнение 6.3. Дайте определение тензорного произведения нескольких пространств, аналогичное 5.6, и докажите, что полученное пространство изоморфно $(\ldots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots \otimes V_k)$.

Для тензорного произведения k пространств верны (с очевидными модификациями) все те факты, которые мы доказывали в прошлой лекции для тензорного произведения двух пространств. Так, имеется изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k; W) \cong \mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_k; W),$$

определяемый по правилу

$$F(v_1 \otimes v_k) := \varphi(v_1, \ldots, v_k).$$

Определение 6.4. Элементы вида $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ называются *разложимыми.*

Замечание 6.5. Сумма разложимых элементов, вообще говоря, НЕ БУДЕТ разложимым элементом. Множество разложимых элементов НЕ образует векторное подпространство в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, хотя и порождает его линейно.

6.3. **Отображение Сегре.** Рассмотрим k-линейное отображение

$$V_1 \times \cdots \times V_k \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, \qquad (v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k.$$

Если умножить каждый из v_i на некоторый скаляр λ_i, то соответствующий элемент тензорного произведения умножится на $\lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_k$, т.е. будет пропорционален $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$. Поэтому имеет место отображение произведения *проективизаций* пространств V_i в проективизацию тензорного произведения:

$$\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \to \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k).$$

Это отображение называется *вложением Сегре.*

Упражнение 6.6. Докажите, что это действительно вложение.

Рассмотрим более подробно случай двух пространств; для удобства введем обозначения $V_1 = U^*$, а $V_2 = V$. Тогда $U^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}(U, V)$ (именно для этого отождествления нам и понадобилось сопряжение). Пусть $\dim U^* = m + 1$, $\dim V = n + 1$, а на проективизациях этих пространств имеются однородные координаты $(\xi_0 : \cdots : \xi_m)$ и $(y_0 : \cdots : y_n)$ соответственно. Тогда имеется отображение

$$\sigma\colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}U^* \otimes \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U; V)) \cong \mathbb{P}^{mn+m+n},$$

заданное правилом

$$\sigma\colon (\alpha, v) \mapsto \alpha \otimes v.$$

Нетрудно записать это отображение в координатах:

$$\sigma\colon ((\xi_0 : \cdots : \xi_m), (y_0 : \cdots : y_n)) \mapsto (\cdots : \xi_i y_j : \ldots).$$

Здесь мы считаем, что в $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ введены однородные координаты z_{ij}, занумерованные парами индексов (i, j), где $0 \leq i \leq m$, а $0 \leq j \leq n$.

Образ отображения σ можно задать и системой уравнений. Мы получили, что $\operatorname{Im}\sigma \subset \mathbb{P}(\operatorname{Hom}(U;V))$ будет состоять изо всех линейных отображений ранга 1. Отображение имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда в соответствующей ему матрице все миноры 2×2 равны нулю. Получаем, что $\operatorname{Im}\sigma$ задается однородными квадратичными уравнениями

$$z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = 0, \qquad 0 \le i,k \le m, \quad 0 \le j,l \le n.$$

Особенно приятно обстоит дело в случае $m = n = 2$: в этом случае мы получаем отображение

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3,$$

образ которого задается единственным уравнением $z_{00}z_{11} = z_{01}z_{10}$, то есть является квадрикой в $\mathbb{P}^3$. Слои над точками в каждом из $\mathbb{P}^1$, то есть множества $\{\alpha\} \times \mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^1 \times \{v\}$, при этом отображении переходят в два семейства прямолинейных образующих на квадрике.

Упражнение 6.7. Покажите, что $\operatorname{Im}\sigma$ не содержится ни в какой гиперплоскости. (Указание: этот факт уже неоднократно обсуждался в этой лекции).