

# Содержание

Перечень условных обозначений, символов и сокращений	3
Введение	4
<b>1 Математическое описание движения космического аппарата</b>	<b>7</b>
1.1 Законы Ньютона . . . . .	7
1.2 Ограниченная задача двух тел и Кеплеровы орбиты. . . . .	8
1.3 Ограниченная задача трех тел и точки либрации . . . . .	14
<b>2 Миссии к точкам либрации</b>	<b>17</b>
<b>3 Моделирование и оценка характеристик орбит Лиссажу во- круг точки либрации <math>L_2</math> системы Земля-Луна</b>	<b>20</b>
3.1 Постановка задачи . . . . .	20
3.2 Описание алгоритма . . . . .	22
3.3 Результаты расчетов . . . . .	25
<b>Заключение</b>	<b>44</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>46</b>

## Перечень условных обозначений, символов и сокращений

$L_1, L_2, L_3$	— коллинеарные точки либрации (на линии, проходящей через оба массивных тела), $L_1$ между телами системы (ближе к более массивному), $L_2$ снаружи, за менее массивным телом, и $L_3$ за более массивным телом;
$L_4, L_5$	— треугольные точки либрации;
$G$	— гравитационная постоянная;
$a$	— большая полуось орбиты;
$e$	— эксцентриситет орбиты;
$i$	— наклонение орбиты;
$M$	— средняя аномалия;
$E$	— эксцентрическая аномалия;
$f$	— истинная аномалия;
$P$	— период орбиты;
$n$	— среднее движение;
$\Omega$	— долгота восходящего узла;
$\omega$	— аргумент перицентра;
$\mu$	— параметр гравитации ( $\mu = G_m$ );
$A$	— перицентр;
$B$	— апоцентр;
$b$	— малая полуось орбиты;
$r_a$	— радиус апоцентра;
$r_b$	— радиус перицентра;
$x, y, z$	— картезианские координаты;
$\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$	— радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения;
$R_x, R_y, R_z$	— матрицы поворота вокруг осей $x, y, z$ соответственно;
$\Delta V$	— общее изменение скорости из-за маневра;
$\mathbf{F}$	— вектор силы;
$C_3$	— характеристическая энергия;
$\epsilon$	— полная энергия.

# Введение

Работа посвящена проблеме проектирования траекторий космических аппаратов для задач исследования Солнечной системы.

Наибольший интерес представляет проектирование миссий с использованием облета массивного тела для перемещения космического аппарата к астероидам, кометам и другим объектам Солнечной системы. Для реализации подобных задач используют движение по орбите вокруг одной из точек либрации, которые также называют точками Лагранжа.

Рассматривая системы Солнце-Земля или Земля-Луна, как системы, состоящие из двух массивных тел, соответственно, Солнце и Земля или Земля и Луна, космический аппарат, который можно принять за малое тело, будет оставаться неподвижным в точках Лагранжа, так как на него не будет действовать никакие сторонние силы со стороны массивных тел, кроме гравитационных. Можно считать, что массивные тела обращаются вокруг их общего центра масс с постоянной угловой скоростью. В таких системах существует пять точек, где гравитационные силы уравновешиваются центробежной силой, вследствие чего малое тело в одной из таких точек будет оставаться неподвижным во вращающейся системе координат. Рисунок 1 показывает набросок точек во вращающейся системе. С этой точки обзора,  $M_1$  и  $M_2$  находятся на горизонтальной линии, позиции точек либрации не двигаются.

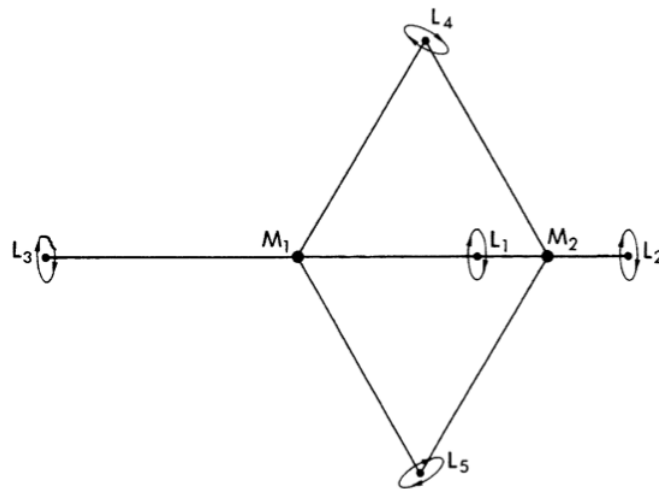


Рисунок 1 – Схематическое изображение периодических орбит вокруг точек либрации в системе из двух массивных тел  $M_1$  и  $M_2$

Миссии к точке либрации  $L_2$  в системе Земля-Луна могут быть интересны как и в качестве начального этапа для полета к удаленным объектам Солнечной системы, так и для исследования обратной стороны Луны. Точка либрации  $L_2$  является единственной точкой в системе Земля-Луна, которая располагается непосредственно за Луной при наблюдении с Земли. Размещение космического аппарата на орбите вокруг такой точки позволит осуществлять связь с другим аппаратом, который находится, например, на поверхности обратной стороны Луны, что было бы невозможно осуществить напрямую с Земли. Находясь на орбите вокруг точки либрации  $L_2$ , космический аппарат имеет возможность непрерывного наблюдения обратной стороны Луны. При этом, если амплитуда этой орбиты достаточно велика (больше диаметра Луны), то существует возможность одновременно наблюдать как обратную сторону Луны, так и планету Земля. Такая возможность может быть использована для осуществления связи между Землей и группой аппаратов, находящихся обратной стороны Луны.

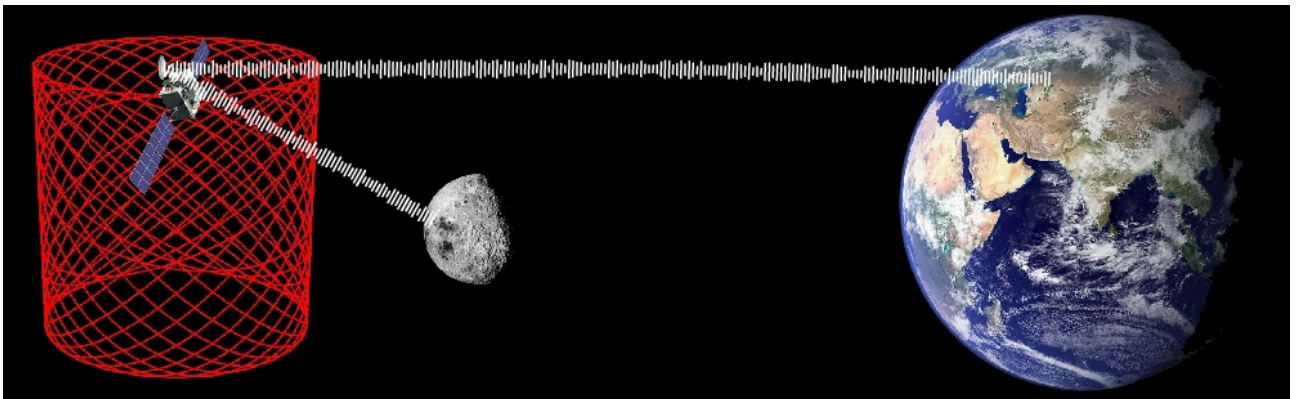


Рисунок 2 – Схематичное изображение траектории космического аппарата на орбите Лиссажу вблизи точки либрации  $L_2$  системы Земля-Луна

Известно два типа периодических орбит вокруг точек либрации, которые описывались в работах Хеклера [3]. Такие траектории хорошо изучены и были практически реализованы в миссиях.

Гало-орбиты обладают большой амплитудой и, находясь на них, аппарат никогда не скрывается за Луной при взгляде с Земли. Однако большая амплитуда вызывает дополнительные сложности, связанные с ориентацией аппарата для осуществления связи. С этой точки зрения наиболее удобным оказывается применение орбит Лиссажу, обладающих меньшей амплитудой.

Недостатком орбит Лиссажу является то, что аппарат на такой орбите может периодически скрываться за Луной при наблюдении с Земли. Подобная проблема была изложена в работе [2], в которой показано, что могут быть найдены участки траектории, обеспечивающие значительное время видимости аппарата. Кроме того, в этой работе были приведены аналитические формулы для оценки процентного соотношения времени видимости аппарата к общему времени пребывания на орбите. Однако при проектировании миссий более важной оказывается характеристика, описывающая время непрерывной видимости аппарата с Земли, а также оценка времени, в течение которого аппарат непрерывно скрыт за Луной.

Данная работа посвящена исследованию особенностей орбит космических аппаратов вокруг точек либрации и построению численных оценок характеристик видимости космического аппарата находящегося на орбите Лиссажу вокруг точки либрации  $L_2$  системы Земля-Луна для задач исследования обратной стороны Луны.

# 1 Математическое описание движения космического аппарата

Для задач проектирования миссий достаточно полагать, что все движения проходят согласно законам Ньютона без учета релятивистских эффектов. Это не означает, что релятивистскими эффектами можно пренебрегать всегда. В процессе перехода миссии с этапа проектирования на этап исполнения может возникнуть необходимость крайне точного расчета орбиты и, соответственно, возникнет необходимость учитывать и релятивистские эффекты.

## 1.1 Законы Ньютона

- Существуют такие системы отсчёта, относительно которых материальная точка при отсутствии внешних воздействий (или при их взаимной компенсации) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.
- В инерциальных системах отсчёта ускорение, приобретаемое материальной точкой, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки.
- Материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению.
- Закон всемирного тяготения Ньютона: Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками, пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F_{ab} = -G \frac{m_a m_b}{R_{ab}^2}. \quad (1.1)$$

## 1.2 Ограниченная задача двух тел и Кеплеровы орбиты.

Законы Кеплера обычно формулируются и применяются для планет Солнечной системы, но могут быть применены в общем случае движения объектов по орбите.

- Первый закон: Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
- Второй закон: Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.
- Третий закон: Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет.

Эллиптические орбиты описываются их собственной формой, размером и ориентацией относительно системы отсчета. Рисунок 1.1 показывает объект на эллиптической орбите.

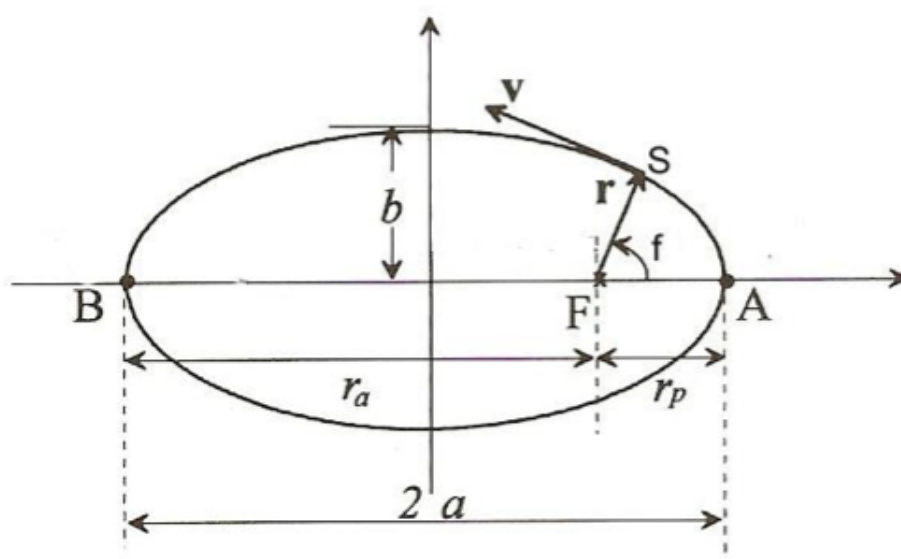


Рисунок 1.1 – Объект  $S$  вращается по эллиптической орбите вокруг объекта  $F$

Позиция космического аппарата на орбите (в координатах плоскости орбиты) определяется как

$$\mathbf{r} = (a \cos(f), a \sin(f), 0). \quad (1.2)$$

Согласно Третьему закону Кеплера, среднее движение  $n$  можно найти как

$$n = \left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

$\mu = Gm$  — параметр гравитации, где предполагается, что массой космического аппарата можно пренебречь.

$m$  — масса центрального тела,

$G$  — гравитационная постоянная,

$P = 2\pi/n$  — период орбиты,

Уравнение Кеплера показывает зависимость средней и эксцентрической аномалий — углом, используемым для описания движения аппарата по эллиптической орбите:

$$M = E - e \sin(E)$$

где  $M = n(t - t_0)$  — средняя аномалия,

$t_0$  — это время пролета перицентра,

$E$  — эксцентрическая аномалия.

Углы между  $f$  и  $E$  связаны уравнением Гаусса:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}E\right) = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}f\right). \quad (1.4)$$

Расстояние до фокуса:

$$r = a(1 - e \cos(E)) \Rightarrow r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(f)}. \quad (1.5)$$

Квадрат скорости (скаляр):

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \quad (1.6)$$

Полная энергия на единицу массы: сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}. \quad (1.7)$$



Уравнение полной энергии также известно как уравнение «живой силы» (“vis viva”).

$h$  — величина углового момента:

$$h^2 = a(1 - e^2). \quad (1.8)$$

Элементы орбиты в основном используются для описания орбиты, а вычисления практически всегда выполняются в картезианских координатах.

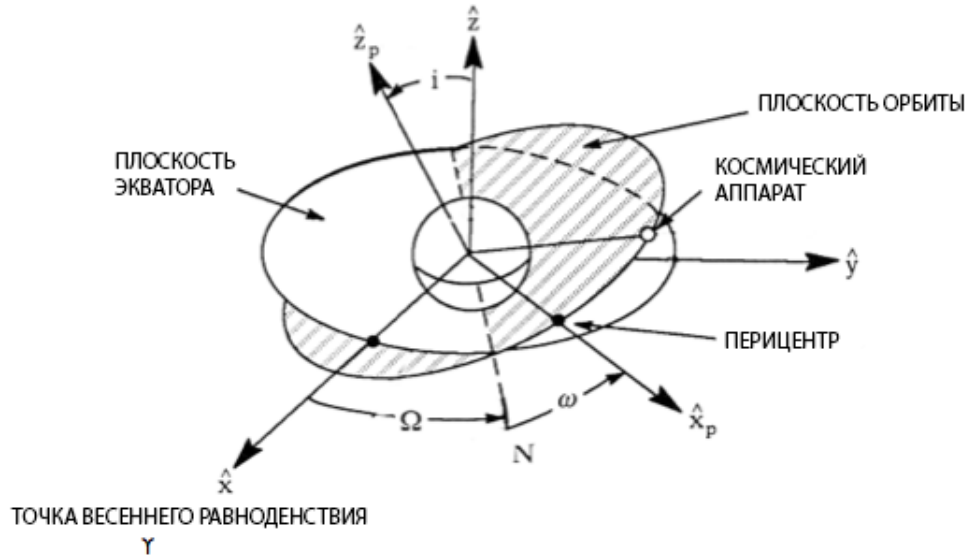
Орбиты траекторий, не связанных с телом (например, траектории «побега»), параболические ( $e = 1$ ) или гиперболические ( $e > 1$ ). Энергия параболических орбит равна нулю, а гиперболических — некоторому положительному числу, полагая, что большая полуось — отрицательна.

## Преобразования элементов орбиты

Для вычисления орбитальных элементов эллиптических орбит (вокруг Земли) в инерциальной картезианской системе координат в экваториальной земной системе отсчета, обратимся к рисунку 1.2.

Ориентация орбиты относительно экваториальной плоскости Земли показана на Рисунке 1.2. Полагают, что орбита любого космического аппарата вокруг Земли привязана к экваториальной плоскости. Гелиоцентрические орбиты обычно привязаны к экваториальной плоскости, параллельной орбите Земли.

В экваториальной системе отсчета одна из осей указывает на точку весеннего равноденствия, вторая указывает на север, проходя через ось вращения Земли, а третья лежит в экваториальной плоскости и образует с первыми двумя ортогональную систему. Вторая система отсчета, также инерциальная, учитывает только движение двух тел без помех. Одна из осей совпадает с линией восходящего узла, указывая на него, вторая — указывает в направлении положительного углового момента (вне орбитальной плоскости). Полагают, что ось  $x$  проходит вдоль восходящего узла, а ось  $z$  — вдоль углового момента. Ось  $y$  в орбитальной плоскости формирует ортогональную тройку.



$x_p, y_p, z_p$  — координаты плоскости орбиты,  $x_p$  проходит через перигеицентр,  $z_p$  перпендикулярно плоскости орбиты, через направление векторного произведения  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ,  $y_p$  дополняет систему по правилу правой руки.

$x, y, z$  — экваториальные инерциальные координаты, ось  $x$  — направление на точку весеннего равноденствия, ось  $z$  — направление на север через ось вращения Земли, ось  $y$  — ортогональна осям  $x$  и  $z$ .

Символ  $\Upsilon$  используется для обозначения весеннего равноденствия.

$i$  — наклонение орбиты, угол между осями  $z$  и  $z_p$ .

$\Omega$  — долгота восходящего узла, угол на экваториальной плоскости между осью  $x$  и линией восходящего узла.

$\omega$  — аргумент перигеицентра, угол на плоскости орбиты между линией восходящего узла и осью  $x_p$ .

Рисунок 1.2 – Ориентация орбиты

Положение и скорость космического аппарата характеризуются двумя векторами  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Приведенных ранее уравнений более чем достаточно, чтобы определить элементы. Выбор конкретного уравнения зависит от обстоятельств: что именно нужно найти и какая информация доступна.

Вектор углового момента:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (1.9)$$

Вектор эксцентриситета  $\mathbf{e}$ , совпадающий с большой осью в направлении перигеицентра, с величиной, равной эксцентриситету:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{|\mathbf{r}|}{r}, \quad e = (e \cdot e)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.10)$$

$$a = h \cdot \frac{h}{\mu(1 - e^2)} \quad (1.11)$$

$$n = \left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.12)$$

$$P = \frac{2\pi}{n} \quad (1.13)$$

$M$  — средняя аномалия. Эксцентрическая аномалия  $E$  может быть вычислена, если обратить выражение:

$$M = nT = E - e \sin(E) \quad (1.14)$$

$$r = (r \cdot r)^{\frac{1}{2}} = a(1 - e \cos(E)) \quad (1.15)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}f\right) = ((1 + e)(1 - e))^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}E\right) \quad (1.16)$$

$$e \cdot r = |e||R| \cos(f) \quad (1.17)$$

Если  $(h_x, h_y, h_z)$  — компоненты вектора  $h$  в экваториальной системе, то:

$$\operatorname{tg} \Omega = -h_x/h_y, \quad (1.18)$$

$$\cos i = h_z. \quad (1.19)$$

Единичный вектор (орт)  $i_n$ , проходящий через линию узлов, имеет следующие компоненты:  $(\cos(\Omega), -\sin(\Omega), 0)$ . Угол  $(\omega + f)$  — аргумент широты.

$$i_n \cdot e = |e| \cos(\omega) \quad (1.20)$$

$$i_n \cdot r = |r| \cos(\omega + f) \quad (1.21)$$

## Системы отсчета и преобразования

Преобразования координат производятся с помощью поворотов и сдвигов. Для сохранения ортогональности при переходе из одной системы в другую повороты осуществляются только вокруг одной из осей. Матрицы поворота можно перемножить, чтобы получить одну большую матрицу вместо многих маленьких.

До тех пор, пока существуют три оси в трехмерной ортогональной системе, есть три матрицы поворота:

$R_x(\alpha)$  — поворот вокруг оси  $x$ ,  $R_y(\alpha)$  — поворот вокруг оси  $y$ ,  $R_z(\alpha)$  — поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha$ .

Чтобы повернуть вектор в экваториальной системе координат в плоскость орбиты, необходимо:

$$r_0 = R_x(i)R_z(\Omega)r_e \quad (1.22)$$

Смена координат представляет интерес, когда проектируемая орбита удовлетворяет следующим условиям:

- экваториальная с центром — Земля, определяемая экватором Земли. Направление оси  $x$  указывает к точке весеннего равноденствия, направление оси  $z$  указывает на Север вдоль оси вращения, и направление оси  $y$  лежит в экваториальной плоскости, дополняя ортогональную систему. Точка весеннего равноденствия определяется как точка, через которую Солнце пересекает экватор, двигаясь с Севера на Юг.
- эклиптическая с центром — Земля, определяемая плоскостью орбиты Земли вокруг Солнца. Направление оси  $x$  указывает к точке весеннего равноденствия, направление оси  $z$  указывает на Север, совпадая с осью планетарного вращения (Север эклиптики), ось  $y$  лежит в плоскости эклиптики, дополняя ортогональную систему. Если выбрать Землю как точку обзора, Солнце движется по плоскости эклиптики.
- гелиоцентрическая (обычно — гелиоцентрическая эклиптическая). Центром системы отсчета является Солнце
- барицентрическая Земля-Луна, экваториальная или эклиптическая, с центром в барицентре Земля-Луна
- барицентрическая Солнечной системы, с центром в центре масс всех тел Солнечной системы
- планетоцентрическая или луноцентрическая, координатная система с центром в центре масс планеты или спутника

- либрационные координаты, неинерциальная система с центром в одной из точек либрации

Ни эклиптическая, ни экваториальная плоскости на самом деле не зафиксированы в космосе. Определения и преобразования систем обеспечиваются международными соглашениями, обновляющимися по мере уточнения измерений. Каплан (2005) детально описал системы, уравнения для их определения и граничные условия. Военно-морская обсерватория США и Лаборатория реактивного движения предоставляют программное обеспечение для вычислений высокой точности. Понимание определений системы важно для проектирования миссий, но высокая точность в преобразованиях не является необходимой для большинства приложений проектирования миссий.

Любой переход из геоцентрической системы в гелиоцентрическую, планетоцентрическую или луноцентрическую требует применения эфемерид о рассматриваемом объекте. Лаборатория реактивного движения предоставляет эфемериды в виде так называемых «эфемерид для разработчиков». Они обновляются по мере подтверждения данных. На Январь 2013 последний набор эфемерид — *DE424*, хотя для большей части задач проектирования достаточно легко доступного *DE405*.

Планетарные эфемериды доступны в системе JPL HORIZONS, а множество коммерчески доступных программных пакетов для расчета орбит предоставляют набор эфемерид «по-умолчанию» с возможностью обновления до последнего набора *DE*. JPL также предоставляет систему геометрической информации о космосе.

### 1.3 Ограниченная задача трех тел и точки либрации

В ограниченной задаче трех тел одна материальная точка без массы движется по орбите вокруг двух массивных материальных точек, движущихся друг вокруг друга по круговым орбитам. Интерес представляет движение материальной точки без массы. Это теоретическая проблема, так как, хотя космический аппарат может считаться не имеющим массу по сравнению с

массами Земли, Луны и Солнца, на его орбиту влияет неравномерное распределение массы массивных объектов, не-гравитационные силы (например, торможение), а также гравитационное притяжение со стороны других объектов Солнечной системы. Как бы то ни было, ограниченная задача трех тел имеет существенное значение, когда проектирование миссии достаточно близко приближено к актуальным задачам проектирования. Также немалым преимуществом является тот факт, что в качестве теоретического упражнения ограниченная задача трех тел изучалась астрономами в течении нескольких столетий. Описано множество семейств периодических орбит, большое внимание уделено энергетическим контурам, стабильности орбит, точкам либрации и так далее. Знаковой работой является «Теория орбит» В. Себехея (1967).

В конце 1950х Роберт Фаркуар начал исследовать использование точек либрации, пять равновесных позиций в ограниченной задаче трех тел для использования в проектировании миссий космического аппарата. Существование этих точек было впервые показано французским математиком Ж. Лагранжем в 1772 году. Несколькими годами ранее Эйлер независимо нашел коллинеарные точки либрации. В поле двух тел существует пять равновесных позиций. Три из них расположены на линии, соединяющей два массивных тела в ограниченной задаче, другие две образуют равносторонние треугольники с массивными телами. Третий объект (без массы) в ограниченной задаче будет в состоянии равновесия, если скорость будет равна нулю в координатной системе, обращающейся вокруг массивных тел.

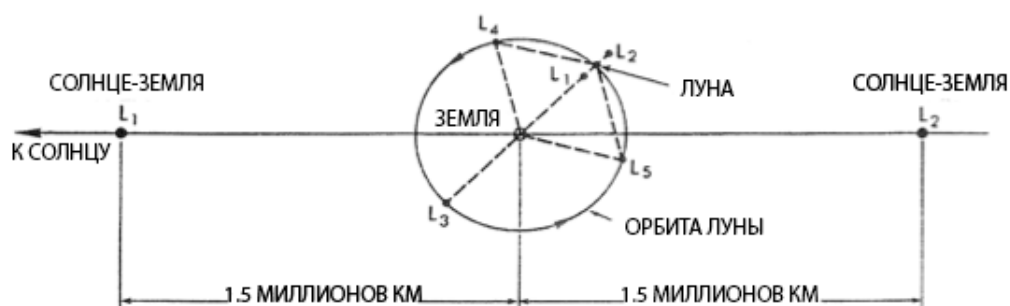


Рисунок 1.3 – Точки либрации в окрестности Земли

Точки либрации существуют во всех возможных системах из двух тел Солнечной системы. На Рисунке 1.3 показано схематическое изображение семи точек, расположенных относительно близко к Земле: пять принадлежат

системе Земля-Луна, две — Солнце-Земля. Расстояния для этих систем приведены в Таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Расстояния между точками  $L_1$  и  $L_2$  для систем Земля-Луна и Земля-Солнце.

Система	$L_1$ , км	$L_2$ , км
Солнце-Земля	1,491,600	1,501,500
Земля-Луна	58,019	64,515

Коллинеарные точки либрации являются неустойчивыми, в то время как экваториальные точки устойчивы в ограниченной задаче трех тел, но при наличии других возмущений даже так называемые устойчивые точки становятся только квазистабильными. Космическим аппаратам, размещенным в любой из таких точек, потребуется некоторая форма контроля орбиты, чтобы оставаться в этих точках. Малые периодические орбиты существуют вблизи каждой точки либрации системы двух массивных тел Земля-Луна. Приблизительные периоды таких орбит различны для каждой точки либрации. Так для точек  $L_1$  и  $L_2$  в системе Земля-Луна период малой орбиты около 2 недель, в то время как для точки  $L_3$  период будет составлять один месяц, а для точек  $L_4$  и  $L_5$  той же системы около 3 месяцев. Стоит обратить внимание на то, что орбитальные периоды для точек  $L_1$  и  $L_2$  примерно равны половине лунного орбитального периода. Это весьма обоснованная оценка для периодов орбит вокруг точек  $L_1$  и  $L_2$  в любой системе двух тел. Например, для точек  $L_1$  и  $L_2$  системы Солнце-Земля орбитальный период будет составлять примерно шесть месяцев.

## 2 Миссии к точкам либрации

Внимание к точкам либрации при разработке космических миссий было впервые обращено в 1950 году. Артуром С.Кларком была предложена идея использования точки  $L_2$  системы Земля-Луна для помещения в неё ретранслятора радио- и телесигналов, который сможет обеспечивать связь между Землей и колониями, расположенными на обратной стороне Луны [6], [7]. В 1966 году Роберт Фаркуар обратил внимание на то, что при расположении космического аппарата непосредственно в точке либрации  $L_2$ , он будет скрыт Луной при наблюдении с Земли, что не позволит осуществлять с ним связь. Для решения этой проблемы он предложил поместить аппарат на орбиту Лиссажу вокруг Лунной  $L_2$ , которая обеспечит почти постоянную видимость с Земли. В 1973 году Фаркуаром и Кэмелом было обнаружено, что увеличение амплитуды осцилляций в орбитальной плоскости до 32,379 км приводит к возможности образования «естественных» гало-орбит, обладающих согласованными периодами колебаний в орбитальной плоскости и вне её [8].

Первое практическое использование точек либрации было осуществлено в рамках «Международной программы по исследованию Солнца-Земли» ISEE (International Sun/EarthExplorer) [9]. В 1972 году было принято решение включить в эту программу запуск и размещение космического аппарата в окрестности точки либрации  $L_1$  системы Земля-Солнце для изучения солнечного ветра. Первоначально предполагалось разместить аппарат на орбите Лиссажу, но впоследствии эта идея была заменена идеей размещения аппарата на гало-орбите. Миссия была успешно осуществлена в 1978 году. Космический аппарат ISEE-3 был размещен вблизи точки либрации  $L_1$  системы Солнце-Земля. Поскольку миссия к точке либрации осуществлялась впервые, аппарат был снабжен значительным количеством топлива (89кг) на случай, обеспечившим запас скорости  $\Delta v$  около 430м/с [5].

Эта мера предосторожности была принята из опасений по поводу того, что затраты по удержанию аппарата на гало-орбите окажутся больше прогнозируемых. Опасения не оправдались, что позволило использовать аппарат повторно и направить его в окрестность Земли для изучения геомагнитного хвоста в рамках миссии «Происхождение плазмы в окрестности Земли» OPEN, которое впоследствии выделилось в «Международную программу



солнечно-земной физики» ISTR. Траектория аппарата была спроектирована Робертом Фаркуаром [11] и включала впервые примененный прием двойного облета Луны для синхронизации оси орбиты с направлением Солнце-Земля. После завершения миссии тот же самый аппарат был отправлен к комете Джакобини-Циннера [8], [12]. После этого полета аппарат был переименован в «Международный исследователь коме» ICE (International Cometary Explorer). В 2014 году аппарат ICE пройдет около Земли и несколько малых маневров могут снова перевести его на околоземную орбиту, возможно, даже с возвращением его на орбиту точки либрации [13].

В конце 1980-х годов велись исследования возможностей применения точки  $L_2$  системы Земля-Солнце для астрономических целей [14]. О создании российского спутника «Реликт-2», который планировалось направить в окрестность этой точки было заявлено в 1990 году. Траектория Реликт-2 была спроектирована и опубликована [15], однако запуск не состоялся из-за финансовых трудностей.

Следующей реализованной миссией с выходом на гало-орбиту вблизи точки либрации  $L_1$  была совместная миссия NASA и ESA под названием SOHO (Solar and Heliospheric Observatory). Она была запущена в 1995 году и предназначалась для наблюдения за Солнцем и его активностью. С помощью аппарата SOHO было открыто большое количество окосолнечных комет, а также получены данные о состоянии солнечной атмосферы, глубинных слоях Солнца, солнечном ветре и об активности солнечной короны. Орбита SOHO была периодической гало-орбитой с  $Z$ -амплитудой 120000 км, копирующей орбиту ISEE-3 [5], [16], [17]. Связь с аппаратом была потеряна через 6 недель после запуска из-за неудачного маневра, который временно вывел станцию из строя, однако миссия была возобновлена, несмотря на тяжелейшие условия и потерю всех гироскопов станции [18].

Также международные космические организации планируют запустить несколько крупных проектов с выходом на гало-орбиту точек либрации системы Солнце-Земля, таких, как JWST (James Webb Space Telescope) около точки  $L_2$  в 2018 году и LISA Pathfinder около точки  $L_1$  в 2015 году.

Первой миссией с использованием такой орбиты Лиссажу была миссия ACE (Advanced Composition Explorer), запущенная организацией NASA в 1997 году к точке либрации  $L_1$  системы Солнце-Земля. Целью ACE являлось

изучение энергетических частиц солнечного ветра, галактической материи, а также межпланетной и межзвездной среды [5], [19], [20].

Четвертая миссия к точке либрации была осуществлена аппаратом космической физики WIND, запущенным 1 ноября 1994 года. Аппарат дважды облетел вокруг точки  $L_1$  системы Земля-Солнце: с февраля по июль 1995 года и с ноября 1997 по июнь 1998 [21], [22], [23], [24].

Следующей миссией с выходом на орбиту Лиссажу вблизи точки  $L_2$  системы Солнце-Земля была миссия WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) запущенная в 2012 году и направленная на изучение реликтового излучения, которое образовалось в результате Большого взрыва [20], [25].

Также в 2009 году организацией ESA была запущена миссия Herschel — первая космическая обсерватория, размещенная на гелиоцентрической орбите вблизи точки  $L_2$  системы Солнце-Земля с применением траектории Лиссажу, предназначенная для изучения инфракрасного излучения в космосе.

До настоящего времени не было осуществлено миссий с выходом на орбиту Лиссажу вблизи точек либрации системы Земля-Луна.

# 3 Моделирование и оценка характеристик орбит Лиссажу вокруг точки либрации $L_2$ системы Земля-Луна

## 3.1 Постановка задачи

Возможное использование точек либрации для обеспечения связи при исследовании обратной стороны Луны было впервые предложено Артуром С. Кларком еще в 1950 году [1]. Эта идея была развита Робертом Фаркуаром, который предложил два типа траекторий вокруг точки либрации  $L_2$ : орбиты Лиссажу и гало-орбиты [2]. Для миссий, направленных на изучение обратной стороны луны, траектории Лиссажу могут быть более удобны, так как обладают меньшей амплитудой, чем гало-орбиты.

Недостатком использования траектории Лиссажу по сравнению с гало-орбитами является возможность сокрытия космического аппарата за Луной при наблюдении с Земли. С этой точки зрения нужно оценивать следующие характеристики траектории:

- Максимальный период времени, в течение которого аппарат непрерывно скрыт за Луной —  $t_h$ ;
- Максимальный период времени, в течение которого аппарат виден с Земли —  $t_v$ ;
- Процентное отношение времени, в течение которого аппарат не виден с Земли, к общему времени полета —  $k$ .

По различным причинам, в частности, исходя из необходимости получать сигнал из различных точек с обратной стороны луны так долго, как это возможно, целесообразно использовать траекторию Лиссажу с относительно небольшой амплитудой, а не гало-орбиту, у которой минимум  $A_y$  составляет 46793 км. Целью исследования является подбор параметров траектории Лиссажу, при которых  $t_h$  и  $k$  минимальны, а  $t_v$  — максимально.

Для исследования максимального периода времени, в течение которого аппарат скрыт за Луной, будем использовать следующую упрощённую модель. Движение будем рассматривать в плоскости  $y - z$  с центром в точ-

ке  $L_2$  системы Земля-Луна. В этой плоскости зона затмения Земли является окружностью с радиусом [2]:

$$R_{\text{затм}} = ML_2(R_{\oplus} + R_{\odot}) + R_{\odot} = 3099 \text{ км}, \quad (3.1)$$

где  $ML_2 = 64573,62 \text{ км}$  — среднее значение расстояния от Луны до  $L_2$ ,  
 $R_{\odot} = 1738 \text{ км}$  — радиус Луны,  
 $R_{\oplus} = 6371 \text{ км}$  — радиус Земли.

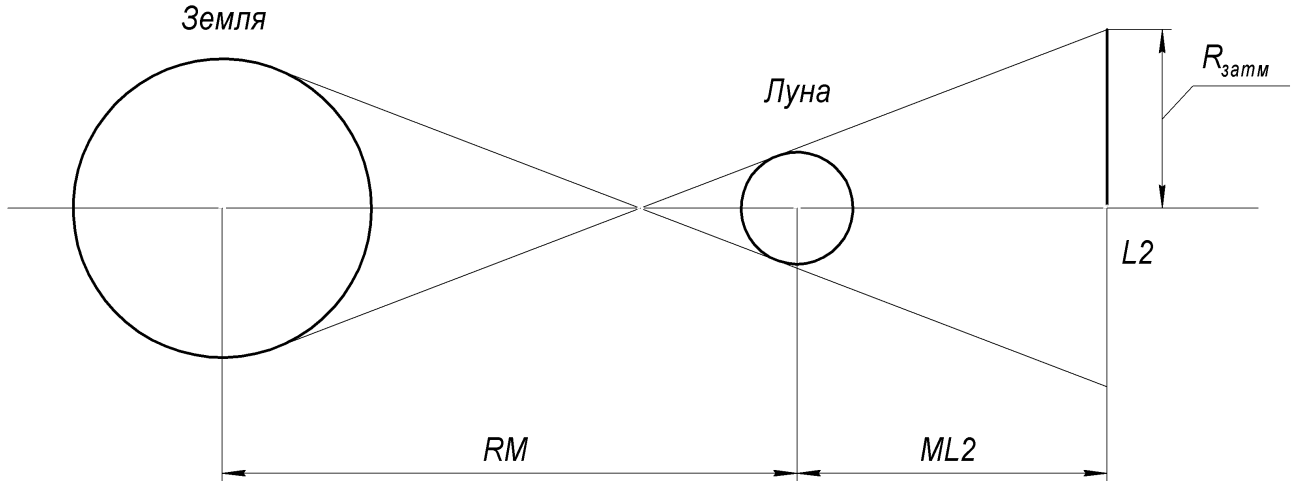


Рисунок 3.1 – Схематическое изображение расположения тел в системе Земля-Луна

Будем использовать линейные уравнения движения вокруг точки  $L_2$  системы Земля-Луна:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} - (2B_{L_2} + 1)x = 0 \\ \dot{y} + 2\dot{x} + (B_{L_2} - 1)y = 0 \\ \ddot{z} + B_{L_2}z = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $x, y, z$  — оси декартовой системы координат (ось  $x$  сонаправлена линии  $L_2$ -Луна, ось  $z$  направлена вертикально вверх).

$$B_{L_2} \approx \left[ \frac{(1 - \mu)}{(1 \mp \gamma_{L_2})^3} + \frac{\mu}{\gamma_{L_2}^3} \right], \quad (3.3)$$

где  $\mu = \frac{1}{(1+M_R)}$  — нормированный параметр массы ( $M_R$  представляет собой отношение массы Луны к массе Земли),

$\gamma_{L_2}$  — расстояние от Земли до Луны,

$B_{L_2} = 3,19042$  [3].

Решение данной системы можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_n = kA_y \sin(\omega_y t + \varphi_y) \\ y_n = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \\ z_n = A_z \sin(\omega_z t + \varphi_z), \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $A_y$ ,  $A_z$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  — значения амплитуд и фаз по осям  $y$  и  $z$  соответственно,

$t$  — время,

$\omega = 2\pi/T$ ,

$T_y = 14,65$  дн.,

$T_z = 15,23$  дн.

В нашем случае, так как рассматривается только движение в плоскости  $y - z$ , направление по  $x$  можно исключить. Данная траектория будет повторяться через период времени, эквивалентный 101 периоду по оси  $z$  и 105 периодам по оси  $y$ , что составляет порядка 1538 дней. Расчеты осуществлялись для периода 384 дней пребывания спутника на орбите.

### 3.2 Описание алгоритма

Для описания алгоритма расчета характеристик  $t_v$ ,  $t_h$ , и  $k$  построим функцию видимости аппарата  $V(t, \varphi_x, \varphi_y)$ , которая будет равна 1 в случае если аппарат, находящийся на траектории, отвечающий начальным фазам  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  виден в момент времени  $t$ , и  $-1$  — если скрыт за Луной при наблюдении с Земли. Эту функцию можно записать в следующем виде:

$$V(t, \varphi_y, \varphi_z) = \begin{cases} 1, \text{ если } (y^2(t) + z^2(t)) < R^2 \\ -1, \text{ если } (y^2(t) + z^2(t)) \geq R^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Для вычисления искомых характеристик использовался следующий алгоритм:

1. Выбор начального шага  $\Delta_t$  в начальный момент времени  $t = 0$ ;
2. Увеличение текущего времени  $t$  на шаг  $\Delta_t$  до тех пор, пока  $v_t(v_t + \Delta_t) > 0$ ;

3. Методом деления отрезка пополам определяем с заданной точностью  $\epsilon$  момент разрыва функции  $V$ . Время между двумя разрывами функции  $V$  является временем затмения  $t_h$ , в случае если функция  $V$  была между разрывами отрицательной, или между временем непрерывной видимости аппарата в противном случае.

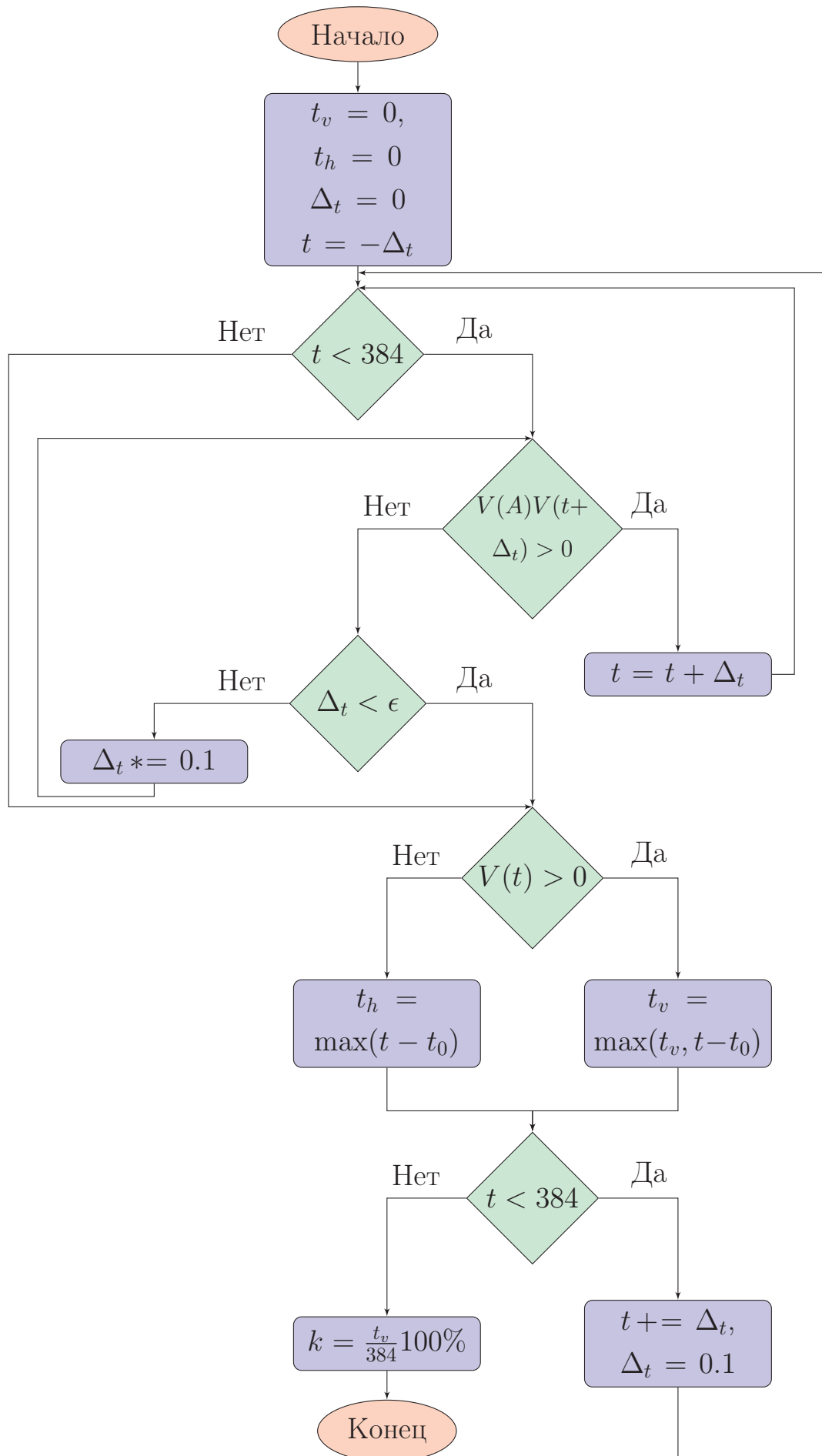


Рисунок 3.2 – Детальная блок-схема вычисления характеристик видимости аппарата

### 3.3 Результаты расчетов

Пусть закон движения аппарата определяется формулами (3.4), тогда в момент времени  $t = 0$  начальное положение и скорость аппарата полностью определяются значениями фаз  $\varphi_y, \varphi_z$  и значениями амплитуд  $A_y, A_z$ . В данной главе представлены результаты анализа зависимости характеристик  $t_h, t_v$  и  $k$  от значений амплитуд, на основе которого возможно найти наилучшее с точки зрения обеспечения связи с аппаратом положение выхода на орбиту.

Оценка характера зависимости величин  $t_h, t_v$  и  $k$  от фаз  $\varphi_y, \varphi_z$  и амплитуд  $A_y, A_z$  производилась методом прямого перебора, при этом вычисление самих величин  $t_h, t_v$  и  $k$  осуществлялось по алгоритму, представленному в разделе 3.2.

Наиболее интересные траектории с точки зрения обеспечения связи аппарата с Землей должны обладать наименьшими значениями  $t_h$  и  $k$  и наибольшими значениями  $t_v$ . При этом максимальный период времени, в течении которого аппарат может быть виден с Земли, ( $t_v$ ) представляет наибольший интерес.

Все три искомые характеристики являются  $\pi$ -периодичными, поэтому имеет смысл исследовать их поведение лишь внутри квадрата  $(0, 0)(\pi, \pi)$ . Для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что если при фиксированных значениях  $(\varphi_y, \varphi_z, t)$  аппарат находится в тени, он будет находиться в тени и при значениях  $(\varphi_y + \pi, \varphi_z, t)$ ,  $(\varphi_y, \varphi_z + \pi, t)$  и  $(\varphi_y + \pi, \varphi_z + \pi, t)$ . Или другими словами:

$$V(t, \varphi_y, \varphi_z) = V(t, \varphi_y + \pi, \varphi_z) = V(t, \varphi_y, \varphi_z + \pi) = V(\varphi_y + \pi, \varphi_z + \pi, t), \quad (3.6)$$

где  $V$  определяется формулой (3.5). Согласно (3.4) имеем:

$$y(t, \varphi_y + \pi) = A_y \sin(\omega_y t + \omega_y + \pi) = -A_y \sin(\omega_y t + \omega_y) = -y(t, \varphi_y), \quad (3.7)$$

$$z(t, \varphi_z + \pi) = A_z \sin(\omega_z t + \omega_z + \pi) = -A_z \sin(\omega_z t + \omega_z) = -z(t, \varphi_z), \quad (3.8)$$

Откуда следует:

$$y^2(t, \varphi_y + \pi) = y^2(t, \varphi_y), \quad (3.9)$$

$$z^2(t, \varphi_z + \pi) = z^2(t, \varphi_z). \quad (3.10)$$



Из уравнений (3.9), (3.10) и (3.5) элементарно вытекает тождественное выражение (3.6).

На рисунках 3.3 – 3.8 представлены результаты расчетов для значений амплитуд  $A_y = A_z = 5000$  км, при изменении фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  от 0 до  $\pi$ . На рисунках 3.3-3.5 данные представлены в виде поверхностей. Те же данные представлены на рисунках 3.6-3.8 в форме цветовых распределений. Из приведенных диаграмм выявлено, что искомые характеристики сильно осциллируют с изменением одной из фаз, при этом одновременное изменение фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  не приводит к значительному изменению характеристик  $t_h$  и  $t_v$ . Анализ уравнений 2.4 показывает, что направление наименьшей изменчивости характеристик  $t_h$  и  $t_v$  определяется как:

$$\begin{cases} \varphi_y = \varphi_y^{\circ} + \tau\omega_y \\ \varphi_z = \varphi_z^{\circ} + \tau\omega_z \end{cases} \quad (3.11)$$

На рисунках 3.3 и 3.4 направление наименьшей изменчивости характеристик можно определить по полосам, проходящим из нижнего левого в верхний правый угол плоскости  $\varphi_y - \varphi_z$ . Поскольку в нашем случае значения  $\omega_y$  и  $\omega_z$  практически равны между собой, данные полосы проходят под углом близкому к  $45^\circ$ .

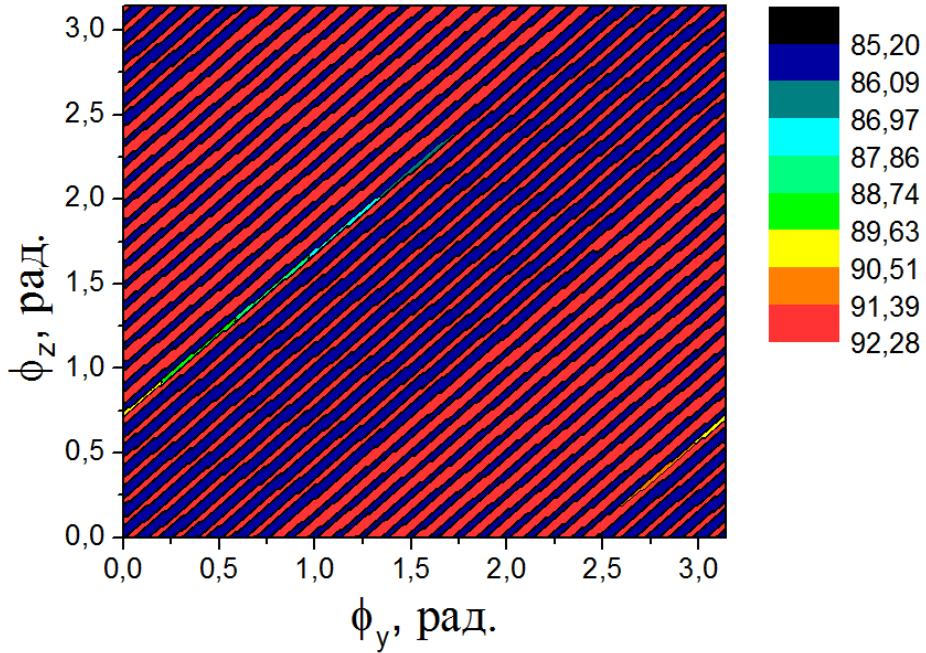


Рисунок 3.3 – Зависимость характеристики  $t_v$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = A_z = 5000$  км

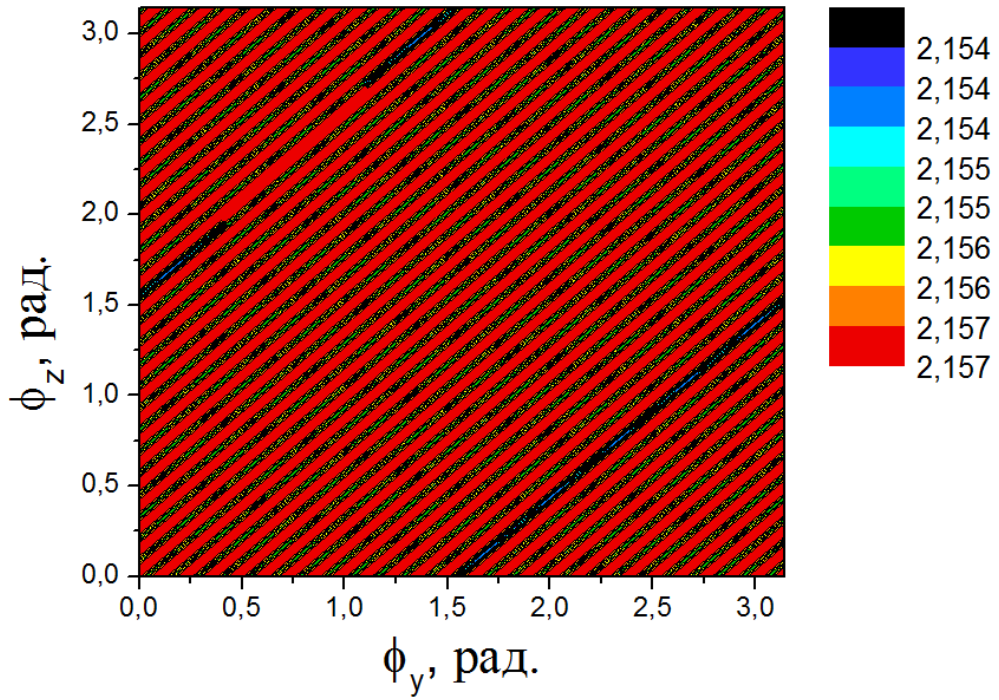


Рисунок 3.4 – Зависимость характеристики  $t_v$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при значениях амплитуд  $A_y = A_z = 5000$  км

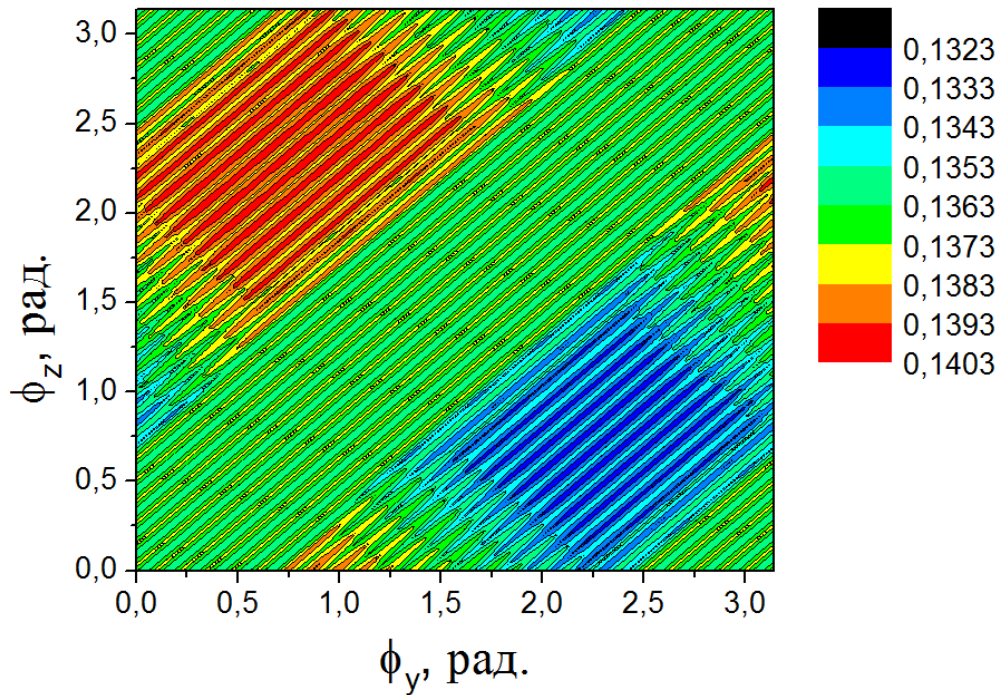


Рисунок 3.5 – Зависимость характеристики  $k$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при значениях амплитуд  $A_y = A_z = 5000$  км

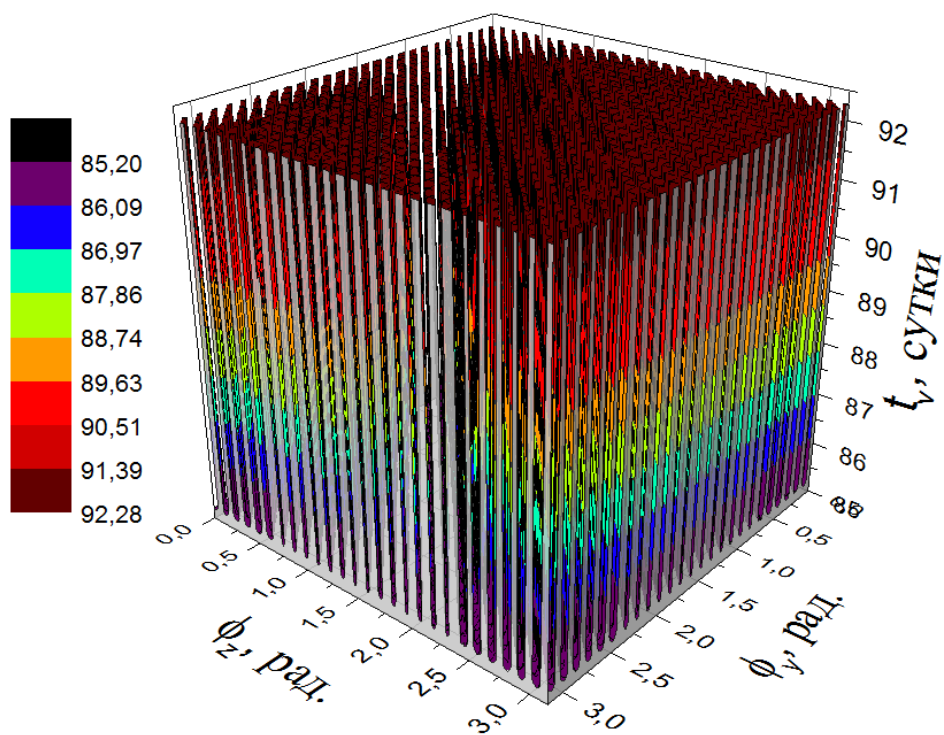


Рисунок 3.6 – Зависимость характеристики  $t_v$  в виде 3D-поверхности от начальных фаз траектории  $\phi_y$  и  $\phi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при значениях амплитуд  $A_y = A_z = 5000$  км

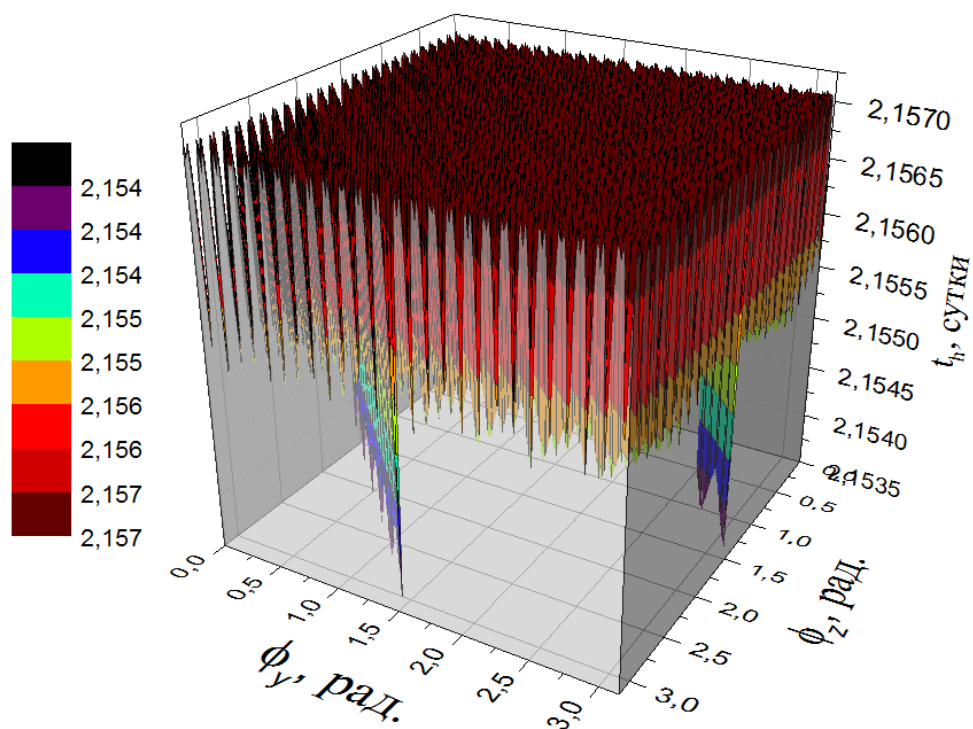


Рисунок 3.7 – Зависимость характеристики  $t_h$  в виде 3D-поверхности от начальных фаз траектории  $\phi_y$  и  $\phi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при значениях амплитуд  $A_y = A_z = 5000$  км

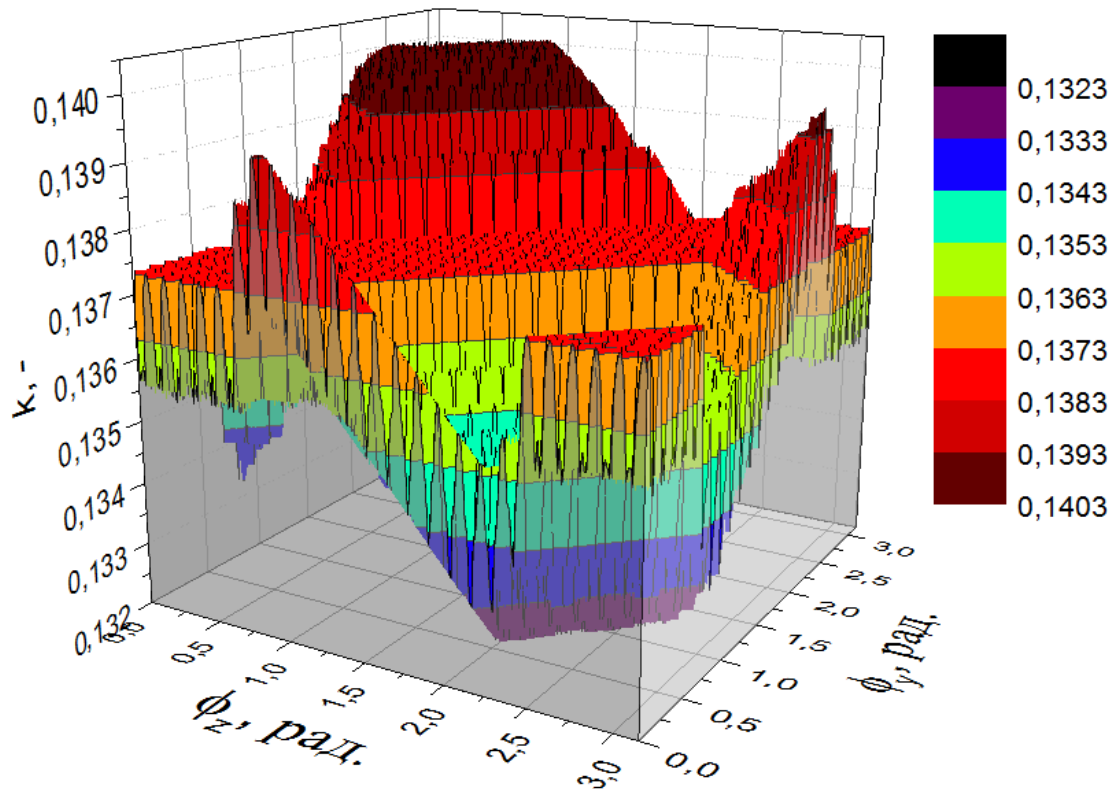


Рисунок 3.8 – Зависимость характеристики  $k$  в виде 3D-поверхности от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при значениях амплитуд  $A_y = A_z = 5000$  км

Поскольку при изменении фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  от  $0$  до  $\pi$  искомые характеристики сильно осциллируют, имеет смысл рассмотреть более детально меньший интервал изменения фаз для детального изучения. Для случая  $A_y = A_z = 5000$  рассмотрим участок  $(\varphi_y, \varphi_z)|_{1/5} \leq \varphi_y \leq 2; 0 \leq \varphi_z \leq 0.5$ . Этот участок представляет интерес, так как на нем одновременно достигаются минимум характеристики  $t_h$ , максимум  $t_v$  и минимум  $k$ . Результаты расчетов для данного участка в виде цветовых схем и объемных поверхностей представлены на рисунках 3.9-3.14.

На диаграммах можно увидеть, что для характеристики  $t_v$  (рисунок 3.9 и 3.10) существует две преобладающие области: в первой  $t_v$  принимает значения, близкие к 85,20, во второй — близкие к 92,28 дней. Структура этих областей дает представление о характере исследуемых функций  $t_v(\varphi_y, \varphi_z)$ ,  $t_h(\varphi_y, \varphi_z)$ ,  $k(\varphi_y, \varphi_z)$ , все они, как уже упоминалось прежде,  $\pi$ -периодичны.



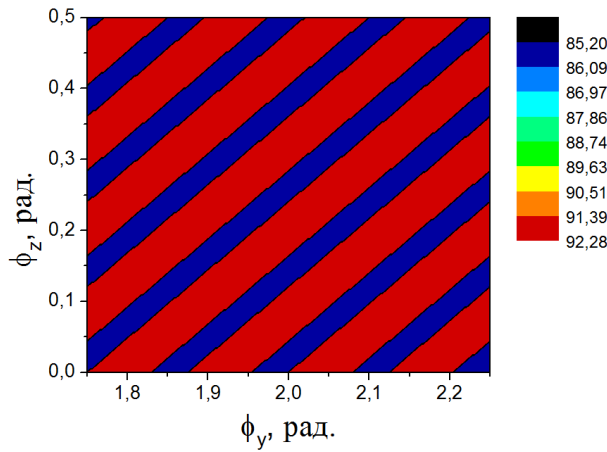


Рисунок 3.9 – Зависимость характеристики  $t_v$  от фаз при  $A_y = A_z = 5000$  км на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$

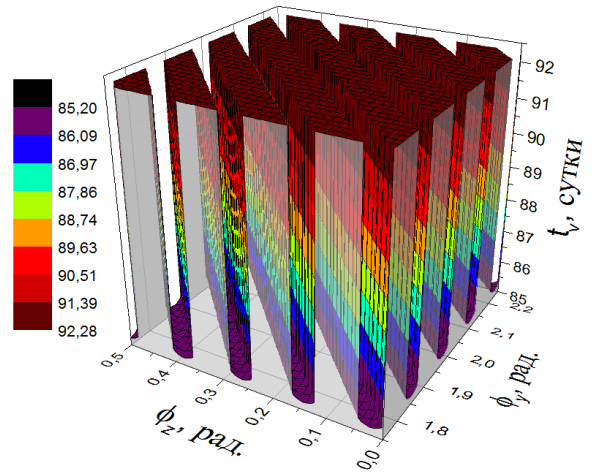


Рисунок 3.10 – Зависимость характеристики  $t_v$  от фаз в виде 3D-поверхности при  $A_y = A_z = 5000$  км на участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$

Схожая ситуация происходит и с характеристикой (рисунок 3.11 и рисунок 3.12), описывающей максимальный период времени, когда аппарат скрыт за Луной при наблюдении с Земли —  $t_h$ . На диаграмме можно увидеть периодичность и несколько минимумов, среди которых в данный диапазон значений попал один явный минимум, равный 2,154 дней.

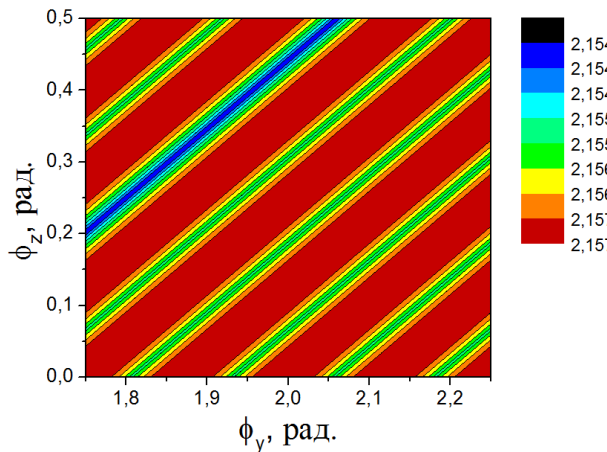


Рисунок 3.11 – Зависимость характеристики  $t_h$  от фаз при  $A_y = A_z = 5000$  км на участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$

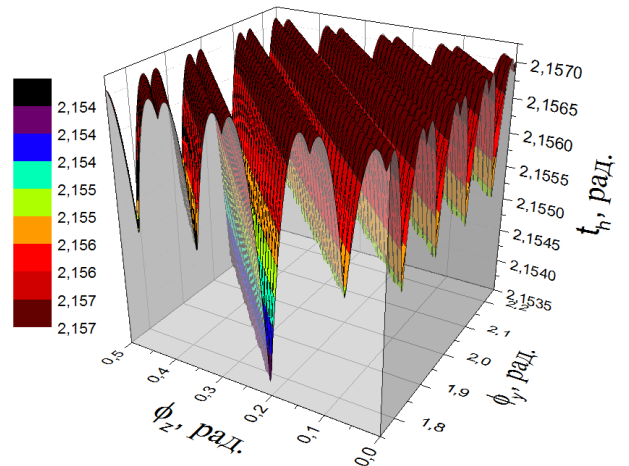


Рисунок 3.12 – Зависимость характеристики  $t_h$  в виде 3D-поверхности от фаз при  $A_y = A_z = 5000$  км на участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$

Зависимость характеристики  $k$  от фаз  $\varphi_y, \varphi_z$  проявляет сложный осциллирующий характер с множеством локальных минимумов (рисунок 3.13 и рисунок 3.14). При этом можно выделить две области: сосредоточение локальных максимумов при малых значениях  $\varphi_z$  и больших (близких к  $\pi$ ) значениях  $\varphi_y$ ; область локальных минимумов при больших значениях  $\varphi_z$  и малых значениях  $\varphi_y$ , в частности в области  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$ . Диаграмма 3.14 иллюстрирует поведение характеристики  $k$  на участке сосредоточения локальных минимумов.

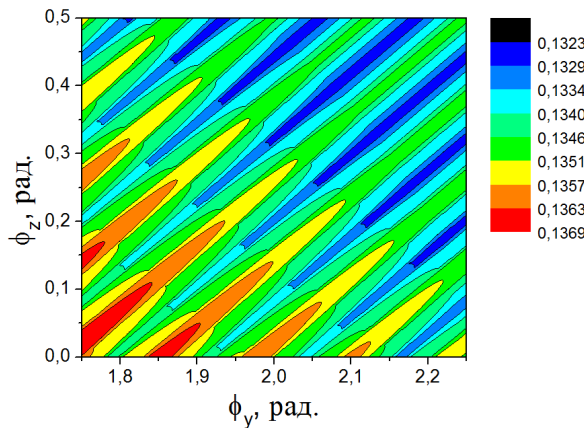


Рисунок 3.13 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от фаз на участке

$1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = A_z = 5000$  км

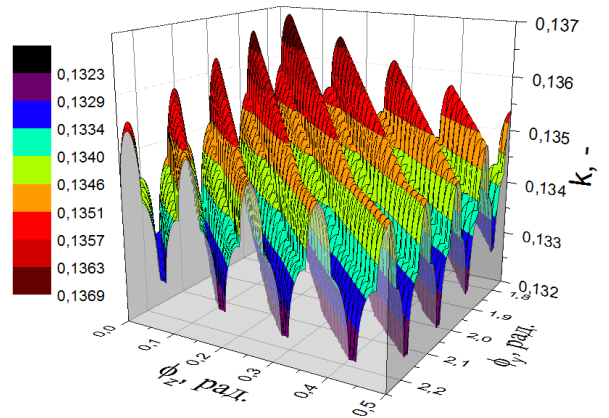


Рисунок 3.14 – Цветовая схема в виде 3D-поверхности, отображающая зависимость

характеристики  $k$  от фаз на  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = A_z = 5000$  км

Представленные результаты свидетельствуют о том, что выбор метода полного перебора при исследовании зависимости характеристик видимости аппарата весьма оправдан. Ни одна из исследуемых зависимостей рассматриваемых характеристик не имеет явного единственного минимума. Наилучшим значениям, как правило, отвечают множества значений  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$ .

На рисунках 3.15-3.38 представлены результаты расчетов для комбинаций амплитуд  $A_y = 5000$  км и  $A_z = 10000$  км,  $A_y = A_z = 10000$  км,  $A_y = 10000$  км и  $A_z = 15000$  км, а также для амплитуд  $A_y = A_z = 15000$  км. Результаты представлены как для интервалов фаз от 0 до  $\pi$ , так и для интервалов шириной 0.5 рад., представляющих наибольший интерес (где од-

новременно достигается минимум характеристик  $t_h$ ,  $k$  и максимум  $t_v$ ).

Диаграммы, иллюстрирующие поведение характеристик  $t_v$ ,  $t_h$  и  $k$  для амплитуд  $A_y = 5000$ ,  $A_z = 10000$  км:

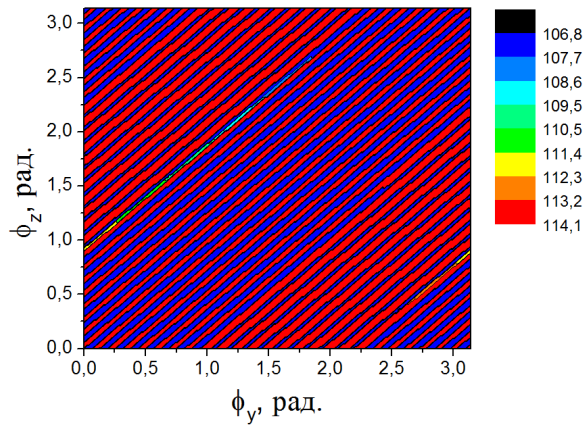


Рисунок 3.15 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от начальных фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при  $A_y = 5000$ ,  $A_z = 10000$  км

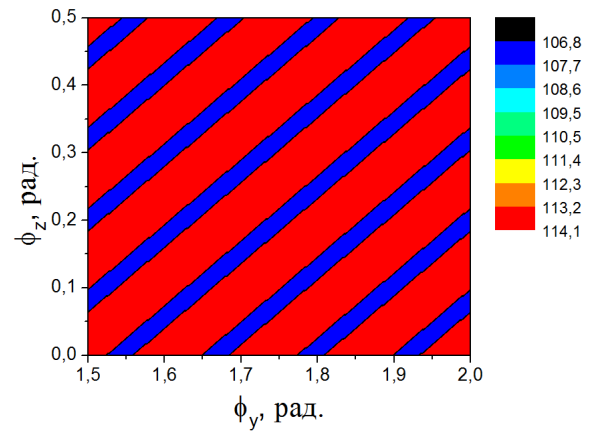


Рисунок 3.16 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 5000$ ,  $A_z = 10000$  км

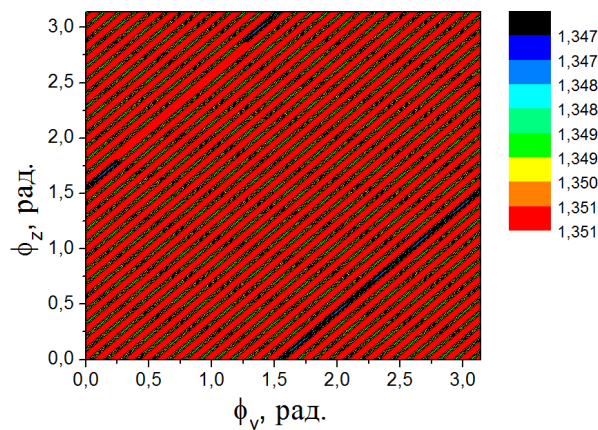


Рисунок 3.17 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от начальных фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при  $A_y = 5000$ ,  $A_z = 10000$  км

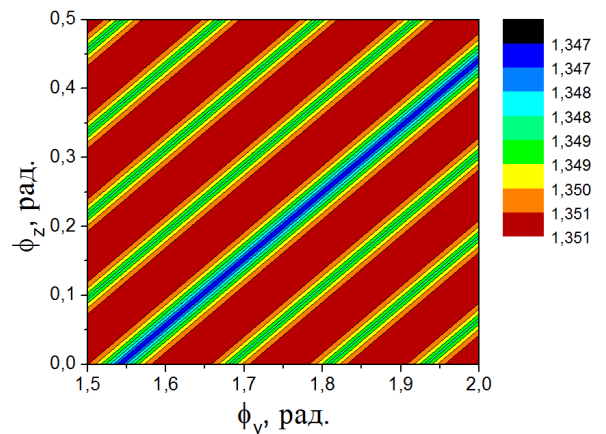


Рисунок 3.18 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 5000$ ,  $A_z = 10000$  км

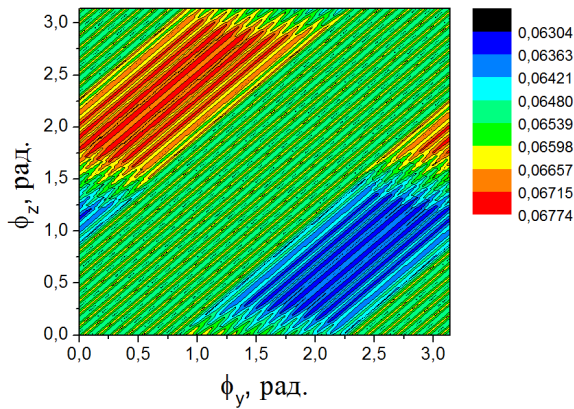


Рисунок 3.19 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 5000$ ,  $A_z = 10000$  км

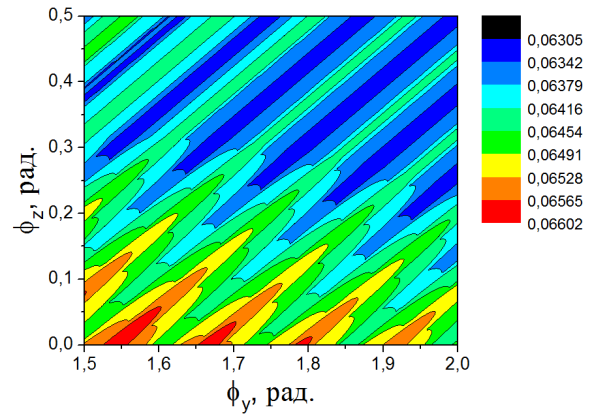


Рисунок 3.20 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 5000$ ,  $A_z = 10000$  км

Диаграммы, иллюстрирующие поведение характеристик  $t_v$ ,  $t_h$  и  $k$  для амплитуд  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 10000$  км:

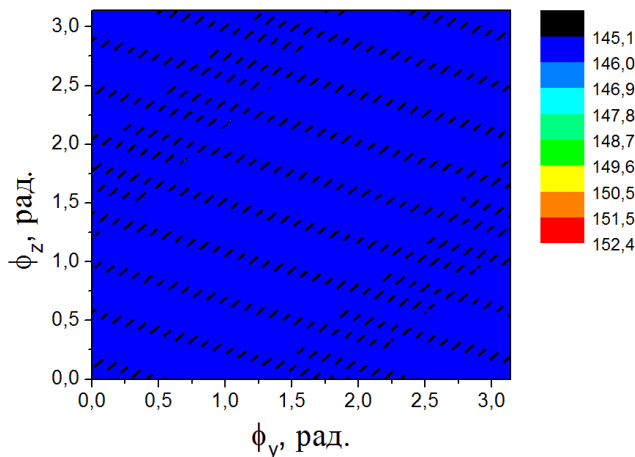


Рисунок 3.21 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 10000$  км

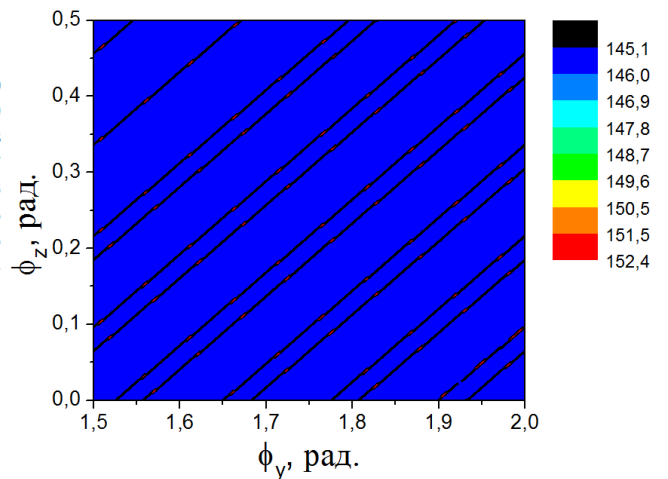


Рисунок 3.22 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 10000$  км



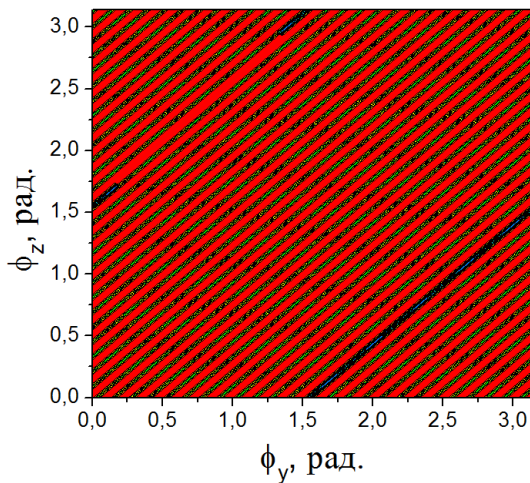


Рисунок 3.23 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 10000, A_z = 10000$  км

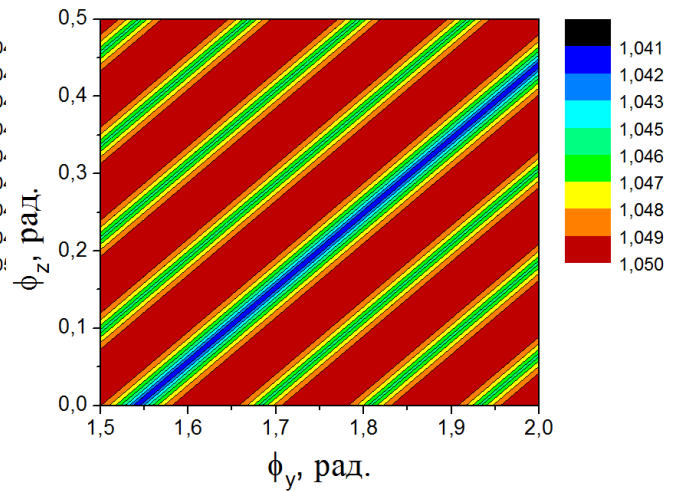


Рисунок 3.24 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 10000, A_z = 10000$  км

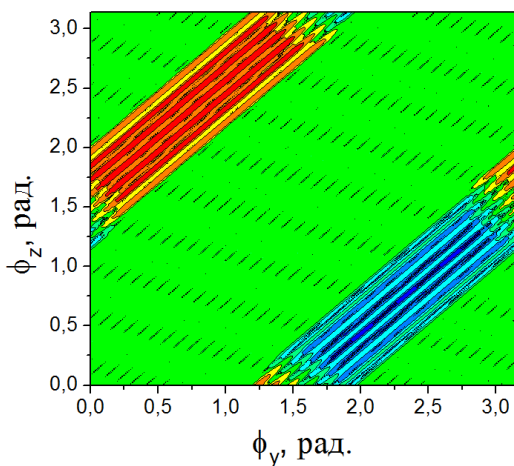


Рисунок 3.25 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от 0 до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 10000, A_z = 10000$  км

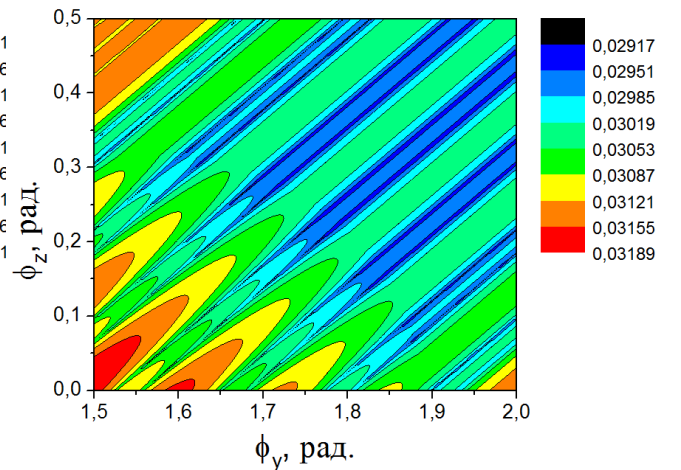


Рисунок 3.26 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25, 0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 10000, A_z = 10000$  км

Диаграммы, иллюстрирующие поведение характеристик  $t_v, t_h$  и  $k$  для амплитуд  $A_y = 10000, A_z = 15000$  км:

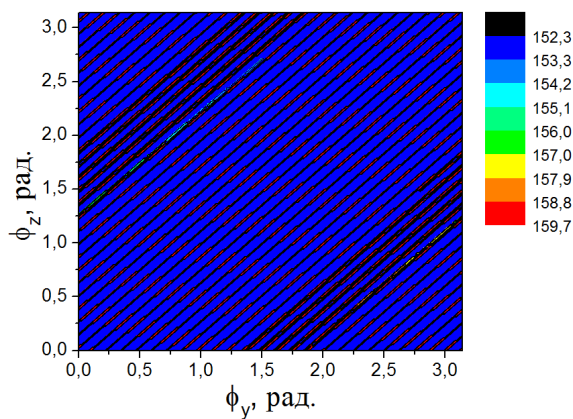


Рисунок 3.27 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 15000$  км

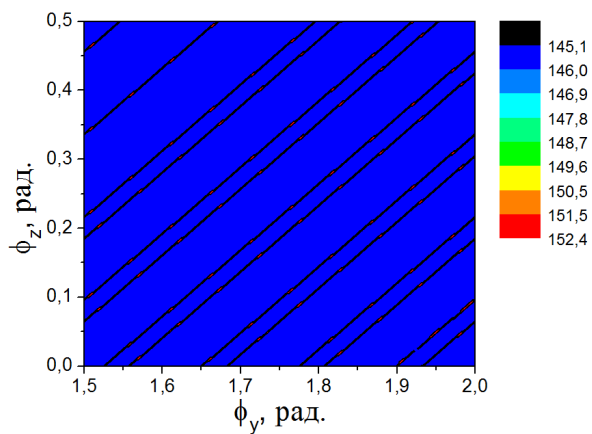


Рисунок 3.28 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 15000$  км

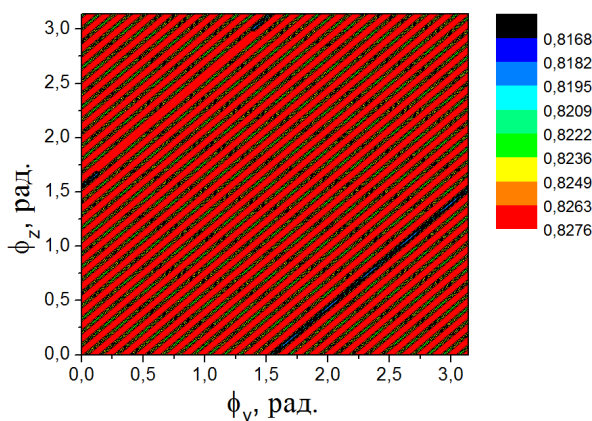


Рисунок 3.29 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 15000$  км

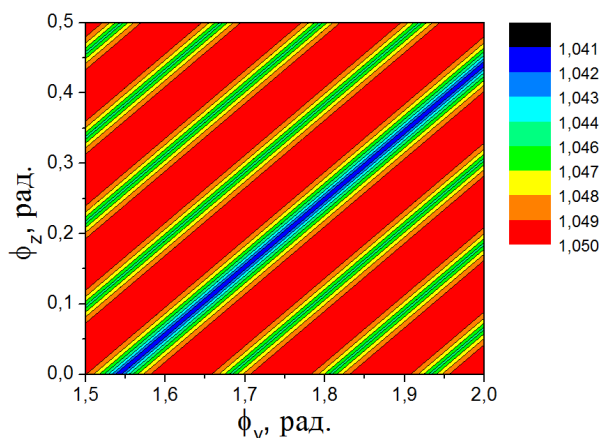


Рисунок 3.30 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 15000$  км

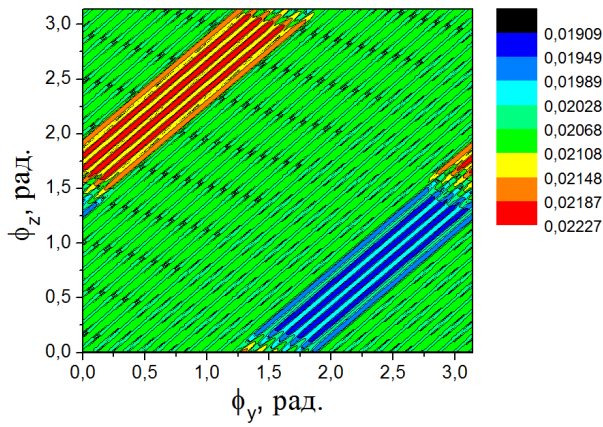


Рисунок 3.31 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 15000$  км

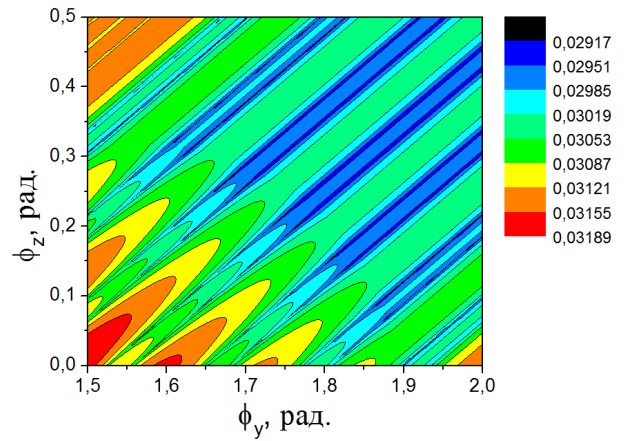


Рисунок 3.32 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 10000$ ,  $A_z = 15000$  км

Диаграммы, иллюстрирующие поведение характеристик  $t_v$ ,  $t_h$  и  $k$  для амплитуд  $A_y = 15000$ ,  $A_z = 15000$  км:

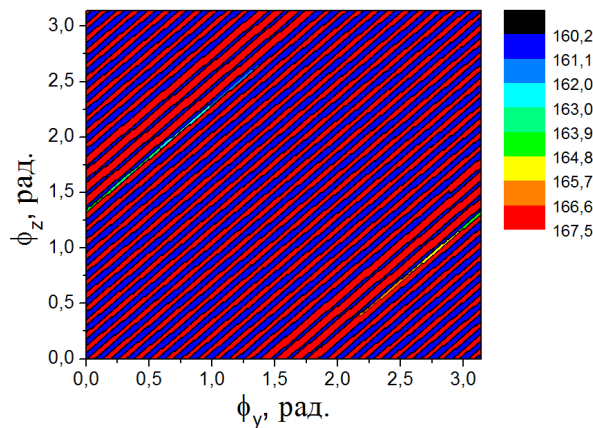


Рисунок 3.33 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 15000$ ,  $A_z = 15000$  км

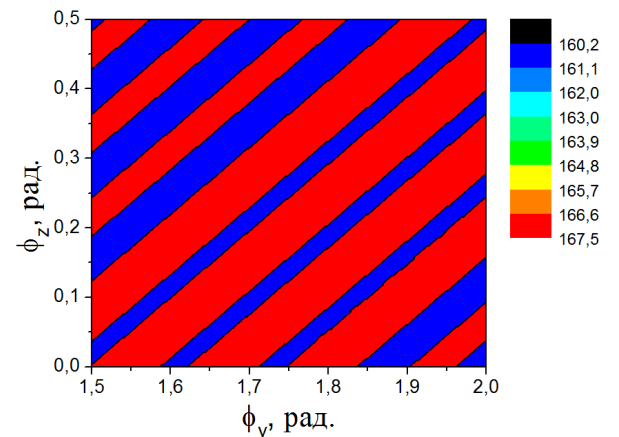


Рисунок 3.34 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_v$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 15000$ ,  $A_z = 15000$  км

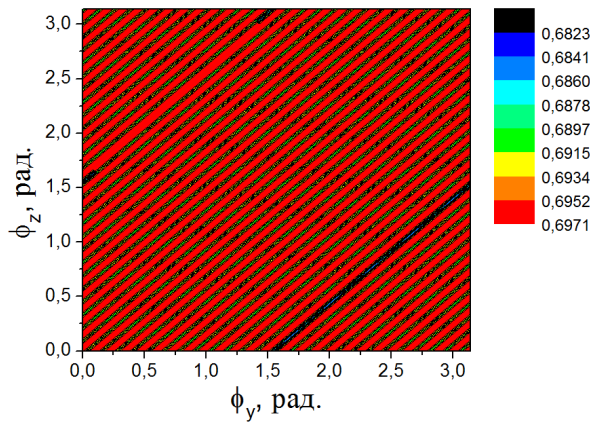


Рисунок 3.35 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 15000$ ,  $A_z = 15000$  км

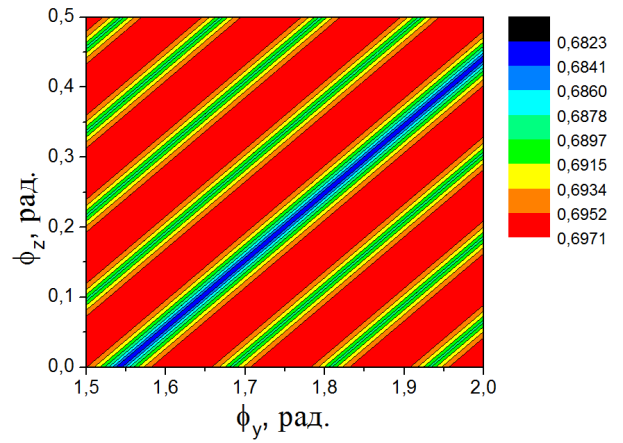


Рисунок 3.36 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $t_h$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 15000$ ,  $A_z = 15000$  км

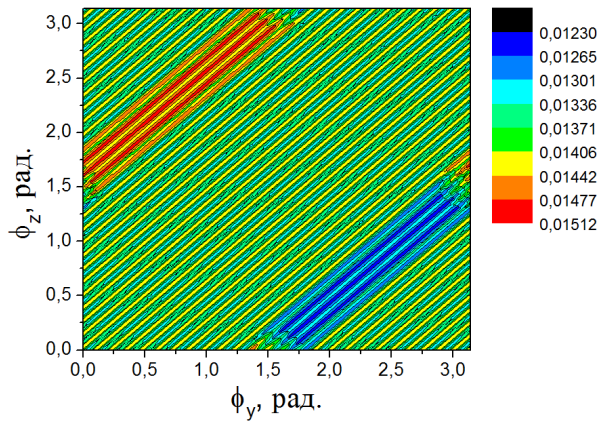


Рисунок 3.37 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от начальных фаз траектории  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  на участке от  $0$  до  $\pi$  при амплитудах  $A_y = 15000$ ,  $A_z = 15000$  км

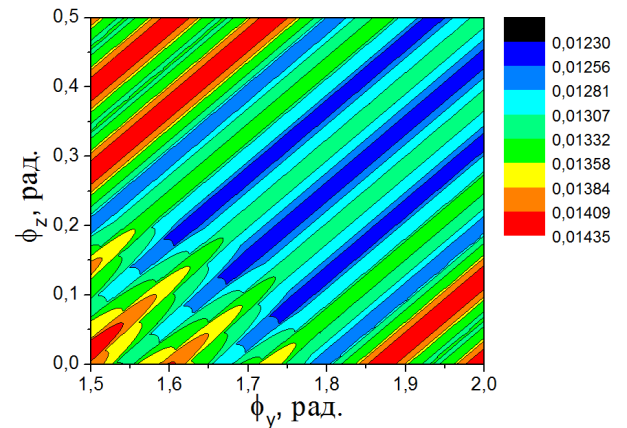


Рисунок 3.38 – Цветовая схема, отображающая зависимость характеристики  $k$  от фаз на рассматриваемом участке  $1.75 < \varphi_y < 2.25$ ,  $0 < \varphi_z < 0.5$  при  $A_y = 15000$ ,  $A_z = 15000$  км

Представленные на рисунках 3.2 — 3.36 результаты свидетельствуют о том, что распределение искомых величин носит схожий характер для различных комбинаций амплитуд  $A_y$  и  $A_z$ , при этом увеличение значения амплитуд ведет к улучшению характеристик, описывающих возможности связи с аппаратом, а именно: увеличению  $t_v$ , уменьшению  $t_h$ , уменьшению  $k$ .



Приведенные результаты позволяют выбрать интервалы значений для фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$ , в которых исследуемые характеристики достигают наилучших значений. При этом интересно проследить связь между скормыми характеристиками  $t_h$  и  $t_v$ , то есть ответить на вопрос: возможно ли оптимизировать траекторию по обеим этим характеристикам и найти точку  $\varphi = (\varphi_y, \varphi_z)$  такую, что в  $\varphi$  одновременно достигается максимум характеристики  $t_v$  и минимум характеристики  $t_h$ .

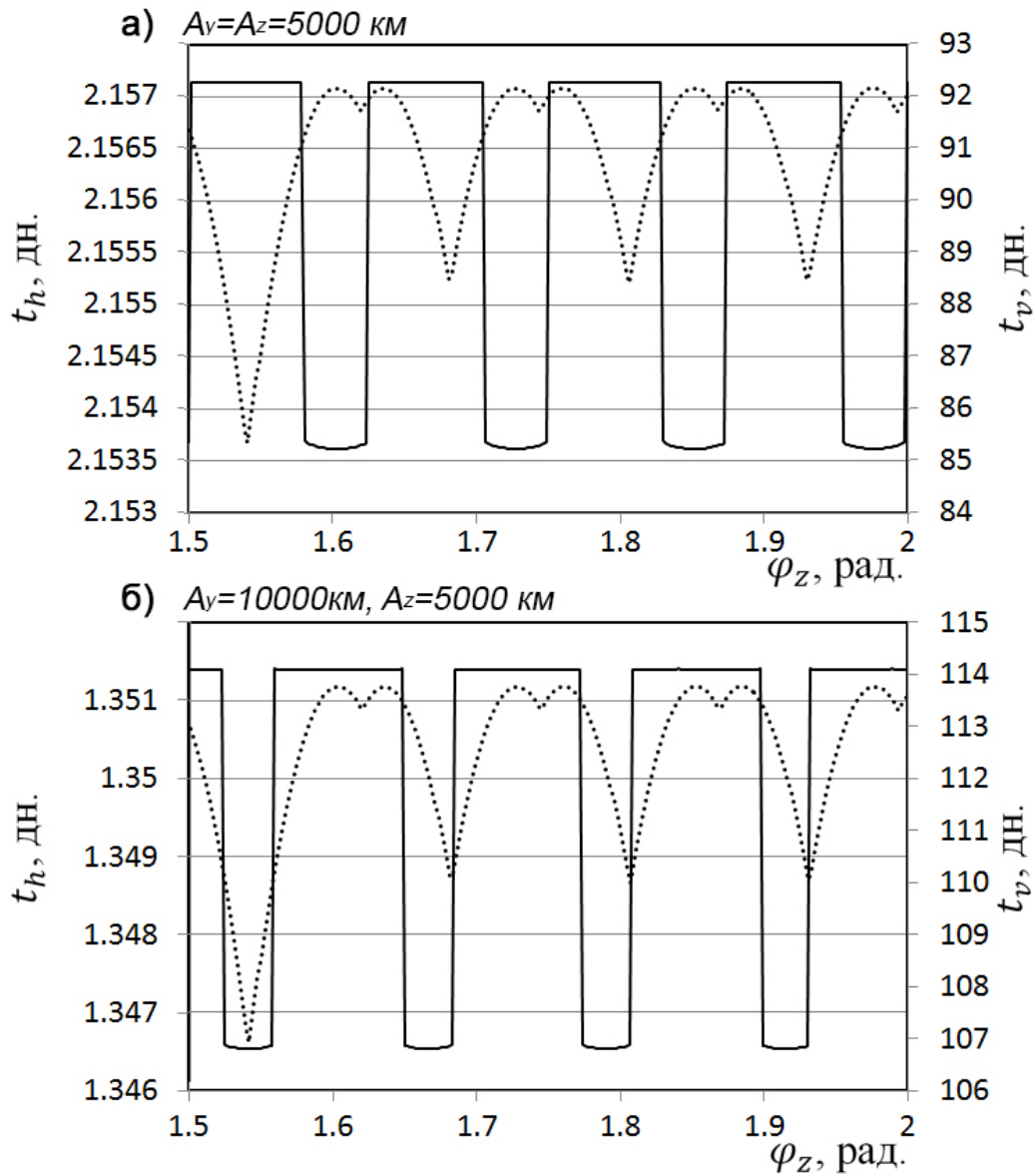


Рисунок 3.39 – Зависимость максимального периода непрерывной видимости с Земли и максимального времени затмения спутника Луной от начальных фаз  $\varphi_z$ , при  $\varphi_y = 0, 2$  и различных значениях амплитуд

На рисунке 3.39 (а) представлены графики зависимости  $t_h$  (пунк-

тирная линия) и  $t_v$  (непрерывная линия) от  $\varphi_z$  при  $\varphi_y=0,2$  и амплитудах  $A_y = A_z = 5000$  км за период общего пребывания на орбите 384 дней. При увеличении  $\varphi_z$ , оба графика синхронно смещаются вправо, а явный минимум  $t_h$  соответствует одному из максимумов  $t_v$ . Необходимо обратить внимание на то, что с изменением  $\varphi_z$  значения  $t_h$  варьируются в диапазоне шириной 0,0035 дня, что составляет порядка 1,5%, в то время как значения  $t_v$  могут изменяться более существенно от 85 до 92 дней, что составляет около 8% [26], [27], [28].

Для случая  $A_y = A_z = 5000$  км, минимум  $t_h$ , как хорошо видно из графиков на рисунке 3.39 (а), соответствует одному из максимумов  $t_v$ . Таким образом, оптимизируя траекторию по  $t_h$ , мы автоматически оптимизируем её по  $t_v$ .

Такая картина, вообще говоря, не характерна для других значений амплитуд. На рисунке 3.39 (б) представлены результаты для амплитуд  $A_y = 10000$  км,  $A_z = 10000$  км, где ситуация обратная: минимум  $t_h$  не соответствуют максимумам  $t_v$ . Таким образом, не всегда удастся проводить оптимизацию по нескольким критериям одновременно, однако, как уже было отмечено, увеличение  $t_v$  более приоритетно и более чувствительно к неправильному выбору  $\varphi_z$ . Таким образом, для орбит с амплитудами  $A_y = 10000$  км,  $A_z = 10000$  км. При увеличении продолжительности периода времени пребывания на орбите количество явных минимумов  $t_h$  уменьшается.

Таблица 3.1 – Расстояния между точками  $L_1$  и  $L_2$  для систем Земля-Луна и Земля-Солнце.

$A_y$ , $10^3$ км	$A_z$ , $10^3$ км	min $t_h$ , дн.	max $t_h$ , дн.	max $t_v$ , дн.	min $t_v$ , дн.	min $k$ , %	max $k$ , %
15	15	0.6823	0.6971	167.52	160.23	0.01231	0.0152
15	10	0.8169	0.8276	159.71	152.3	0.0191	0.0223
10	10	1.0410	1.0504	152.36	145.09	0.0292	0.0331
10	5	1.3466	1.3512	114.10	106.78	0.0631	0.0678
5	5	2.1536	2.1571	92.27	85.21	0.1323	0.1403

Рассчитанные диапазоны значений характеристик  $t_h$ ,  $t_v$  и  $k$  для раз-

личных значений амплитуд приведены в таблице 3.1.

Приведенные результаты показывают, что увеличение амплитуды приводит к увеличению периодов непрерывной видимости аппарата с Земли и уменьшению времени затенения [26], [28].

При правильном выборе фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  и времени выхода на орбиту может быть достигнута траектория, при которой аппарат виден с Земли непрерывно в течение нескольких месяцев. Примеры таких траекторий, рассчитанных для амплитуд  $A_y = 5000$  км и  $A_z = 5000$  км,  $A_y = 5000$  км и  $A_z = 10000$  км,  $A_y = 10000$  км и  $A_z = 10000$  км,  $A_y = 10000$  км и  $A_z = 15000$  км, а также для амплитуд  $A_y = 15000$  км и  $A_z = 15000$  км, приведены на рисунках 3.40 - 3.44. Зона затмения Луной находится внутри окружности. Утолщенной синей линией выделен участок траектории, не пересекающий зону затмения.

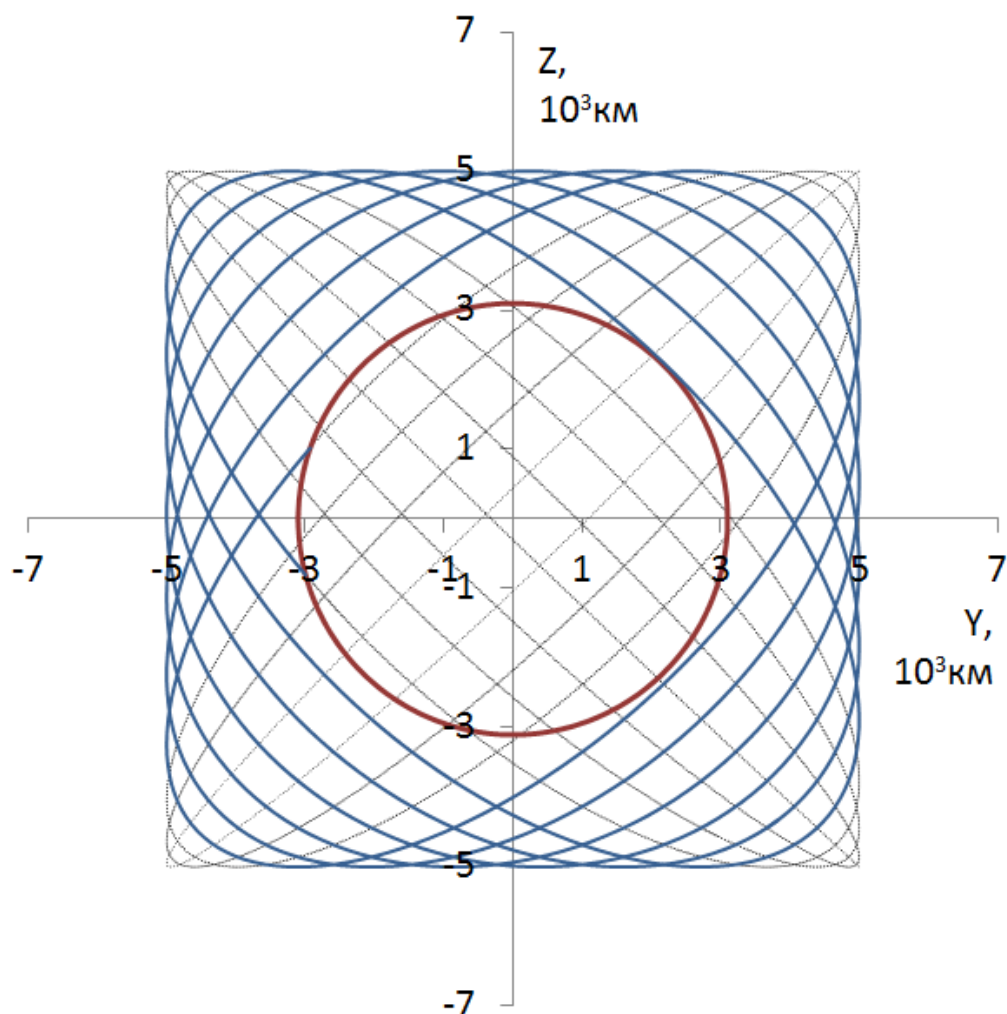


Рисунок 3.40 – Пример траектории Лиссажу для значений амплитуд  $A_y = 5000$  км,  $A_z = 5000$  км.

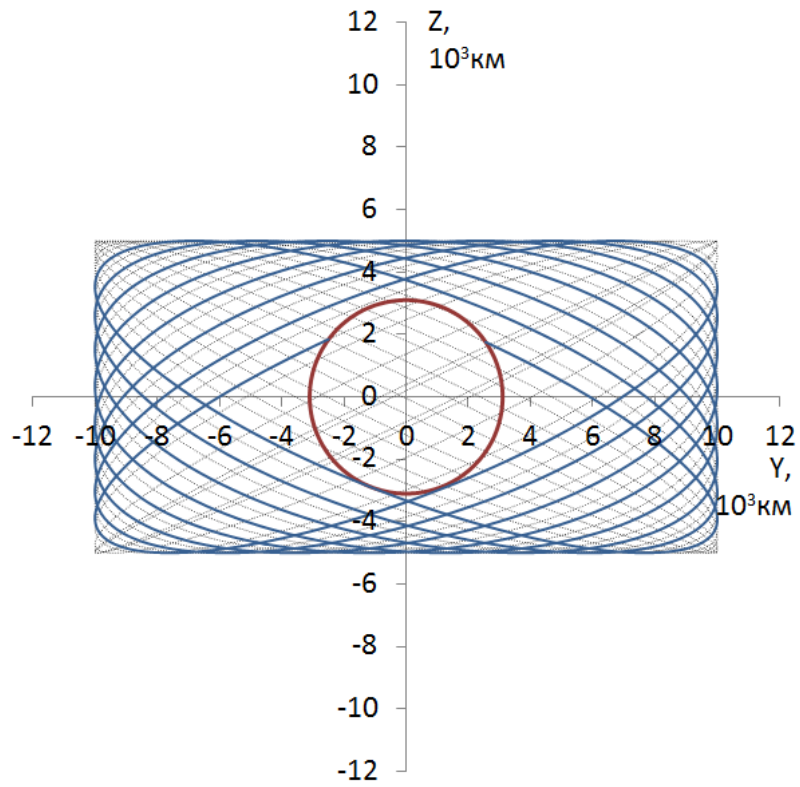


Рисунок 3.41 – Пример траектории Лиссажу значений для амплитуд  $A_y = 5000$  км,  $A_z = 10000$  км.

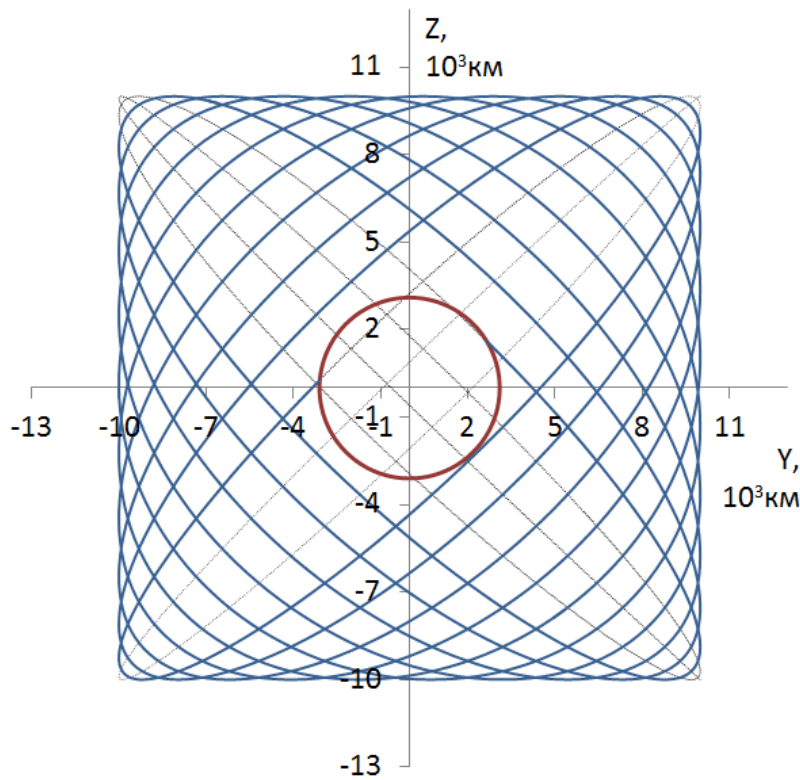


Рисунок 3.42 – Пример траектории Лиссажу для значений амплитуд  $A_y = 10000$  км,  $A_z = 10000$  км.



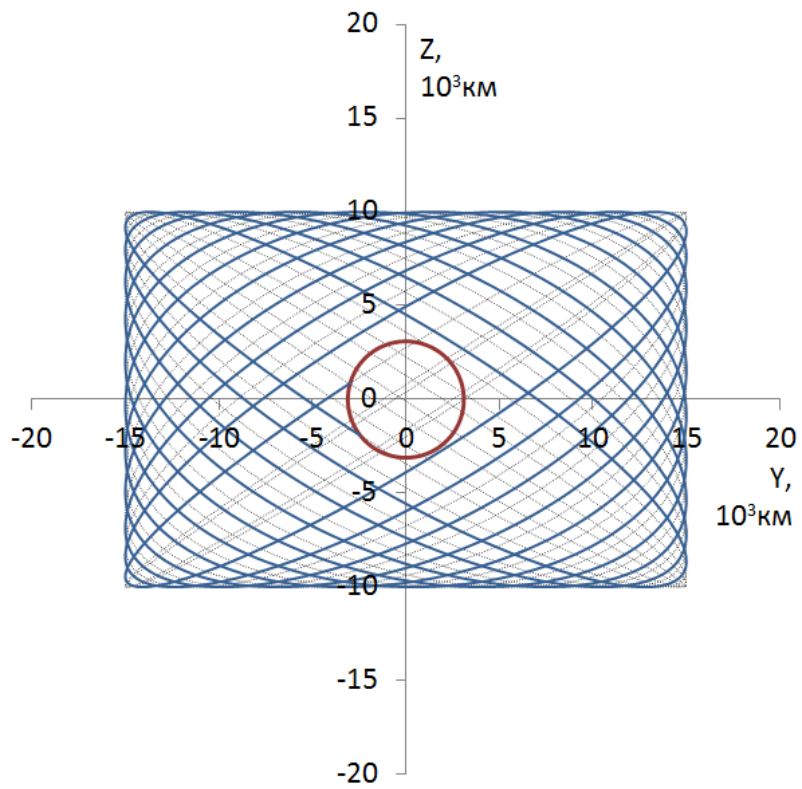


Рисунок 3.43 – Пример траектории Лиссажу для значений амплитуд  $A_y = 10000$  км,  $A_z = 15000$  км.

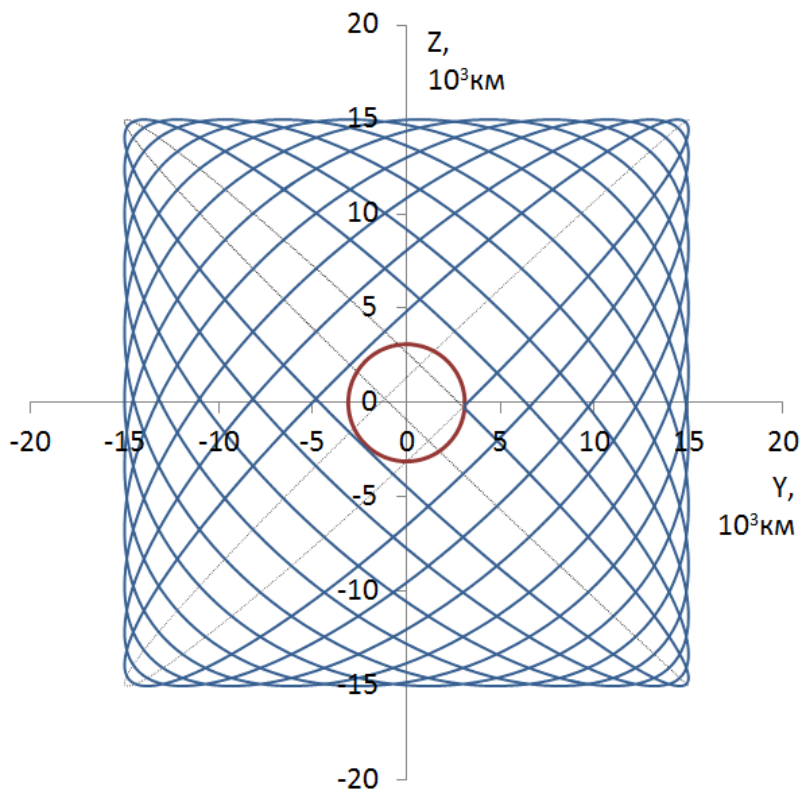


Рисунок 3.44 – Пример траектории Лиссажу для значений амплитуд  $A_y = 15000$  км,  $A_z = 15000$  км.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что:

- увеличение амплитуды приводит к улучшению характеристик видимости аппарата;
- для фиксированной комбинации амплитуд значение  $t_v$ , характеризующее максимальное время видимости аппарата, может меняться с изменением фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  в пределах 8.5%;
- значение  $t_h$ , характеризующее максимальное время скрытия аппарата за Луной, варьируется с изменением фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  в пределах 1 – 2%.
- при правильном выборе фазы и времени выхода на орбиту возможны миссии, обеспечивающие непрерывную видимость аппарата от 92,27 (для  $A_y = A_z = 5000$  км), до 167,51 (для  $A_y = A_z = 15000$  км) дней.

## Заключение

В работе проведено исследование возможностей применения точки либрации  $L_2$  системы Земля-Луна при реализации космических миссий. Из всех ближайших к Земле точек либрации данная точка может быть достигнута с наименьшими затратами, поэтому ее удобно использовать как стартовую точку для миссий к различным объектам Солнечной системы. При этом может потребоваться задержка в окрестности рассматриваемой точки либрации, которая может быть реализована посредством выхода на орбиту вокруг точки.

Орбиты вокруг точки  $L_2$  системы Земля-Луна могут также быть применены для изучения обратной стороны Луны. В этом случае положение аппарата позволяет использовать его как ретранслятор между центром управления на Земле и портативной станцией, осуществляющей сбор научной информации, на обратной стороне Луны. Существует два семейства орбит вокруг точек либрации: гало-орбиты и орбиты Лиссажу. Орбиты Лиссажу обладают меньшими амплитудами, что делает их более выгодными при реализации ряда миссий. С другой стороны, аппарат, находящийся на орбите Лиссажу вокруг точки  $L_2$ , может скрываться за Луной и на определенное время терять связь с Землей. При этом, поскольку орбиты Лиссажу не являются периодическими, вид орбиты и характеристики видимости аппарата, находящегося на ней, зависят от местоположения аппарата в момент выхода на орбиту.

Исследование, проведенное в рамках работы, позволило произвести оценку характеристик видимости аппарата в зависимости от положения выхода аппарата на орбиту Лиссажу и от амплитуд этой орбиты. Оценивались три характеристики: максимальное время непрерывной видимости аппарата, максимальное время непрерывного сокрытия аппарата и отношение общего времени сокрытия аппарата ко времени нахождения на орбите. Рассматривалась зависимость данных характеристик от амплитуд орбиты  $A_y$ ,  $A_z$  и фаз  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ , определяющих положение аппарата в начальный момент времени.

В работе доказана  $\pi$ -периодичность зависимостей исследуемых характеристик от фаз  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$ , проведен их количественный и качественный анализ. Показано, что увеличение амплитуд орбиты приводит к улучшению условий связи с аппаратом по всем исследуемым характеристикам: увеличивается

максимальный период непрерывной видимости аппарата, уменьшается максимальный период непрерывного сокрытия аппарата, уменьшается процентное отношение общего времени сокрытия аппарата ко времени пребывания на орбите. Полученные результаты позволяют определить диапазоны значений  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$ , обеспечивающие максимальные значения времени непрерывной видимости аппарата. Показано, что время непрерывной видимости аппарата может достигать 92,27 дня для комбинации амплитуд  $A_y = 5000$  км и  $A_z = 5000$  км, 114,10 дней для комбинаций  $A_y = 5000$  км и  $A_z = 10000$  км, 152,36 дня для комбинаций  $A_y = A_z = 10000$  км, 159,71 дней для комбинаций  $A_y = 10000$  км и  $A_z = 15000$  км, а также 167,52 дней для комбинаций амплитуд  $A_y = A_z = 15000$  км.

Полученные в работе оценки будут использованы при проектировании траектории аппарата с выходом на орбиту Лиссажу вокруг точки либрации  $L_2$  системы Земля-Луна для задач исследования обратной стороны Луны.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Clarke, A. C. Interplanetary Flight / Clarke, A. C. // London: Temple Press Books Ltd., 1950.
2. Farquhar, R.W. The Control and Use of Libration-Point Satellites / Robert W. Farquhar // Goddard Space Flight Center Greenbelt, Maryland 20771, 1970.
3. Herschel, Planck and Gaia Orbit Design / M.Hechler , J.Cobos // Libration PointOrbits and Applications // Gomez G, Lo M.W. and Masdemont J.J., Eds. Singapore: World Scientific Publishing, 2003.
4. Cellett, A. Celestial Mechanics: The Waltz of the Planets / Alessandra Celletti, Ettore Perozzi // Springer Publishing, 2007.
5. Mottola S. et al. AsteroidFinder / SSB: A German Mission for the Search for IEOs // 1st IAA Planetary Defense Conference: Protecting Earth from Asteroids. 2009. Conference CD available from esa.conference.bureau@esa.int
6. Vulpetti, G. Overview of Advanced Space Propulsion via Solar Photon Sailing [Electronic resource] / G. Vulpetti // International Academy of Astronautics. – 2005.
7. Clarke, A. C. The Making of a Moon / Clarke A. C. // Harper and Brothers, New York, 1957, pp. 192-198.
8. Farquhar, R. W. The Flight of ISEE-3/ICE: Origins, Mission History, and a Legacy / R. W. Farquhar // J. Astronautical Sciences, Vol. 49, No. 1, January 2001, pp. 23-73 and presented at the AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Boston, Massachusetts, August 11, 1998.
9. Ogilvie, K. W. International Sun-Earth Explorer: A Three-Spacecraft Program / K. W. Ogilvie Science // Vol. 198, No. 4313, October 14, 1977, pp. 131-138.
10. Special Issue on Instrumentation for the International Sun-Earth Explorer Spacecraft, IEEE Transactions on Geoscience Electronics //Vol. GE-16, July 1978.
11. Farquhar, R. W. Trajectories and Orbital Maneuvers for the First Libration-Point Satellite, J. Guidance and Control / R. W. Farquhar / Vol. 3, No. 6, November 1980, pp. 549-554.
12. Muhonen, D. P. Alternative Gravity Assist Sequences for the ISEE-3 Escape

- Trajectory / D. P. Muhonen // J. Astronautical Sciences, Vol. 33, No. 3, July 1985, pp. 255-288.
13. Roberts, C. E. The International Cometary Explorer Comet Encounter and Earth Return Trajectory / C. E. Roberts // Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 69, 1989, pp. 709-725.
  14. Farquhar, R. W. Use of Libration-Point Orbits for Space Observatories / R. W. Farquhar and D. W. Dunham // Observatories in Earth Orbit and Beyond, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 391-395.
  15. Eismont, N. Lunar Swingby as a Tool for Halo-Orbit Optimization in Relict-2 Project / N. Eismont // ESA SP- 326, December 1991, pp. 435-439.
  16. Dunham, D. W. Trajiser Trajectory Design for the SOHO Libration-Point Mission / D. W. Dunham // IAF Paper 92-0066, September 1992.
  17. Domingo, V. The SOHO Mission: An Overview, Solar Physics / V. Domingo // Vol. 162, No. 1-2, December 1995, pp. 1-37.
  18. Roberts, C. E. The SOHO Mission Halo Orbit Recovery from the Attitude Control Anomalies of 1998, presented at the International Conference on Libration Point Orbits and Applications / C. E. Roberts // Aiguablava, Spain, June 10, 2002.
  19. Stone, E. C. The Advanced Composition Explorer / E.C. Stone // Space Science Reviews, 1998.
  20. Beckman, M. Orbit Determination Issues for Libration Point Orbits, presented at the International Conference on Libration Point Orbits and Applications / M. Beckman // Aiguablava, Spain, June 13, 2002.
  21. Dunham, D. W. Double Lunar-Swingby Trajectories for the Spacecraft of the International Solar-Terrestrial Physics Program / D. W. Dunham // Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 69, 1989, pp. 285-301.
  22. Acuna, M. H. The Global Geospace Science Program and Its Investigations / M. H. Acuna // Space Science Reviews, Vol. 71, 1995, pp. 5-21.
  23. Franz, H. WIND Nominal Mission Performance and Extended Mission Design / H. Franz // J. Astronautical Sciences, Vol. 49, No. 1, January 2001, pp. 145-167 and presented at the AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Boston, Massachusetts, August 11, 1998.
  24. Uphoff, C. W. The Art and Science of Lunar Gravity Assist / C. W. Uphoff // Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 69, 1989, pp. 333-346.

25. Cuevas, O. An Overview of Trajectory Design Operations for the Microwave Anisotropy Probe Mission / O. Caevas // AIAA Paper 2002-4425, presented at the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Monterey, California, August 5, 2002.
26. Федоренко, Ю. В. Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МИЭМ НИУ ВШЭ 2013: Анализ и оптимизация орбит Лиссажу вокруг точки либрации l2 Земля-Луна / Федоренко Ю.В. // Москва, 2013.
27. Федоренко, Ю. В. X Конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования»: Оценка возможности наблюдения космического аппарата, находящегося на орбите Лиссажу, вокруг точки L2 системы Земля – Луна / Федоренко Ю. В., Аксёнов С. А. // Москва, ИКИ РАН, 2013.
28. Fedorenko, J. V. The International Scientific – Practical Conference «INNOVATIVE INFORMATION TECHNOLOGIES»: Estimate the time visibility of the spacecraft motion around the libration point L2 of the Earth-Moon system / J. Fedorenko // Prague, 2013.