КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА, интеграл Лебега
математический анализ, 2 курс, 3 модуль, 2015
А.М. Красносельский

Лекция 1 (12 января 2015)

Буду рассматривать скалярные функции, заданные на пространстве с мерой, то есть тройка $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$ и рассматриваются функции $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Все время буду предполагать, что мера всего пространства X конечная.

На ближайших лекциях теоремы одинаковые для абстрактного пространства с мерой и отрезка. Поэтому, когда буду говорить о примерах, буду говорить об отрезке.

Интеграл Лебега в разных учебниках формально определяется по-разному. Я буду следовать в основном Колмогорову и Фомину. Начну с неформального определения интеграла Лебега и неформального сравнения с интегралом Римана. Это все я буду излагать для случая $X = [0, 1]$.

Конструкция интеграла Римана. Есть разбиение основного отрезка на конечное число промежутков Δ_k.

По каждому разбиению Δ строим суммы Дарбу, верхнюю $S(\Delta)$ и нижнюю $s(\Delta)$:

$$S(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{t\in(x_{k-1},x_k]} f(t)\Big)(x_k - x_{k-1}), \qquad s(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{t\in(x_{k-1},x_k]} f(t)\Big)(x_k - x_{k-1}),$$

очевидно, при любой f и любом разбиении Δ справедливо $s(\Delta) \leqslant S(\Delta)$.

Если измельчать разбиение (добавлять новые точки), то верхние суммы уменьшаются, нижние увеличиваются. Теперь положим $I^* = \inf_\Delta S(\Delta)$, $I_* = \sup_\Delta s(\Delta)$, верхний интеграл и нижний интеграл. Всегда $I^* \geqslant I_*$.

Функция f называется интегрируемой по Риману, если $I^* = I_*$. авенство $I^* = I_*$ выполнено, если $\sum w_n|\Delta_n| \to 0$, где w_n — колебание на отрезке Δ_n.

Почти такое же определение: Пусть есть разбиение Δ, на каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ (или $[x_{k-1}, x_k)$) выберем точку ξ_k и рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(\Delta, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad \text{Рассмотрим величину} \quad I = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \sigma(\Delta, \xi_k).$$

Если предел существует, то I — это интеграл Римана.

Функция, принимающая на этих промежутках постоянные значения, называется ступенчатой функцией. Интеграл от ступенчатой функции f определяется естественно: $\int_a^b f(x)\,dx = \sum f_k \Delta_k$.

Есть ограниченная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (не обязательно непрерывная). Разбиение Δ отрезка точками $x_1, < \ldots, x_{n-1}$, $a = x_0, b = x_n$. Мелкость разбиения:

$$\lambda(\Delta) = \inf\{x_k - x_{k-1},\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Для $f \in C$ есть связь между таким определением и определением со ступенчатыми функциями.

1) Интеграл ступенчатой (настоящие ступеньки) функции определить легко.

2) Пусть функция f такова, что её можно равномерно приблизить ступенчатыми функциями. Тогда её интеграл равен пределу интегралов ступенчатых функций. Корректность определений надо проверить (разные приближения приводят к одному результату и пр.).

Непрерывные функции равномерно приближаются ступенчатыми функциями:

$$f^*(x) = \sup_{t \in (x_{k-1}, x_k]} f(t),\ x \in (x_{k-1}, x_k] \ \geqslant\ f(x)\ \geqslant\ f_*(x) = \inf_{t \in (x_{k-1}, x_k]} f(t),\ x \in (x_{k-1}, x_k].$$

Было бы приятно, если бы все интегрируемые по Риману функции были бы равномерными пределами ступенчатых функций... Однако это не так. Пример: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ на $(0,1]$, $f(0) = 0$. Эта функция интегрируема по Риману на $[0,1]$, однако равномерно её приблизить нельзя — в нуле проблемы.

Теорема (Лебег). *Ограниченная функция на отрезке интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ почти всюду непрерывна, то есть множество точек разрыва имеет меру ноль.*

Интеграл Лебега

Интеграл Лебега также может быть введен методически разными различными способами. Они фактически одинаковые, однако «психологически» — разные. Сначала я расскажу способ через интегральные суммы, это будет такой неформальный рассказ. А формально, с теоремами и доказательствами будет использоваться другой способ, через равномерные пределы простых функций, принимающих конечное или счетное количество значений.

Способ 1. Пусть функция f измерима на отрезке $[a,b]$ и пусть она ограничена: $f(x) \in [A,B)$ при $x \in [a,b]$. Разобьем отрезок $[A,B]$ на непересекающиеся маленькие полуинтервалы Δ_k точками $y_0 = A < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B$, а потом составим интегральные суммы Лебега

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(f^{-1}(\Delta_k)), \qquad s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(f^{-1}(\Delta_k)).$$

Это верхняя и нижняя сумма, можно еще определить суммы формулой

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu(f^{-1}(\Delta_k)), \quad \xi_k \in \Delta_k.$$

Очевидно, $s \leqslant \sigma \leqslant S$ при любом разбиении и при любом выборе точек ξ_k.

Если мелкость разбиения $\inf_k |y_k - y_{k-1}|$ равна λ, то, очевидно, $S - s \leqslant \lambda(b-a)$. При добавлении новых точек разбиения нижняя сумма возрастает, верхняя сумма уменьшается. Супремум нижних сумм равен инфимуму верхних и называется интегралом Лебега.

Можно сказать, что интеграл Лебега равен пределу интегральных сумм при $\lambda \to 0$.

Обозначение: $\displaystyle \int_A f(x)dx, \qquad \int_A f(x)d\mu, \qquad \int_A f(x)d\mu(x).$

Повторяю и подчеркиваю,
для любой измеримой ограниченной функции интеграл Лебега существует.

Нарисовать картинку для параболы, что такое интегральная сумма.

Конструкция интеграла Лебега через интегральные суммы потом достраивается до неограниченных функций (может оказаться, что $S = +\infty$ или $s = -\infty$).

Теперь перейдем к формальной конструкции.

Замечание 1. *Простая функция f (т.е. принимающая счетное множество значений y_n) измерима iff каждое множество $\{x : f(x) = y_n\}$ измеримо.*

Замечание 2. Еще раз: предполагаю, что множества «на оси абсцисс» имеют конечную меру. Про бесконечную меру (например, про $\int_{\mathbb{R}+}$) — будет отдельный разговор.

Способ 2 (основной). Простая функция — функция с не более чем счетным множеством значений: пусть A — измеримое множество, имеет вид $A = \coprod_k A_k$, где все A_k также измеримы, их количество конечно или счетно. Это измеримая функция, легко проверить по определению.

Введем интеграл от ступенчатой функции естественным способом. Пусть $f(x) = y_k$ при $x \in A_k$. Тогда

$$\int_A f(x)dx = \sum_k y_k \mu(A_k).$$

Если ряд в правой части абсолютно сходится, то ступенчатая функция f называется интегрируемой (или суммируемой) на A.

Обозначения (для ступенчатой или нет): $\displaystyle\int_A f(x)dx,\ \int_A f(x)d\mu,\ \int_A f(x)d\mu(x)$.

Обсудить, почему требуется абсолютная сходимость? Потому что иначе перестановками слагаемых можно получить любую сумму (по теореме Римана об условно сходящихся рядах).

Объяснить, что уже тут появляются ступенчатые (с настоящими ступеньками) функции, которые естественно считать интегрируемыми по Риману, но которые не интегрируемы по Лебегу.

Пример. Пусть $\Delta_n = (2^{-n+1}, 2^{-n}],\ n = 2, 2, \ldots$ — последовательность дизъюнктных промежутков, которые сходятся к нулю в естественном смысле. Теперь пусть $f_n(x) = (-1)^n\, 2^n/n$. Несобственный интеграл Римана

$$\int_0^1 f(x)dx\, dx \qquad \text{эквивалентен ряду} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

то есть он сходится, но не абсолютно. Соответственно по Лебегу f не интегрируема.

Можно считать, что все y_k различны, а можно и не считать так. Но тогда счетность количества множеств на оси абсцисс всегда предполагается.

Примеры неограниченной интегрируемой простой функции.

1. Самый простой пример на отрезке $[0,1]$: берем функцию $f(x)=0, x=0$; $f(x)=\left[\sqrt{x^{-1}}\right]$, где $[\cdot]$ — это целая часть. Для такой функции интеграл вычисляется по формуле

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n(n^{-2}-(n+1)^{-2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}) < \infty$$

2. Предыдущий пример очень похож на интеграл Римана. Следующий пример — для функций, не интегрируемых по Риману, такой же простой: нумеруем рациональные числа r^n, в рациональных $f(r_n)=n$, $f(\alpha)=0$. Это простая функция, её интеграл Лебега равен нулю.

3. Строим на отрезке $[0,1]$ канторово множество положительной меры, выбрасывая из отрезка последовательно интервалы длины $\varepsilon\, 2^{-n}$ суммарной длины ε. Теперь на канторовом множестве определим функцию нулём, а на каждом выброшенном интервале по очереди полагаем $f(x)=n$. Тогда $\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \sum \varepsilon\, n\, 2^{-n}$.

Свойства интеграла от измеримой простой функции:

1. Все равно, какие множества брать, считать ли что на всех ступеньках значения одинаковы.

2. Линейность (аддитивность и однородность по функции):

$$\int_A (f(x)+g(x))dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx, \qquad \int_A kf(x)dx = k\int_A f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть a_k — значения функции f, b_k — значения функции g,

$$\int_A (f(x)+g(x))dx = \sum_{k,n} (a_n+b_k)\mu(f^{-1}(a_n)\bigcap g^{-1}(b_k)) =$$

$$\sum_{k,n} a_n\mu(f^{-1}(a_n)\bigcap g^{-1}(b_k)) + \sum_{k,n} b_k\mu(f^{-1}(a_n)\bigcap g^{-1}(b_k)) =$$

$$\sum_n a_n \sum_k \mu(f^{-1}(a_n)\bigcap g^{-1}(b_k)) + \sum_k b_k \sum_n \mu(f^{-1}(a_n)\bigcap g^{-1}(b_k)) = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx.$$

Равенство пишем в обратном порядке. □

3. Теорема о среднем для ограниченных функций:

$$\mu(A)\inf f \leqslant \int_A f(x)dx \leqslant \mu(A)\sup f.$$

4. Мажорантный признак: если простая $g \geqslant 0$ интегрируема, то и всякая простая f, такая что $|f| \leqslant g$, тоже интегрируема.

Доказательство см. в следующей лекции в том месте, где аналогичный признак для общего случая.

Следующий шаг: для измеримой функции берем последовательность простых функций, равномерно сходящуюся к f. Если простые функции интегрируемые (ряды абсолютно сходятся!), то предел интегралов от ступенчатых функций называется интегралом от f.

Определение. *Измеримая функция называется суммируемой или интегрируемой, если существует последовательность интегрируемых (суммируемых) простых, равномерно сходящаяся к ней. Интеграл от функции — предел интегралов от простых.*

Пример измеримой несуммируемой функции: $f(x) = 1/x$ на $(0, 1]$.

Другой пример измеримой несуммируемой функции: $f(x) = 1/x \sin(1/x))$ на $(0, 1]$. От этой функции существует несобственный интеграл Римана.

Для корректности такого определения надо проверить 3 момента.

1. Если f_n — интегрируемые простые функции и $f_n \rightrightarrows f$, то последовательность $\lim \int_A f_n(x)dx$ сходится.

2. Если есть две разные последовательности, равномерно сходящиеся к f, то результат получится один и тот же.

3. Для простой функции это одно и то же.

Пункт 1 следует из критерия Коши и теоремы о среднем:

$$\left| \int_A f_n dx - \int_A f_m dx \right| \leqslant \mu(A) \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)|.$$

Пункт 2 следует из теоремы о среднем: если $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows f$, то $f_n - g_n \rightrightarrows 0$. Поэтому

$$\lim \int_A f_n \, dx = \lim \int_A g_n \, dx.$$

Пункт 3 очевиден.

Замечательно, что интеграл Лебега от любой измеримой ограниченной функции существует.

Почему эти 2 подхода дают одно и то же число. Я бы сказал, это очевидно для ступенчатых функций, поэтому и для обычных тоже.

Агитационное сравнение интегралов Римана и Лебега.

0) Обозначение — то же самое, обычно из контекста ясно. Если хотят подчеркнуть различие, то придумывают своё обозначение. Если пишут $\int_{[a,b]}$ или $\int_A$ — скорее всего, это интеграл Лебега.

1) Интеграл Лебега от более широкого класса функций, причем существенно! Интеграл Римана не существовал либо, если у функции было слишком много точек разрыва, либо если она была неограничена и где-то слишком быстро стремилась к бесконечности. Интеграл Лебега не существует либо, если функция неизмерима, либо если она неограничена и (также!) где-то слишком быстро стремилась к бесконечности.

2) Интеграл Римана по ориентированному множеству, интеграл Лебега по построению — по неориентированному. У нас был когда-то уже интеграл Римана по неориентированному множеству, в последнем модуле 1 курса.

3) Если f ограничена и интеграл Римана существует, то существует и интеграл Лебега, причем он равен интегралу Римана — это будет строго доказано.

4) Все основные формулы для интеграла Лебега сохраняются, про основную формулу Ньютона–Лейбница будет подробный длинный разговор. В частности, для обычной канторовой лестницы $c(x)$ почти всюду существует производная $c'(x) \overset{a.e.}{=} 0$. Естественно, $\int_{[0,1]} c'(x)dx \neq c(1) - c(0)$.

5) Представим себе функцию $[a, b] \to X$, где X — какое-то линейное пространство, например, плоскость. Или функциональное пространство. Интегральные суммы по Риману — никаких проблем. Интегральные суммы по Лебегу непонятно как составлять. И наоборот. В одних пространствах естественно определены меры, в других — метрики.

6) Важное: измеримые функции можно интегрировать (по Лебегу) по любому измеримому множеству, отличному от промежутка.

Свойства интеграла Лебега на множестве конечной меры (на ограниченном множестве).

1. $\int_A 1\, d\mu = \mu(A)$.

2. Теорема о среднем: если $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $x \in E$, то $A\mu(E) \leqslant \displaystyle\int_E f(x)dx \leqslant B\mu(E)$.

Следует из: $f \geqslant 0$ влечет $\int_E f(x)dx \geqslant 0$. Очевидное рассуждение: если $f \geqslant 0$ измеримая, то её можно равномерно приблизить неотрицательными простыми f_n.

Отсюда следует монотонность интеграла

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)dx \geqslant \int_E f(x)dx.$$

3. Линейность по функции: аддитивность для любых ограниченных измеримых f и g:

$$\int_E (f(x) + F(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E F(x)dx$$

и однородность по функции:

$$\int_E Cf(x)dx = C\int_E f(x)dx$$

Следует из соответствующих свойств для простых функций.

4. Конечная аддитивность по множеству (все множества измеримы):

$$E = \coprod_k E_k \Rightarrow \int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

Следует из аддитивности меры и определения.

5. Если $\mu(A) = 0$, то любая функция f интегрируема на A и $\int_A f(x)dx = 0$.

Следует из из определения: интеграл по множеству меры 0 любой простой функции равен 0.

Лекция 2 (19 января 2015)

Итак, на прошлой лекции я довольно много времени неформально сравнивал интегралы Лебега и Римана, приводил примеры.

Сейчас продолжим изучение свойств интеграла Лебега и теорем о нём. Напомню только основное определение. Есть измеримое множество A.

Интеграл от простой функции (счетное или конечное множество значений y_n) — это ряд $\sum y_n\mu\big(f^{-1}(y_n)\big)$. Обязательное требование интегрируемости простой функции — абсолютная сходимость этого ряда.

Интеграл от произвольной измеримой f: если есть последовательность f_n интегрируемых простых функций, равномерно сходящаяся к f, интеграл от f — это предел интегралов от f_n.

Была доказана корректность определения и несколько простых свойств: монотонность, линейность, теорема о среднем.

6. Если f интегрируема на A, то она интегрируема на любом измеримом подмножестве $B \subset A$.

Следует из такого же утверждения для простых функций и определения. Для простой функций это верно, так как $B \subset A \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in A : f(x) = y_k\}) \geqslant \mu(\{x \in B : f(x) = y_k\}) \quad \Rightarrow$

$$\sum_n |y_k|\mu(\{x \in A : f(x) = y_k\}) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n |y_k|\mu(\{x \in B : f(x) = y_k\}) < \infty.$$

Теперь если функция интегрируема на A, то она является равномерным на A пределом интегрируемых простых, эти же функции дают равномерный на B предел интегрируемых простых.

7. Мажорантный признак. Если f измерима, $|f| \leqslant g$ и g интегрируема, то f интегрируема и

$$\int_A |f(x)|dx \leqslant \int_A g(x)dx.$$

Следует из аналогичного утверждения для измеримых простых функций. Пусть f принимает значения a_n, а g — значения b_k. Разобьем все множество A на счетную систему множеств

$$B_{n,k} = \{x \in A : |f(x)| = |a_n|,\ g(x) = b_k\}, \quad A = \coprod B_{n,k}.$$

Интегрируемая функция g принимает на $B_{n,k}$ значение b_k, функция f, про которую мы должны утвердить интегрируемость, принимает на $B_{n,k}$ значения a_n. Перенумеруем все $B_{n,k}$, их счетное множество, скажем, что все эти множества суть множества A_m. На каждом множестве A_m обе функции f и g постоянны: $f(x) = f_m, g(x) = g_m$, причем $|f_m| \leqslant g_m$. Теперь очевидно, что из сходимости ряда $\sum_m g_m\mu(A_m)$ вытекает требуемая абсолютная сходимость ряда $\sum_m f_m\mu(A_m)$.

Интегрируемость: из интегрируемости g следует интегрируемость $g+1$. Теперь приблизим $|f|$ и $g+1$ равномерно простыми функциями s_f^n и s_{g+1}^m. с точностью до $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Теперь $|s_f^n| < s_{g+1}^m$, суммы рядов для s_f^n ограничены суммами ряда для s_{g+1}^m, отсюда следует интегрируемость f. Неравенство следует из монотонности. $\square$

Очевидно, что из $|f| \overset{a.e.}{\leqslant} g$ и $g \in L(A)$ также следует $f \in L(A)$.

8. Сумма модулей больше модуля суммы: $\displaystyle \Big|\int_E f(x)dx\Big| \leqslant \int_E |f(x)|dx.$

Пишем $E = E^+ \coprod E^0 \coprod E^-$, где $f = 0$ на E^0, и имеет знак $\pm$ на $E^\pm$. Все эти множества измеримы.

$$\Big|\int_E f(x)dx\Big| = \Big|\int_{E^+}|f(x)|dx - \int_{E^-}|f(x)|dx\Big|, \quad \int_E |f(x)|dx = \int_{E^+}|f(x)|dx + \int_{E^-}|f(x)|dx,$$

всё следует из $a, b \geqslant 0 \Rightarrow |a-b| \leqslant a+b$.

9. Интегралы от измеримых f и от $|f|$ сходятся и расходятся одновременно.

Для простых функций следует из определения, а для общего случая предельным переходом.

Подчеркну: тут опять (был пример простой функции) появляются функции, у которых существует интеграл Римана (несобственный), а интеграла Лебега нет. Пример простой: несобственный интеграл Римана

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx = \int_1^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy$$

сходится, но функция $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ не интегрируема по Лебегу на $[0,1]$.

Если f измеримая, то и $|f|$ измеримая. Назад не правильно — если множество A не измеримое, то функция $\chi_A - \chi_{E\setminus A}$ не измеримая, а её модуль — равен 1 везде.

10. **Счетная аддитивность интеграла.** Счетная аддитивность по множеству: когда

$$\int_A f(x)dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx?$$

Теорема. *Если f интегрируема на $A = \coprod_n A_n$, то все интегралы справа существуют и верна эта формула.*

1. Для простых функций: пусть $B_k = \{x \in A, f(x) = y_k\}$, $B_{n,k} = \{x \in A_n, f(x) = y_k\}$;

$$\int_A f(x)dx = \sum_k y_k\mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{n,k}) = \sum_n\sum_k y_k\mu(B_{n,k}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx.$$

2. Фиксируем $\varepsilon > 0$, пишем близкую к f простую функцию g: $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ при $x \in A$. Для g мы знаем, что

$$\int_A g(x)dx = \sum_n \int_{A_n} g(x)dx \quad \text{и} \quad \Big|\int_A g(x)dx - \int_A f(x)dx\Big| \leqslant \varepsilon\mu(A).$$

Теперь $\left|\int_{A_n} f(x)dx - \int_{A_n} g(x)dx\right| \leqslant \varepsilon\mu(A_n)$, $\Rightarrow$ $\left|\sum_n \int_{A_n} f(x)dx - \sum_n \int_{A_n} g(x)dx\right| \leqslant \varepsilon\mu(A)$, отсюда $\left|\sum_n \int_{A_n} f(x)dx - \int_A f(x)dx\right| \leqslant 2\varepsilon\mu(A)$. Доказали формулу с точностью до $2\varepsilon\mu(A)$. □

11. Эта теорема может быть обращена в следующем смысле.

Теорема. *Если $A = \coprod_n A_n$ и f интегрируема на каждом A_n, причем ряд*

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|dx$$

сходится, то интеграл слева существует и верна формула.

Здесь надо показать, что из сходимости ряда следует интегрируемость f на A. Тогда формула автоматически будет верна.

Сначала проведем доказательство для простых функций, потом для остальных. Пусть простая функция f принимает значения y_k на множествах B_k. Положим $A_{n,k} = A_n \bigcap B_k$, при каждом n

$$\int_{A_n} |f(x)|dx = \sum_k |y_k|\mu(A_{n,k}).$$

Поэтому

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|dx = \sum_n \sum_k |y_k|\mu(A_{n,k}).$$

Из условия о сходимости ряда слева следует сходимость ряда справа, суммы можно переставить:

$$\sum_n \sum_k |y_k|\mu(A_{n,k}) = \sum_k \sum_n |y_k|\mu(A_{n,k}) = \sum_k |y_k|\mu(B_k)$$

и ряд останется сходящимся, то есть f интегрируема на A.

В общем случае на каждом A_n аппроксимируем f интегрируемой простой $f_n : A_n \to \mathbb{R}$: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Тогда на всем A функция $g(x) = f_n(x), x \in A_n$ будет простой и $|g(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Теперь

$$\int_{A_n} |g(x)|d\mu \leqslant \int_{A_n} |f(x)|d\mu + \varepsilon\mu(A_n) \quad \Rightarrow \quad \sum \int_{A_n} |g(x)|d\mu \leqslant \sum \int_{A_n} |f(x)|d\mu + \sum \varepsilon\mu(A_n).$$

Ряды справа сходятся, поэтому ряд слева сходится, значит g — интегрируемая простая функция.

Мы приблизили f равномерно на A интегрируемой простой функцией, отсюда следует интегрируемость f на A. $\square$

12. **Неравенство Чебышева.** Оно должно быть на листке :)

$$\mu(\{x \in A : |f(x)| \geqslant C\}) \leq \frac{1}{C} \int_A |f(x)|dx.$$

Для доказательства надо положить $A_C = \{x \in A : |f(x)| \geqslant C\}$ и написать

$$\int_A |f(x)|dx = \int_{A_C} |f(x)|dx + \int_{A \setminus A_C} |f(x)|dx \geqslant \int_{A_C} |f(x)|dx \geqslant C\mu(A_C).$$

Следствие. *Если* $\int_A |f(x)|dx = 0$, *то* $f(x) \stackrel{a.e.}{=} 0$.

В самом деле, $\mu(\{|f(x)| > \frac{1}{n}\}) = 0$ в силу Чебышева, поэтому

$$\mu(\{f(x) \neq 0\}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f(x)| > \frac{1}{n}\}) = 0.$$

13. **Абсолютная непрерывность интеграла.** Пусть f суммируема на E. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall e \subset E : \ \mu(e) < \delta \ \text{ справедливо } \ \int_e |f(x)|d\mu < \varepsilon.$$

Это называется *абсолютная непрерывность интеграла Лебега* по множеству.

Абсолютная непрерывность f на отрезке — определение ($w(f,\Delta)$ — колебание f на Δ)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall N,(a_k,b_k):\ \mu(\coprod_{k=1}^{N}(a_k,b_k))<\delta \text{ справедливо } \sum_{k=1}^{N}w(f,(a_k,b_k))<\varepsilon.$$

Сказать, что канторова лестница не абсолютно непрерывна, что $C^1\in AC$. Сказать, что липшицева функция абсолютно непрерывна.

Доказательство абсолютной непрерывности. Для ограниченной f утверждение очевидно: $\delta=\varepsilon/\sup|f|$.

Положим $A_n=\{x\in E: n\leqslant|f(x)|<n+1\}$ и $B_k=\bigcup_{n=0}^{N}A_n$, $C_N=E\setminus B_N$. В силу счетной аддитивности интеграла

$$\int_E|f(x)|\,d\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)\,d\mu,$$

ряд справа сходится, поэтому при некотором достаточно большом N

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)\,d\mu=\int_{C_N}|f(x)|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta<\dfrac{\varepsilon}{2(N+1)}$. Если теперь $\mu(e)<\delta$, то

$$\int_e|f(x)|d\mu=\int_{e\bigcap B_N}|f(x)|d\mu+\int_{e\bigcap C_N}|f(x)|d\mu\leqslant\int_e(N+1)d\mu+\int_{C_N}|f(x)|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

14. **Интеграл как мера.** Пусть f — фиксированная неотрицательная суммируемая на E функция. Рассмотрим функцию множества

$$M(A)=\int_A f(x)\,d\mu.$$

Ясно, что эта функция определена на всех измеримых множествах, неотрицательна, σ-аддитивна. Иными словами, это новая, другая мера. Она удовлетворяет свойству $\mu(A)=0$, то $M(A)=0$. Обратное не верно, надо дополнительно предположить, что-то вроде $\mu(\{f\neq0\})=0$.

15. **Предельный переход под знаком интеграла.**

Вопрос: пусть последовательность интегрируемых функций $f_n(x)$ в каком-то смысле сходится к измеримой функции $f(x)$, когда будет

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx?$$

Контрпример: Пусть $f_n(x)=n,\ x\in(0,1/n)$, иначе $f=0$. Тогда $f_n\to0$ на $[0,1]$, однако

$$1=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\neq\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=0.$$

Лекция 3 (26 января 2015)

Итак, прошлая лекция была посвящена свойствам интеграла Лебега. Наряду с простыми утверждениями (например, неравенство Чебышева) были сформулированы более громоздкие утверждения об счетной аддитивности интеграла по множеству и теорема об абсолютной непрерывности интеграла.

В конце лекции был начат вопрос о **предельном переходе под знаком интеграла.**

Пусть последовательность интегрируемых функций $f_n(x)$ в каком-то смысле сходится к измеримой функции $f(x)$, когда будет

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu? \tag{1}$$

Был приведен контрпример, когда такое соотношение не выполнялось.

Такие теоремы для интеграла Римана основывались на равномерной сходимости, здесь все дело в другом. Равномерности сходимости никакой не нужно. Если все равномерно ограничено, то всегда можно менять интеграл с пределом.

Самая простая теорема. *Если сходимость равномерная, то* (1) *выполнено.*

Это очевидная терема. Если $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, то

$$\left|\int_E f_n\,d\mu - \int_E f\,d\mu\right| \leqslant \left|\int_A \big(f_n(x) - f(x)\big)d\mu\right| \leqslant \varepsilon\,\mu(A)$$

и все доказано. □

Заметим, что эта теорема верна только для $\mu(A) < \infty$. Мы еще будем отдельно рассматривать интегралы по множествам бесконечной меры, многие теоремы, переносятся со случая конечной меры на бесконечную, но не эта. Когда-то будет контрпример.

Теорема (Лебег). *Пусть* $f_n \xrightarrow{\mu} f$, *причем* $|f_n| \overset{a.e.}{\leqslant} K$, *тогда справедливо* (1).

Доказательство.

1) $|f| \overset{a.e.}{\leqslant} K$ (выберем подпоследовательность $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$ по теореме Рисса).

2) Пусть $\sigma > 0$, $A_n = \{x \in E, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$,

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|\,d\mu = \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|\,d\mu + \int_{E\setminus A_n} |f_n(x) - f(x)|\,d\mu.$$

3) Так как $\forall\sigma > 0$ справедливо $\mu(A_n) \to 0$ (это определение сходимости по мере!), то

$$\int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|\,d\mu \leqslant 2K\,\mu(A_n) \to 0.$$

Теперь из $\displaystyle\int_{E\setminus A_n} |f_n(x) - f(x)|\,d\mu \leqslant \sigma\,\mu(E)$ следует $\displaystyle\int_E |f_n(x) - f(x)|\,d\mu \leqslant 2K\,\mu(A_n) + \sigma\,\mu(E)$ и (1) доказано. □

Из этой теоремы естественно следует, что если $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ и $|f_n| \overset{a.e.}{\leqslant} K$, то справедливо (1).

16. **Теорема (Лебег).** *Пусть* $f_n \xrightarrow{\mu} f$*, причем* $|f_n(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} \varphi(x)$ *и* $\varphi \in L(A)$*. Тогда предельная функция интегрируема на* A *и справедливо* (1).

Замечание: достаточно сходимости почти всюду или сходимости поточечной.

1) В силу теоремы Рисса некоторая подпоследовательность f_{n_k} сходится почти всюду к f, поэтому $|f| \overset{a.e.}{\leqslant} \varphi$. Был мажорантный признак, по которому из $|f| \leqslant g$ и $g \in L(A)$ следовало $f \in L(A)$, очевидно, что из $|f| \overset{a.e.}{\leqslant} g$ и $g \in L(A)$ также следует $f \in L(A)$.

Без ограничения общности можно считать, что $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и f интегрируема на A (с точностью до некоторого фиксированного множества меры 0).

2) Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. По свойству абсолютной непрерывности интеграла, можно указать такое $\delta > 0$, что из $\mu(e) < \delta$ следует $\int_e \varphi\, d\mu < \varepsilon/3$.

3) При каждом $K > 0$ обозначим $B_K = \{x \in A : \varphi(x) \leqslant K\}$, тогда $A \setminus B_K = \{x \in A : \varphi(x) > K\}$ и по неравенству Чебышева

$$\mu(A \setminus B_K) \leqslant K^{-1} \int_A \varphi\, d\mu.$$

4) Выберем K, чтобы $\mu(A \setminus B_K) < \delta$, зафиксируем его, множество B_K также зафиксируется. По построению, $\int_{A\setminus B_K} \varphi\, d\mu < \varepsilon/3$.

5) На множестве B_K выполнены оценки $|f(x)|, |f_n| \leqslant K$.

6) На множестве B_K выполнены условия предыдущей теоремы о сходимости (где функции были ограничены). Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_K} f_n(x)\, d\mu = \int_{B_K} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu,$$

следовательно, для достаточно больших n

$$\left| \int_{B_K} (f_n(x) - f(x)) d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и

$$\left| \int_{A\setminus B_K} (f_n(x) - f(x)) d\mu \right| \leqslant \int_{A\setminus B_K} |f_n(x)|\, d\mu + \int_{A\setminus B_K} |f(x)|\, d\mu \leqslant 2 \int_{A\setminus B_K} \varphi(x)\, d\mu \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Поэтому для достаточно больших n верна оценка $\left| \int_A (f_n(x) - f(x)) d\mu \right| \leqslant \varepsilon$. □

17. **Теорема Бе́ппо Ле́ви.** *Пусть функции* f_n *интегрируемы,* $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ *при* $x \in A$ $(\mu(A) < \infty)$*, и пусть все их интегралы ограничены в совокупности:*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Тогда $f_n \xrightarrow{a.e.} f$*,* f *интегрируема на* A *и можно переставлять предел с интегралом.*

1) Без ограничения общности считаем все функции неотрицательными (иначе всё докажем для $f_n - f_1$).

2) Покажем, что $\mu(\Omega) = 0$, $\Omega = \{x \in E : f_n(x) \to \infty\}$. Зафиксируем $r > 0$, рассмотрим $\Omega_n = \{f_n(x) > r\}$, в силу неравенства Чебышева $\mu(\Omega_n) \leqslant Kr^{-1}$. В силу монотонности последовательности f_n множества Ω_n образуют вложенную цепочку: $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, поэтому $\mu(\bigcup \Omega_n) = \lim \mu(\Omega_n) \leqslant Kr^{-1}$.

Так как $\Omega \subset \bigcup \Omega_n$ при любом r, то $\mu(\Omega) = 0$.

3) Теперь $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, функция f почти всюду определена (конечна), полагаем $f(x) = 0$ на Ω.

4) Положим $A_k = \{f(x) \in [k-1, k)\}$, рассмотрим простую функцию $g(x) = k$, $x \in A_k$, $f \leqslant g \leqslant f + 1$. Докажем интегрируемость g.

5) Положим $B_s = \bigcup_{k=1}^s A_k$. На каждом B_s все функции f_n, f, q равномерно ограничены, поэтому

$$\int_{B_s} g(x)\,d\mu \leqslant \int_{B_s} (f(x)+1)\,d\mu = \mu(B_s) + \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)\,d\mu \leqslant \mu(A) + K.$$

6) Теперь все частичные суммы ряда $\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r)$ ограничены числом $\mu(A) + K$, значит ряд сходится, это по определению интегрируемость простой функции g.

7) $f_n \overset{a.e.}{\leqslant} g$, из теоремы Лебега следует перестановочность предела и интеграла. □

18. Очень хорошо выглядит **теорема Ле́ви для ряда**.

Пусть $\psi_n \geqslant 0$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\,d\mu < \infty$. Тогда ряд $\sum \psi_n$ сходится почти всюду и

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\,d\mu.$$

19. **Теорема (лемма) Фату.** *Если $f_n \overset{a.e.}{\to} f(x)$ на A и $f_n \geqslant 0$, то из*

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K \qquad \textit{следует} \qquad \int_A f(x)\,d\mu \leqslant K.$$

Положим $g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k(x)$, это измеримая функция (мы это проходили), так как $g_n \leqslant f_n$, то g_n — интегрируемая и

$$\int_A g_n\,d\mu \leqslant \int_A f_n\,d\mu \leqslant K.$$

По построению последовательность g_n монотонная возрастающая, по теореме Ле́ви почти всюду существует предел $g(x) = \lim g_n(x)$. Справедливо равенство $g \overset{a.e.}{=} f$ (в каждой точке x, где сходятся числовая последовательность $f_n(x)$ сходится $g_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_n(x)$ и пределы равны), поэтому

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A g(x)\,d\mu = \int_A \lim g_n\,d\mu = \lim \int_A g_n\,d\mu \leqslant K.$$

□

20. Пусть (вместо оценки на f_n) f_n имеют *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall e \subset E :\ \mu(e) < \delta \ \text{ справедливо } \left| \int_e f_n(x)\,d\mu \right| < \varepsilon.$$

Тогда такая же теорема называется **теорема Вита́ли**.

Если выполнены условия теорем Лебега с мажорантой, то f_n имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Теорема Вита́ли. *Пусть f_n — последовательность функций, сходящаяся к f по мере на A ($\mu(A) < \infty$). Пусть f_n имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Тогда f суммируема и можно переставлять интеграл с пределом.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$, определим δ по условию равностепенной абсолютной непрерывности. Положим $e_n = \{x \in A : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$. Так как $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то $\mu(e_n) \to 0$. Пусть при $n > N$ справедливо $\mu(e_n) < \delta$.

По предположению $\int_{e_n} |f_k(x)|\, d\mu < \varepsilon$ для всех k, в силу леммы Фату $\int_{e_n} |f(x)|\, d\mu \leqslant \varepsilon$. Теперь при $n > N$

$$\int_A |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = \int_{e_n} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu + \int_{A\setminus e_n} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int_{e_n} |f_n(x)|\, d\mu + \int_{e_n} |f(x)|\, d\mu + \int_{A\setminus e_n} \varepsilon\, d\mu \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \int_A \varepsilon\, d\mu = \varepsilon(2 + \mu(A)).$$

Заметим еще, что f суммируема, так как $f = (f - f_n) + f_n$, здесь оба слагаемых суммируемы. $\square$

21. Теперь займемся **связью между интегралом Римана и Лебега**. У нас пока что даже не было явной теоремы о том, что почти всюду непрерывная функция (именно такие интегрируемы по Риману) измеримая. Я сейчас передокажу теорему Лебега, а заодно получу еще теорему о том, что если у ограниченной функции существует интеграл Римана, то существует и интеграл Лебега и они равны.

Теорема (Лебег). *Ограниченная функция на промежутке интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ множество её точек разрыва имеет меру 0. Если функция измерима по Риману, то она измерима, интегрируема и интеграл Лебега равен интегралу Римана.*

Доказательство представляем для отрезка, но оно совершенно нормально переносится на $\mathbb{R}^n$.

22. **Доказательство теоремы Лебега.** В начале не говорим, в какую сторону мы ведём доказательство. Рассмотрим окрестность $O_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap [a, b]$ точки x_0. Пусть

$$M_\delta(x_0) = \sup_{x \in O_\delta} f(x), \qquad m_\delta(x_0) = \inf_{x \in O_\delta} f(x).$$

Очевидно, $m_\delta(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M_\delta(x_0)$. По переменной δ обе функции монотонны, поэтому существуют пределы (они называются верхняя функция Бэра и нижняя функция Бэра для f)

$$m(x) = \lim_{\delta \to +0} m_\delta(x), \qquad M(x) = \lim_{\delta \to +0} M_\delta(x),$$

очевидны неравенства $m_\delta(x) \leqslant m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) \leqslant M_\delta(x)$.

Теорема Бэра. *Пусть f — ограниченная функция. Непрерывность f в точке x_0 эквивалентна равенству $M(x_0) = f(x_0) = m(x_0)$.*

На лекции решили, что можно не доказывать, вот в обе стороны простое доказательство.

Пусть функция непрерывна $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Иными словами, при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ справедливо $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Поэтому

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant m_\delta(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leqslant m(x_0) \leqslant M(x_0) \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Отсюда ввиду произвольности ε следует $M(x_0) = m(x_0)$.

Теперь пусть $M(x_0) = m(x_0) = f(x_0)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, и найдем $\delta > 0$:

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leqslant m(x_0) = M(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Отсюда $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \Rightarrow$ непрерывность.

Теорема Бэра доказана, продолжим доказательство теоремы Лебега. □

23. Рассмотрим последовательность разбиений

$$a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k-1}^k < x_{n_k}^k = b$$

причем при $k \to \infty$ мелкость стремиться к нулю: $\lambda_k = \max_\ell(x_{\ell+1}^k - x_\ell^k) \to 0$. Пусть

$$m_\ell^k = \inf_{x \in (x_\ell^k, x_{\ell+1}^k)} f(x), \qquad M_\ell^k = \sup_{x \in (x_\ell^k, x_{\ell+1}^k)} f(x).$$

Положим $\varphi_k(x) = m_\ell^k$, $\Phi_k(x) = M_\ell^k$, $x \in (x_\ell^k - x_{\ell+1}^k)$ и $\varphi_k(x) = \Phi_k(x) = 0$, если $x = x_\ell^k$.

Лемма. *Если $x \neq x_\ell^k$, то $\varphi_k(x) \to m(x)$ и $\Phi_k(x) \to M(x)$.*

Доказательство леммы. Доказываем для φ, для Φ — аналогично. Точка x не является точкой разбиения. Поэтому при каждом k она принадлежит какому-то интервалу $(x_{\ell_k}^k - x_{\ell_k+1}^k)$, так как мелкость λ_k стремится к нулю, то $\varphi_k(x) = m_{\ell_k}^k \to m(x)$. □

Следствие 1. *Функции Бэра m и M измеримы.*

Множество точек разбиения счетно (в $\mathbb{R}^n$ — нет), имеет меру ноль, поэтому $\varphi_k(x) \overset{a.e.}{\to} f(x)$, ступенчатые функции φ_k измеримы, значит и $m(x)$ измерима. □

Следствие 2. $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_k(x)\,d\mu \to \int_{[a,b]} m(x)\,d\mu, \qquad \int_{[a,b]} \Phi_k(x)\,d\mu \to \int_{[a,b]} M(x)\,d\mu.$

Следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Теперь заметим, что $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_k(x)\,d\mu$ — нижняя сумма Дарбу, а $\displaystyle\int_{[a,b]} \Phi_k(x)\,d\mu$ — верхняя сумма.

Теперь разность между суммами Дарбу стремиться к интегралу $J = \displaystyle\int_{[a,b]} (M(x) - m(x))\,d\mu$.

Предел разностей сумм Дарбу равен нулю, когда существует интеграл Римана, $J = 0 \Leftrightarrow M - m \overset{a.e.}{=} 0 \Leftrightarrow$ множество точек разрыва имеет меру нуль. □

Из изложенных конструкций следует вторая часть теоремы: если у функции есть интеграл Римана, то есть и интеграл Лебега, при этом они равны. В самом деле, интеграл Римана - это предел интегральных сумм Дарбу, верхних и нижних, было показано, что это сходится к интегралу от функций Бэра, которые эквивалентны самой функции. □

Лекция 4 (02 февраля 2015)

На прошлой лекции мы

1) Доказали несколько теорем о том, когда можно менять интеграл Лебега и предел местами. Напомню только названия теорем: Лебега, Леви, Фату, Витали.

2) Доказали теорему: ограниченная функция интегрируема по Риману, если и только если множество точек разрыва имеет меру 0. Доказали теорему: если ограниченная функция интегрируема по Риману, то ее интеграл по Риману совпадает с интегралом по Лебегу.

24. **Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.**

Пусть есть множество X. Последовательность измеримых множеств $X_n \subset X$ называется *исчерпывающей для* X, если $\mu(X_n) < \infty$, $X_n \subset X_{n+1}$, $X = \bigcup X_n$.

Если X — измеримое множество и $\mu(X) < \infty$, то примером исчерпывающей для X последовательности является последовательность $X_n = X$.

Для дальнейшего интересен случай $\lim \mu(X_n) = \infty$. Говорят, что множество, для которого есть исчерпывающая последовательность и $\lim \mu(X_n) = \infty$ имеет бесконечную меру. Тогда ещё говорят, что множество имеет *σ-конечную* меру. Главные примеры: все пространство $\mathbb{R}^n$, квадрант $\mathbb{R}^n_+$.

Существование исчерпывающей последовательности X_n это то же самое, что существование разложения $X = \coprod A_n$ множества X на измеримые множества A_n конечной меры: $A_1 = X_1$, $A_n \coprod X_{n+1} \setminus X_n$, $n = 2, 3, \ldots$

Определение. *Измеримая функция называется интегрируемой на X, она суммируема на каждом измеримом подмножестве конечной меры и если* ***для любой*** *исчерпывающей X последовательности X_n существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f\, d\mu$$

и все такие пределы совпадают. Этот предел называется интегралом от f по X.

Вместо равенства в определении можно говорить так: измеримая функция f называется интегрируемой на X, она суммируема на каждом измеримом подмножестве конечной меры и если **для любого** разложения $X = \coprod A_n$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu$$

сходится и все такие пределы совпадают.

В частности, так как только абсолютно сходящиеся ряды можно переставлять, из этого следует, что ряд должен абсолютно сходится.

Это определение корректно: если $\mu(X) < \infty$, то $\int_X f\, d\mu = \int_{X_n} f\, d\mu$.

Для доказательства этого, например, достаточно воспользоваться свойством счетной аддитивности интеграла.

Еще раз подчеркну, что предел должен существовать именно для любой исчерпывающей последовательности и все пределы должны совпадать.

25. Пусть $X = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n,\ \mu(A_n) < \infty$ — разбиение множества X на множества конечной меры.

Теорема. *Функция f интегрируема на X, если и только если сходится ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|\, d\mu$.

Естественно, в формулировке теоремы предполагается, что f интегрируема на каждом A_n.

Эта теорема означает, что для сходимости интеграла по множеству бесконечной меры, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл от модуля, по какому-то одному разложению (по какой-то одной исчерпывающей последовательности).

Лемма 1. *Если функция f интегрируема на X, то ряд $\sum \int_{A_n} |f| d\mu$ сходится.*

Положим $X^{\pm} = \{x \in X, \pm\,\mathrm{sign}(f(x)) = 1\}$ и $X^0 = \{x \in X, f(x) = 0\}$, это измеримые множества в том смысле, что пересечение любого измеримого множества (конечной меры) с любым из них — измеримое.

По предположению о интегрируемости f на X, сходятся знакопостоянные ряды

$$\sum \int_{A_n \bigcap X^+} f\, d\mu, \qquad \sum \int_{A_n \bigcap X^-} f\, d\mu.$$

Если бы эти ряды не сходились каждый в отдельности, то по теореме Римана мы бы могли выбрать исчерпывающую последовательность множествами X_n, составленными из объединений множеств $A_k \bigcap X^+$ и $A_k \bigcap X^-$, так, чтобы ряд $\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f\, d\mu$ сходился к произвольному числу.

Из сходимости знакопостоянных рядов следует искомая сходимость ряда $\sum \int_{A_n} |f| d\mu =$. $\square$

Лемма 2. *Если ряд $\sum \int_{A_n} |f| d\mu$ сходится, то сходится (и к тому же пределу) такой же ряд $\sum \int_{B_n} |f| d\mu$, построенный по любому другому разбиению $X = \coprod_{n=1}^{\infty} B_n,\ \mu(B_n) < \infty$.*

Эта лемма следует из теорем о двойных рядах. Напомню: есть двойной ряд $\sum_{m,n} a_{m,n}$. Рассмотрим еще последовательные ряды $\sum_m \sum_n a_{m,n}$, $\sum_n \sum_m a_{m,n}$, и произвольный ряд из членов двойного ряда $\sum_k a_{m(k),n(k)}$. Если один из этих рядов сходится, то сходятся все эти ряды и их суммы совпадают.

Рассмотрим счетное разбиение

$$X = \coprod_{n,k=1}^{\infty} A_n \bigcap B_k,$$

Из счетной аддитивности интеграла по множеству следуют равенства

$$\int_{A_n} |f|\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_n \bigcap B_k} |f|\, d\mu \quad \text{и} \quad \int_{B_k} |f|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \bigcap B_k} |f|\, d\mu.$$

Повторный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_n \bigcap B_k} |f|\, d\mu$$

по условию сходится, значит сходится и двойной ряд, и другой повторный, который равен

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} |f|\, d\mu,$$

причем суммы всех рядов совпадают. □

Лемма 3. *Пусть $\sum \int_{A_n} |f| d\mu < \infty$. Тогда ряд $\sum \int_{A_n} f\, d\mu$ абсолютно сходится, для произвольного разбиения $X = \coprod_{n=1}^{\infty} B_n$, $\mu(B_n) < \infty$ ряды $\sum \int_{B_n} |f| d\mu$ и $\sum \int_{B_n} f\, d\mu$ также сходятся и*

$$\sum \int_{A_n} f\, d\mu = \sum \int_{B_n} f\, d\mu.$$

Лемма 3 — это полный аналог леммы 2, так как все утверждения о двойных рядах справедливы не только для положительных рядов, но и для абсолютно сходящихся знакопеременных. □

Таким образом, для сходимости интеграла по множеству бесконечной меры необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum \int_{A_n} |f| d\mu$ был конечным при каком-то одном разбиении исходного множества X на подмножества A_n конечной меры.

26. Для интеграла Лебега по множеству бесконечной меры справедливы многие теоремы, которые мы формулировали и доказывали для множеств конечной меры.

Например, теоремы о перестановке интеграла и предела. При этом у нас были 2 теоремы Лебега: одна про $|f_n| \leqslant K$, а другая — про $|f_n| \leqslant \varphi$. Аналог первой теоремы для множеств бесконечной меры не выполняется, так как константа не интегрируема на множестве бесконечной меры. А аналоги второй теоремы, теорем Леви и Фату выполняются.

Можно передоказывать все теоремы, а можно воспользоваться следующей конструкцией.

Конструкция, как сводить интегралы по бесконечной мере к интегралам по конечной мере.

Берем последовательность A_n, $\mu(A_n) < \infty$, $A = \coprod_n A_n$. Положим $a_n = 2^n \mu(A_n)$ и введем новую меру $\lambda(B) = \sum_n a_n^{-1} \mu(B \bigcap A_n)$. Очевидные свойства: если B измеримо по μ, то B измеримо и по λ; $\lambda(A) = 1$.

Положим $g(x) = \sum_n a_n \chi_{A_n}(x)$.

Лемма 1. Пусть $\mu(B) < \infty$, $h : B \to \mathbb{R} \in L_\mu(B) \;\Leftrightarrow\; hg \in L_\lambda(B)$. При этом $\int_B h\, d\mu = \int_B hg\, d\lambda$.

Лемма 2. Пусть $\mu(B) = \infty$, $h : B \to \mathbb{R} \in L_\mu(B) \;\Leftrightarrow\; hg \in L_\lambda(B)$. При этом $\int_B h\, d\mu = \int_B hg\, d\lambda$.

27. Тут опять возникает **одновременно сходство и различие с интегралом Римана**: не бывает условно сходящихся интегралов Лебега (Пример, аналог интеграла Дирихле: $\sin x/x$ на $\mathbb{R}^+$ не интегрируема по Лебегу!).

С этой ситуацией мы уже сталкивались, когда рассматривали интегралы Римана по пространству. Там тоже интеграл был по неориентированному множеству и он тоже не мог быть условно сходящимся.

Еще раз повторяю. Бывают два типа интегралов Римана. Одни — по ориентированным хорошим множествам. С этих интегралов мы начинали год назад. Интеграл «от a до b», который был минус интеграл «от b до a». Бывают аналогичные интегралы по гладким ориентированным (нормалями) поверхностями. Другие — по неориентированным множествам. Они принципиально другие. Вот ровно такие интегралы Римана мы рассматривали в конце 1-го курса.

Интегралы Лебега в этом смысле похожи на интегралы Римана по неориентированным множествам. Особенно это хорошо видно именно для интегралов по неограниченным множествам бесконечной меры.

Модуль от функции f в критерии нужны обязательно! Приведу пример множества A бесконечной меры, и последовательности $f_n \rightrightarrows f$ на A, такой, что $\int_A f_n\,d\mu \to 0$, но $\int_A f\,d\mu$ не существует. Положим $A = \mathbb{R}^+$,

$$f_1(x) = 1,\ \ x \in [0,1);\ -1,\ x \in [1,2];\ 0,\ x > 2;$$
$$f_2(x) = f_1,\ x \in [0,2]; 1/2,\ x \in (2,4);\ -1/2,\ x \in [4,6];\ 0,\ x > 6;$$
$$f_3(x) = f_2,\ x \in [0,6]; 1/4,\ x \in (6,10);\ -1/4,\ x \in [10,14];\ 0,\ x > 14; \ldots$$

В этом случае предельная функция f состоит из ступенек чередующихся знаком, интеграл по каждой ступеньке равен 1, поэтому f не интегрируемая.

28. **Срезки функций и другие подходы к определению интеграла Лебега.** С каждой измеримой функцией $f \geqslant 0$ свяжем её срезку

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N; \\ N, & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

Очевидно, при каждом N функция $[f(x)]_N$ измерима.

Ещё раз обсудить определение интеграла Лебега. Сказать, что в разных книжках определения разные.

I. Последовательность $[f(x)]_N$ монотонна: $[f(x)]_1 \leqslant [f(x)]_2 \leqslant \ldots \leqslant [f(x)]_N \leqslant \ldots$ поэтому

$$\int_E [f(x)]_1\,d\mu \leqslant \int_E [f(x)]_2\,d\mu \leqslant \ldots \leqslant \int_E [f(x)]_N\,d\mu \leqslant \ldots$$

Таким образом, существует конечный или бесконечный предел последовательности $\int_E [f(x)]_N\,d\mu$, он называется интегралом

$$\int_E f(x)\,d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_E [f(x)]_N\,d\mu$$

от неограниченной неотрицательной измеримой функции. Неотрицательная функция называется суммируемой, если интеграл конечный.

Далее определяем интеграл Лебега для функций произвольного знака.

II. Иногда определяют сначала для неотрицательных и ограниченных, или просто для ограниченных, а потом переходят к общему случаю.

1. Интеграл от простой функции существует, если некий ряд абсолютно сходится. То есть, сходится его положительная часть и отрицательная часть. Мы его определили «сразу», а можно было определить для положительных функций отдельно, и положить

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A f_+(x)\,d\mu - \int_A f_-(x)\,d\mu.$$

2. Есть ограниченная неотрицательная функция. Её интеграл можно определить как предел конечных интегральных сумм или как равномерный предел функций, принимающих конечное множество значений. Это получится то же самое определение, что и общее. Просто в общем определении был ряд, а тут будет предел конечных интегральных сумм, тот же ряд.

3. Функция интегрируема, если и только если оба множества $\int_{E^+}[f]_N d\mu$, $\int_{E^-}[f]_N d\mu$ ограничены, при этом

$$\int_E f d\mu = \lim \int_{E^+}[f]_N d\mu - \lim \int_{E^-}[f]_N d\mu.$$

III. Обсудить философию несобственного интеграла Римана на отрезке и интеграла Лебега. Если суммируемая функция подходит еще и под несобственный интеграл Римана, то этот интеграл сходится. Но суммируемость — это существенно более общее понятие!

Измеримая функция может быть неограниченной на плотном множестве и все равно быть суммируемой. Никакого несобственного интеграла Римана при этом не бывает.

29. Определение интеграла Лебега сразу для множеств любой меры. Определяем простую функцию — функцию f со счетным или конечным множеством значений f_n.

Пишем для нее интеграл-ряд $\sum_n f_n \mu(f^{-1}(f_n))$ и говорим, что функция интегрируема, если все слагаемые конечные и ряд абсолютно сходится.

При этом в слагаемом $0 \cdot \mu(f^{-1}(0))$ мера может быть бесконечной, слагаемое полагается равным нулю. Естественно, предполагается, что меры остальных прообразов конечные.

Функция f неотрицательная называется интегрируемой на A, если величина

$$\sup\{\int_A g\, d\mu : g \leqslant f,\ g\ -\ \text{простая интегрируемая функция}\}.$$

Функция, принимающая разные знаки, считается интегрируемой, если интегрируемы её положительная и отрицательные части, интеграл — разность интегралов.

Теорема Фубини

Произведение систем множеств.

Пусть даны 2 пространства со счетно аддитивными конечными мерами: $(X, \mathbf{\Sigma}_X, \mu_X)$ и $(Y, \mathbf{\Sigma}_Y, \mu_Y)$.

Рассмотрим множество $X \times Y$ — множество пар $(x, y),\ x \in X, y \in Y$.

Рассмотрим систему $R = R(X, Y)$ множеств $A_X \times A_Y,\ A_X \in \mathbf{\Sigma}_X, A_Y \in \mathbf{\Sigma}_Y$.

Утверждение. *Система R является полукольцом.*

Для того, чтобы это доказать, надо проверить, что $A, B \in R \ \Rightarrow\ A \bigcap B \in R$ и что $A, B \in R,\ A \subset B \ \Rightarrow\ B \setminus A = \coprod B_k,\ B_k \in R$.

Оба утверждения практически очевидны: если

$$A = A_X \times A_Y,\ B = B_X \times B_Y,\ A_X \in \mathbf{\Sigma}_X,\ A_Y \in \mathbf{\Sigma}_Y,$$

то

$$A \bigcap B = (A_X \bigcap B_X) \times (A_Y \bigcap B_Y).$$

Если дополнительно $A \subset B$, то $A_X \subset B_X$ и $A_Y \subset B_Y$, поэтому

$$B \setminus A = (B_X \setminus A_X) \times (B_Y \setminus A_Y) \coprod A_X \times (B_Y \setminus A_Y) \coprod (B_X \setminus A_X) \times A_Y.$$

$\square$

Теперь определим на полукольце R меру по формуле $\mu(A_X \times A_Y) = \mu_X(A_X)\mu_Y(A_Y)$.

Лемма. *Мера μ в самом деле мера: это аддитивная функция множества.*

Пусть $A = \coprod A^i,\ A = A_X \times A_Y,\ A^i = A^i_X \times A^i_Y,\ A_X, A^i_X \in \mathbf{\Sigma}_X,\ A_Y, A^i_Y \in \mathbf{\Sigma}_Y$, причем i пробегает конечное число значений. Тогда найдутся такие множества $B^k_X \in \mathbf{\Sigma}_X$ и $B^n_Y \in \mathbf{\Sigma}_Y$, что

$$A_X = \coprod B^k_X,\ A_Y = \coprod B^n_Y,\ A^i_X = \coprod B^{k_i}_X,\ A^i_Y = \coprod B^{n_i}_Y.$$

Здесь через $\coprod B^{k_i}_X$ и $\coprod B^{n_i}_Y$ обозначены дизъюнктные наборы некоторых B^k_X и B^n_Y.

Теперь напишем

$$\mu(A) = \mu_X(A_X)\mu_Y(A_Y) = \sum_{k,n} \mu_X(B^k_X)\mu_Y(B^n_Y)$$

и

$$\sum_i \mu(A^i) = \sum_i \mu_X(A^i_X)\mu_Y(A^i_Y) = \sum_i \sum_{k_i,n_i} \mu_X(B^{k_i}_X)\mu_Y(B^{n_i}_Y).$$

Теперь заметим, что в последней сумме и в сумме для $\mu(A)$ стоят одни и те же слагаемые. $\square$

Проиллюстрировать лемму картинкой.

Лекция 5 (09 февраля 2015)

На прошлой лекции обсудили интегралы по множествам бесконечной меры, обсудили некоторые альтернативные варианты введения интеграла Лебега и начали теорему Фубини.

Есть множества со счетно аддитивными конечными мерами: $(X, \mathbf{\Sigma}_X, \mu_X)$ и $(Y, \mathbf{\Sigma}_Y, \mu_Y)$.

Рассмотрим множество $X \times Y$ — множество пар (x, y), $x \in X, y \in Y$.

Рассмотрим систему $R = R(X, Y)$ множеств $A_X \times A_Y$, $A_X \in \mathbf{\Sigma}_X, A_Y \in \mathbf{\Sigma}_Y$. Увидели, что это — полукольцо.

Ввели меру формулой $\mu(A_X \times A_Y) = \mu_X(A_X)\mu_Y(A_Y)$, доказали аддитивность. Теперь нужно доказать счетную аддитивность меры μ. Пусть

$$A = \coprod A^n, \ A = A_X \times A_Y, \ A^n = A_X^n \times A_Y^n, \ A_X, A_X^n \in \mathbf{\Sigma}_X, \ A_Y, A_Y^n \in \mathbf{\Sigma}_Y,$$

причем n пробегает счетное множество значений.

Положим для $x \in X$

$$f_n(x) = \begin{cases} \mu_Y(A_Y^n), & \text{если} \quad x \in A_X^n; \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A_X^n. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $x \in A_X$

$$\sum_n f_n(x) = \mu_Y(A_Y).$$

(здесь нарисовать картинку-разбиение и объяснить почему последнее равенство!)

Поэтому монотонная последовательность частичных сумм ряда $\sum f_n(x)$ ограничена и удовлетворяет условиям теоремы Леви, можно поменять предел (в нашем случае сумму ряда) с интегралом:

$$\sum_n \int_{A_X} f_n(x)\, d\mu_X(x) = \int_{A_X} \sum_n f_n(x)\, d\mu_X(x) = \int_{A_X} \mu_Y(A_Y)\, d\mu_X(x) = \mu_X(A_X)\mu_Y(A_Y) = \mu(A).$$

А с другой стороны

$$\int_{A_X} f_n(x)\, d\mu_X(x) = \int_{A_X} \mu_Y(A_Y^n)\, d\mu_X(x) = \mu_Y(A_Y^n)\mu_X(A_X^n) = \mu(A^n),$$

отсюда следует, что $\sum \mu(A^n) = \mu(A)$. $\square$

Отсюда следует, что если мы продолжим по конструкции Лебега меру с полукольца до всех измеримых множеств из $X \times Y$, то она получится счетно аддитивная. Еще раз, берём полукольцо (как бы прямоугольники), по нему строим кольцо (как бы элементарные множества), Теперь строим внешнюю меру, она получится счетно полуаддитивная, по ней строим меру обычную.

Естественно, то, что я рассказал для произведения 2х пространств с мерой, справедливо и для произведения любого конечного их количества.

Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений.

Пусть есть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$, она на обычной плоскости порождает криволинейную трапецию $G = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$.

Площадь (мера) такой трапеции равна, как мы знаем, интегралу от f по отрезку $[a, b]$:

$$\mu(G) = \int_{[a,b]} f(x)\, dx.$$

Обратим внимание, что $f(x_0)$ — это в точности мера сечения трапеции G прямой $x = x_0$.

Ближайшая задача — перенести такой способ измерения площадей на произвольные меры.

Напоминаю: мера на σ-алгебре называется полной, если любое подмножество меры 0 измеримо (естественно, его мера тоже 0). Пусть меры на X и на Y — полные и конечные.

Пусть $A \subset X \times Y$ — μ-измеримое множество.

Введем обозначения $A(x_0) = \{y \in Y : (x_0, y) \in A\}, \quad A(y_0) = \{x \in X : (x, y_0) \in A\}$. Геометрически это сечения множества A «гиперплоскостями» $x = x_0$ и $y = y_0$.

Теорема. *В перечисленных предположениях справедливо равенство*

$$\mu(A) = \int_X \mu_Y(A(x))\, d\mu_X(x) = \int_Y \mu_X(A(y))\, d\mu_Y(y).$$

Заметим, что в теорему автоматически включается утверждение о том, что функция

$$\varphi(x) = \mu_Y(A(x))$$

почти всюду (по мере μ_X) определена (множества $A(x)$ измеримы по мере μ_Y) и измерима. Без этого формула из теоремы не имеет смысла.

Заметим также, что фактически интегрирование берется не по X и Y, а только по их части.

Схема доказательства.

1) Доказывать будем только первое из равенств.

2) Сначала заметим, что из $A = B \coprod C$ и справедливости вывода теоремы отдельно для двух из трех множеств A, B, C следует справедливость теоремы для третьего.

3) Для «прямоугольников» (множеств A вида $A_X \times A_Y$) утверждение теоремы очевидно.

4) Отсюда будет следовать справедливость теоремы для всех «элементарных множеств», то есть множеств, составленных из конечного числа прямоугольников, эти элементарные множества образуют алгебру, порожденную прямоугольниками.

5) Последний шаг — измеримое множество представим в виде дизъюнктного объединения множества меры 0 и хорошего множества, правильно сконструированного по элементарным множествам с помощью счетных конструкций.

6) Для множества меры 0 теорема очевидна, для хорошего множества, о котором я говорил, теорема следует из теоремы Ле́ви.

Доказательство. Для «прямоугольников» $A = A_X \times A_Y$ равенство из теоремы очевидно: оно сводится к $\mu(A) = \mu_X(A_X)\,\mu_Y(A_Y)$.

Без труда переносится равенство и для алгебры R, порожденной множеством «прямоугольников»: каждое такое множество есть дизъюнктное объединение конечного набора «прямоугольников».

Для того, чтобы перенести формулу на произвольные измеримые множества, воспользуемся леммой. Похожую лемму мы разбирали в прошлом семестре: каждое измеримое множество есть борелевское множество и множество меры 0. Или множество типа G_δ и множество меры 0. Вот сейчас я расскажу похожую лемму. Это лемма не для произведений, а для любой меры, построенной по лебеговской схеме из полукольца-алгебры.

Лемма. *Пусть мера μ построена как продолжение меры на алгебре R. Для любого μ-измеримого множества A существует множество $B \supset A$, такое что $\mu(A) = \mu(B)$ и*

$$B = \bigcap B_n, \quad B_1 \supset B_2 \supset \ldots; \qquad B_n = \bigcup B_n^k, \quad B_n^1 \subset B_n^2 \subset \ldots,$$

причем $B_n^k \in R$.

По определению для каждого n измеримое множество A можно включить в объединение $C_n = \bigcup_k \Delta_{n,k}$, $\Delta_n \in R$ такое, что

$$\mu(A) \leqslant \mu(C_n) \leqslant \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Положим $B_n = \bigcap_{k=1}^n C_n$, очевидно, множества B_n имеют вид $\bigcup_s \delta_{n,s}$, где $\delta_{n,s} \in R$ (на самом деле $\delta_{n,s}$ — это прямоугольники). Положим $B_n^k = \bigcup_{s=1}^k \delta_{n,s}$, получим требую систему множеств.

Равенство $\mu(A) = \mu(B)$ очевидно следует из построения. □

Вернемся к теореме.

Утверждение теоремы справедливо для множеств B_n^k. Рассмотрим множества $B_n^k(x) \subset Y$ — сечения множеств B_n^k в точке x и построим по ним функции $\varphi(x; B_n^k) = \mu_Y(B_n^k(x))$. Очевидно, что

$$\varphi(x; B_n^1) \leqslant \varphi(x; B_n^2) \leqslant \ldots; \qquad \lim_{k\to\infty} \varphi(x; B_n^k) = \varphi(x; B_n),$$

где $\varphi(x; B_n) = \mu_Y(B_n(x))$. По теореме Ле́ви утверждение теоремы

$$\mu(B_n) = \int_X \mu_Y(B_n(x))\, d\mu_X(x)$$

справедливо каждого множества B_n. Равенства возникают такие: $\mu(B_n^k) = \int_X \mu_Y(B_n^k(x))\, d\mu_X(x)$ так как $B_n^k \in R$, а для множеств из R теорема верна. Теперь

$$\mu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \int_X \mu_Y(B_n^k(x))\, d\mu_X(x) = \int_X \lim_{k\to\infty} \mu_Y(B_n^k(x))\, d\mu_X(x) = \int_X \mu_Y(B_n(x))\, d\mu_X(x).$$

Теперь заметим, что последовательность функций $\varphi(x; B_n)$ снова монотонная и к ней также может быть применена теорема Ле́ви:

$$\varphi(x; B_1) \geqslant \varphi(x; B_2) \geqslant \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(x; B_n) = \varphi(x; B).$$

Таким образом, утверждение теоремы справедливо для множества B.

Осталось разобраться с множеством $B \setminus A$ нулевой меры. Для такого множества можно построить своё $\tilde{B}$ по лемме. Для этого множества утверждение теоремы справедливо, слева в формуле стоит $\mu(B \setminus A) = 0$, справа равенство $\int_X \mu_Y(\tilde{B}(x))\, d\mu_X(x) = 0$, то есть $\mu_Y(\tilde{B}(x)) = 0$ почти всюду. Но $(B \setminus A) \subset \tilde{B}$, поэтому $(B \setminus A)(x) \subset \tilde{B}(x)$, значит $\mu_Y((B \setminus A)(x)) = 0$ почти всюду. Значит, для множества меры 0 утверждение теоремы справедливо, теорема полностью доказана. □

Рассмотрим важный частный случай, когда Y — это числовая прямая, $M \in X$ — μ_X-измеримое множество, $f : M \to \mathbb{R}^+$ — неотрицательная интегрируемая на M функция. Пусть

$$A = \{(x, y) : x \in M, y \in [0, f(x)]\}.$$

Тогда $\mu_Y(A(x)) = f(x)$ при $x \in M$ и $\mu_Y(A(x)) = 0$ при $x \notin M$. Основная формула имеет вид

$$\mu(A) = \int_M f(x)\, d\mu_X(x).$$

Это привычная формула для площади криволинейной трапеции под графиком функции.

Утверждение. *Интеграл Лебега от $f \geqslant 0$ равен мере $\mu_X \times \mu_{\mathbb{R}}$ множества A.*

Теорема Фубини. *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по мере $\mu = \mu_X \times \mu_Y$ на измеримом множестве $A \subset X \times Y$, тогда*

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A(x)} f(x, y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Y \left(\int_{A(y)} f(x, y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Утверждение теоремы включает в себя существование внутренних интегралов при почти всех значениях требуемых переменных.

Предыдущая теорема — это как раз теорема Фубини для $f \equiv 1$.

Доказательство теоремы Фубини проведем для случая неотрицательной f. Общий случай, очевидно, следует из неотрицательного.

Сначала заметим, что вот мы рассматривали произведения двух мер в пространстве $X \times Y$. А можно точно так же рассматривать произведения трех мер в пространстве $U = X \times Y \times Z$. При этом мера μ_U может быть определена как произведение на полукольце параллелепипедов, а можно сначала определить меру на произведении двух пространств, а потом добавить третье пространство, это будет все равно.

Рассмотрим пространство $U = X \times Y \times \mathbb{R}$ троек (x, y, r) и меру λ на нём — произведение мер $\mu_X, \mu_Y, \mu_{\mathbb{R}}$.

В U определим множество $W = \{(x, y, r) : (x, y) \in A,\ r \in [0, f(x, y)]\}$. В силу сформулированного утверждения

$$\lambda(W) = \int_A f(x, y)\, d\lambda.$$

С другой стороны по теореме

$$\lambda(W) = \int_X \xi\big(W(x)\big)\, d\mu_X,$$

где ξ — это произведение мер $\mu_Y \times \mu_{\mathbb{R}}$, а $W(x)$ — это сечение множества W, множество тех пар (y, r), для которых $(x, y, r) \in W$. По той же теореме

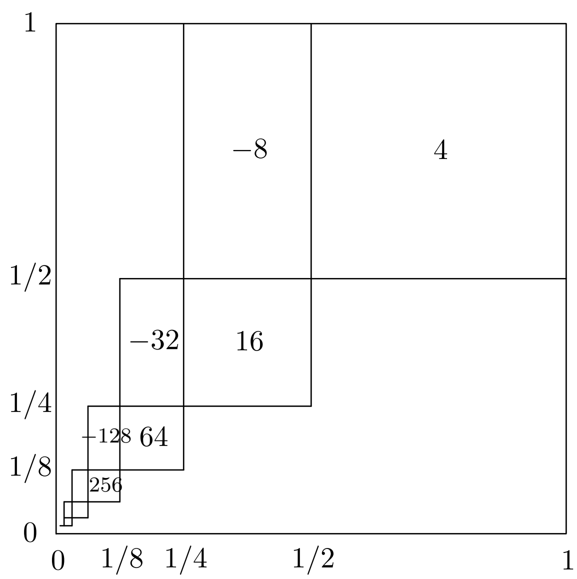
$$\xi(W(x)) = \int_{A(x)} f(x, y)\, d\mu_Y.$$

Из приведенных формул следует равенство $\displaystyle\int_A f(x, y) d\mu = \int_X \left(\int_{A(x)} f(x, y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X.$ $\square$

Обратное утверждение к теореме Фубини (если существуют повторные интегралы, то существует и двойной) не справедливо.

Вообще, все похоже на двойные ряды. Если абсолютно сходится двойной ряд, то сходятся все повторные ряды и все перестановки, все суммы равны. Сходимость интеграла по произведению — это и есть абсолютная сходимость двойного ряда.

Из сходимости повторных рядов сходимость двойного ряда не следует. Контрпримеры были в прошлом году для интеграла Римана, приведу один.



$$A = [0,1] \times [0,1], \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx = 0, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = 1, \quad \int_A f\, dxdy \text{ не существует.}$$

Однако, если существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_X \left(\int_{A(x)} |f(x, y)|\, d\mu_Y \right) d\mu_X, \qquad \int_Y \left(\int_{A(y)} |f(x, y)|\, d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

то $f(x, y)$ интегрируема на A и справедлив вывод теоремы Фубини.

Пусть существует первый интеграл из повторных и равен M. Рассмотрим срезку $f_n(x,y) = \min\{n, |f(x,y)|\}$ функции $|f|$. Эта функция измерима, ограничена, следовательно интегрируема на A. По теореме Фубини

$$\int_A |f_n(x,y)|\, d\mu = \int_X \left(\int_{A(x)} |f_n(x,y)|\, d\mu_Y \right) d\mu_X \leqslant M.$$

Функции $|f_n|$ образуют монотонную последовательность почти всюду сходящуюся к $|f|$, по теореме Ле́ви из этого следует суммируемость функции $|f|$ на A, отсюда следует суммируемость f и осталось применить теорему Фубини.

Я все строил в предположении конечности мер, однако теорема Фубини справедлива и для «несобственных» интегралов Лебега, по множествам бесконечной меры.

Для примера: пусть $\mu_X(X) = \infty,\ \mu_Y(Y) < \infty$. Пусть $X = \coprod A_n$ — разбиение X на множества конечной меры. Тогда $X \times Y = \coprod A_n \times Y$ — разбиение $X \times Y$.

Пусть функция $f(x,y)$ неотрицательна, $f \in L(X \times Y)$. Тогда ряд $\sum \int_{A_n \times Y} f(x,y)\, d\mu$ сходится (по критерию интегрируемости). Теперь применим теорему Фубини к каждому слагаемому:

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \times Y} f(x,y)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X$$

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \times Y} f(x,y)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \left(\int_{A_n} f(x,y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y =$$
$$\int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f(x,y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Все ограничено, для перестановки надо воспользоваться теоремой Леви.

Лекция 6 (16 февраля 2015)

Тема: дифференцируемость функций — для функций на прямой.

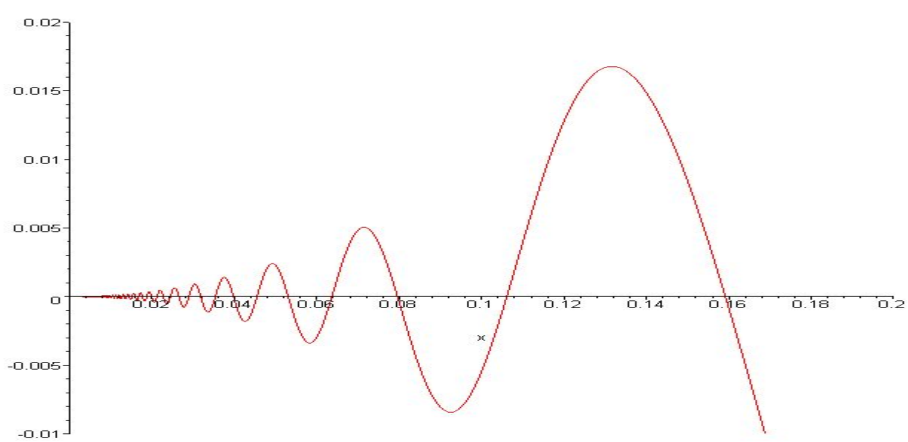
Новая тема связана со следующими обстоятельствами. Мы все воспринимаем операции дифференцирования и интегрирования в каком-то смысле, как обратные. Например, непрерывно дифференцируемые функции на прямой можно дифференцировать, получается непрерывная производная. Если эту производную проинтегрировать (неопределенным образом, или как интеграл Римана с переменным верхним пределом), получится исходная функция с точностью до константы. Наоборот, если непрерывную функцию проинтегрировать, то получится дифференцируемая функция, если её продифференцировать — получится исходная функция.

Что получится, если взять функцию f дифференцируемую везде или почти везде, но производная f' которой не непрерывна, а потом f' проинтегрировать по Лебегу? Мы «вернемся назад»?

Вообще, у каких функций производные интегрируемы по Риману? По Лебегу?

Оказалось, что некоторые хорошо известные нам классы функций (даже разрывных) можно дифференцировать в очень большом числе точек. Бывают функции, непрерывные, но нигде не имеющие производных. Это надо помнить, год назад в листочках был пример Ван-дер-Вардена.

Отдельные проблемы возникают из-за того, что интеграл Лебега — это интеграл по неориентированному множеству. Берем $f(x) = x$, $f'(x) = 1$. При этом $\int_{[0,x]} 1\,dx = |x| \neq x$ при $x < 0$.



Пример функции, у которой есть производная везде, но такой, что эта производная не интегрируема по Риману (первый пример принадлежит Вольтерра, 1881).

Берем канторово множество положительной меры. На нем полагаем функцию f равной нулю. На каждом интервале (α, β) из тех, что мы выбрасывали, кладем функцию равной

$$f(x) = (x-\alpha)^2(\beta-x)^2 \sin\left((x-\alpha)^{-1}(\beta-x)^{-1}(\beta-\alpha)^{-1}\right) \quad \text{(на рисунке левый конец одного из интервалов)}$$

Такая функция имеет производную во всех точках, однако в конце каждого интервала эта производная разрывна и колеблется между -1 и 1. Соответственно, множество точек разрыва (это концы выброшенных интервалов + все остальные точки канторова множества ненулевой меры) имеет ненулевую меру, следовательно оно не интегрируемо по Риману.

История вопроса. В 1806 году Ампер в трудах Экёль Политехник пытался установить дифференцируемость произвольной функции всюду, кроме исключительных и изолированных точек. Вейерштрасс (опубликовано в 1875 году Дю Буа-Раймоном) первый привел пример функции нигде не имеющей производной.

Объяснить откуда такие функции берутся, рассмотреть пример пилы, которую мы сжимаем в 100 раз по горизонтали и 2 раза по вертикали.

Тогда сумма ряда из таких пил даст требуемый пример: наклон зубцов пил стремиться к бесконечности. При этом результат — непрерывная функция, очевидно.

Пример непрерывной функции, не имеющей производной нигде (ван дер Варден).

Обозначим $\{x\}$ расстояние от x до ближайшего целого числа и положим

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n},\quad x\in[0,1).$$

Ряд мажорируется геометрической прогрессией, равномерно сходится к непрерывной f. Запишем

$$x=0,a_1a_2\dots a_n\dots,$$

если дробь конечна, то будем дописывать нулями. Очевидно, $\{10^n x\}=0,a_{n+1}a_{n+2}\dots$, если десятичная дробь справа $\leqslant\frac{1}{2}$, иначе $\{10^n x\}=1-0,a_{n+1}a_{n+2}\dots$. Положим $h_m=-10^{-m}$, если $a_m=4$ или 9, и $h_m=10^{-m}$ при всех других a_m. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=10^m\sum_{n=0}^{\infty}\pm\frac{\{10^n(x\pm10^{-m})\}-\{10^n x\}}{10^n}.$$

Числители дробей справа обращаются в ноль при $n\geq m$ и равны $\pm10^{n-m}$ при $n<m$. Поэтому

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}\pm1.$$

При различных m это целые числа, четность которых совпадает с четностью числа m. Поэтому предела частно-разностного отношения нет □

Напомнить, что у монотонной функции не более счетного количества разрывов.

Сказать, что множество точек разрыва может быть всюду плотным — и все равно будет дифференцируемость почти всюду.

Теорема Лебега. *Каждая монотонная функция почти всюду имеет производную.*

Доказательство проведем для непрерывной функции, хотя близкое доказательство проходит и для разрывных. Все основные моменты и трудности проявляются уже для непрерывной функции.

Непосредственное доказательство предварим тремя дополнительными конструкциями.

1. Определение. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, точка $x\in(a,b)$ называется невидимой справа для f, если $\exists t\in(x,b]:$ справедливо $f(x)<f(t)$.

Лемма Рисса о светотени. *Пусть f — непрерывная функция на $[a,b]$. Множество точек A, невидимых справа для f, открыто, $A=\coprod_n(a_n,b_n)$ и $f(a_n)\leqslant f(b_n)$.*

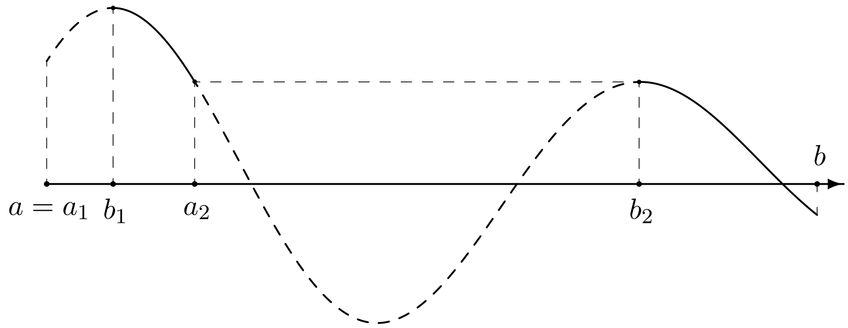


Рис. 1: Лемма о светотени (грунт не прозрачный)

Для непрерывных f справедливо равенство $f(a_n)=f(b_n)$, но может быть $f(a_1)<f(b_1)$, если $a_1=a$. Лемма справедлива и для разрывных функций (имеющих только разрывы-скачки).

Аналогично определяются точки, невидимые слева, для них справедлив аналог леммы Рисса (x невидима слева, если есть точка $t<x$, $f(t)>f(x)$): множество точек, невидимых слева, открыто и в концах интервалов (a_k,b_k) выполнено соотношение $f(a_k)\geqslant f(b_k)$.

Открытость просто: если $f(x)<f(t)$, то по непрерывности то же самое и в окрестности.

Пусть $(a_k,b_k)\subset A$, $a_k,b_k\notin A$ и пусть $f(a_k)>f(b_k)$. Тогда $\exists x_0\in(a_k,b_k): f(a_k)>f(x_0)>f(b_k)$, точка x_0 невидима справа.

Рассмотрим множество $D=\{x\in[x_0,b_k): f(x)\geqslant f(x_0)\}$, D — непустое, замкнутое, ограниченное; пусть $\sup D=x_1$. По построению, $x_1\in A\Rightarrow\exists t: f(t)>f(x_1)$. Теперь t не может лежать правее b_k (иначе b_k — невидима справа), то есть $t\in(x_1,b_k)$. Тогда $t\in D$ и $x_1\neq\sup D$. Противоречие.

2. Критерий пренебрежимости. У множеств положительной меры всегда есть промежутки концентрации: для любого множества $A\subset\mathbb{R}$, $\mu(A)>0$, для любого $\varepsilon>0$ найдется такой промежуток Δ, что $\mu(A\bigcap\Delta)>(1-\varepsilon)\mu(\Delta)$.

Критерий. $\mu(A)=0\Leftrightarrow\exists\theta\in(0,1):\ \forall(a_1,b_1)\in(a,b)$ *справедливо* $\mu^*(A\bigcap(a_1,b_1))\leqslant\theta(b_1-a_1)$.

В одну сторону (если $\mu(A)=0$) очевидно. Пусть $B=\coprod_k\Delta_k\supset A$. По условию и из σ-аддитивности верхней меры

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\bigcap\coprod_k\Delta_k)=\mu^*(\coprod_k\Big(A\bigcap\Delta_k\Big))\leqslant\sum_k\mu^*\Big(A\bigcap\Delta_k\Big)\leqslant\theta\sum_k\mu(\Delta_k)=\theta\mu(B).$$

Переходим к $\inf$ по всем B, получаем $\mu^*(A)\leqslant\theta\mu^*(A)\Rightarrow\mu^*(A)=0$. □

3. Производные числа Дини. Определение:

$$D_Rf(x)=\varliminf_{t\to x+0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\qquad D_Lf(x)=\varliminf_{t\to x-0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$
$$D^Rf(x)=\varlimsup_{t\to x+0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\qquad D^Lf(x)=\varlimsup_{t\to x-0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Для того, чтобы вы с уважением отнеслись к производным числам Дини сформулирую утверждение. Для правых чисел, для левых верно то же самое.

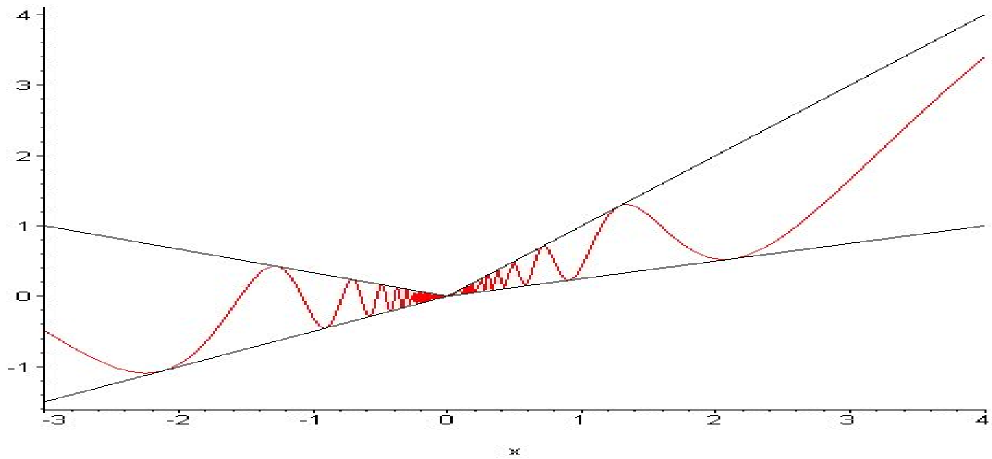


Рис. 2: Функция с разными числами Дини

Пусть для непрерывной функции F найдется непрерывная функция f такая что, $D_R F(x) \leqslant f(x) \leqslant D^R F(x)$. Тогда F — дифференцируема и $F' = f$.

Еще приведу пример простого дифференциального неравенства.

Если $D^R f(x) \geqslant 0$, то f монотонно возрастает (нестрого).

Замечаем, что из $D^R f(x) \geqslant 0$ следует $D_R f(x) \geqslant 0$, что вовсе не очевидно. И верно, только если неравенство выполнено на промежутке. В отдельной точке может быть что угодно, естественно.

Замечу, что числа Дини определены и для разрывных функций.

Доказательство теоремы Лебега. Теорему будем доказывать для неубывающих функций. Для её доказательства достаточно показать, что 1) $D^R f(x) \overset{a.e.}{<} \infty$ и 2) $D^R f(x) \overset{a.e.}{\leqslant} D_L f(x)$.

Если это докажем (для любой возрастающей f), то докажем и для $-f(-x)$), поэтому докажем $D^L f(x) \overset{a.e.}{\leqslant} D_R f(x)$, поэтому $D^R f(x) \overset{a.e.}{\leqslant} D_L f(x) \leqslant D^L f(x) \overset{a.e.}{\leqslant} D_R f(x) \leqslant D^R f(x) \Rightarrow$ все неравенства — это почти всюду равенства. А если все числа Дини совпадают в какой-то точке, то f дифференцируема в этой точке.

1) По каждому натуральному $C > 0$ рассмотрим множество $R_{>C} = \{x \in (a, b) : D^R f(x) > C\}$. Так как $\{x : D^R f(x) = \infty\} = \bigcap_C R_{>C}$, то чтобы доказать $D^R f(x) \overset{a.e.}{<} \infty$, нужно показать, что $\mu^*(R_{>C}) \to 0$ при $C \to \infty$.

Пусть $x \in R_{>C}$. Тогда существует точка $t > x$, для которой $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} > C \Leftrightarrow f(t) - Ct > f(x) - Cx$, таким образом, множество $R_{>C}$ состоит из точек, невидимых справа для функции $g(x) = f(x) - Cx$. По лемме о светотени, $R_{>C}$ содержится в некотором открытом $B = \coprod_n (a_n, b_n)$, причем $g(a_n) \leqslant g(b_n)$. То есть $f(a_n) - Ca_n \leqslant f(b_n) - Cb_n$ и

$$b_n - a_n \leqslant \frac{1}{C}(f(b_n) - f(a_n)).$$

Промежутки $(f(a_n), f(b_n))$ — непересекающиеся подинтервалы $(f(a), f(b))$, поэтому

$$\mu^*(R_{>C}) \leqslant \sum_n (b_n - a_n) \leqslant \frac{1}{C} \sum_n (f(b_n) - f(a_n)) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{C} \to 0. \qquad (2)$$

Именно здесь используется монотонность: $\sum_n (f(b_n) - f(a_n)) \leqslant f(b) - f(a)$.

2) Перейдем к доказательству $D^R f(x) \overset{a.e.}{\leqslant} D_L f(x)$. Обозначим $D = \{x \in (a,b) : D^R f(x) > D_L f(x)\}$. Далее, для любой пары рациональных чисел (C, c), $0 < c < C$ обозначим $D(C,c) = \{x \in (a,b) : D_L f(x) < c, D^R f(x) > C\}$. Множеств $D(C,c)$ счетное число, $D = \bigcup_{C,c} D(C,c)$. Следовательно, для доказательства пренебрежимости D достаточно доказать пренебрежимость каждого $D(C,c)$. Будем это делать с помощью критерия пренебрежимости с $\theta = c/C$.

Пусть $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$, $x \in D(C,c) \bigcap (\alpha, \beta)$. Так как $D_L(x) < c \Rightarrow \exists t \in (\alpha, x) : \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} < c$. Тогда $f(x) - cx < f(t) - ct \;\Rightarrow\; x$ — точка, невидимая слева для функции $g(x) = f(x) - cx$ на (α, β). Применим лемму о светотени, получим, что множество $D(C,c) \bigcap (\alpha, \beta)$ содержится в конечном или счетном дизъюнктивном объединении интервалов (α_n, β_n) таких, что $f(\beta_n) - f(\alpha_n) \leqslant c(\beta_n - \alpha_n)$.

Соотношение (2) было доказано для возрастающей функции на любом отрезке. Вспомним, что $D(C,c) \subset R_{>C}$, применим (2) к функции f на (α_n, β_n):

$$\mu^*\big(D(C,c) \bigcap (\alpha_n, \beta_n)\big) \leqslant \mu^*\big(R_{>C} \bigcap (\alpha_n, \beta_n)\big) \leqslant \frac{1}{C}\big(f(\beta_n) - f(\alpha_n)\big) \leqslant \frac{c}{C}(\beta_n - \alpha_n).$$

Теперь по построению $D(C,c) \bigcap (\alpha, \beta) = \bigcup_n \left(D(C,c) \bigcap (\alpha_n, \beta_n)\right)$, в силу σ-полуаддитивности μ^*:

$$\mu^*\big(D(C,c) \bigcap (\alpha, \beta)\big) \leqslant \sum_n \mu^*\big(D(C,c) \bigcap (\alpha_n, \beta_n)\big) \leqslant \frac{c}{C} \sum_n \big(\alpha_n - \beta_n\big) \leqslant \frac{c}{C}(\beta - \alpha).$$

В силу критерия пренебрежимости $\mu^*(D(C,c)) = 0$. □

Теорема Фубини (Fubini's differentiation theorem, малая, не путайте с той, что уже была). *Пусть $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ — неубывающие функции, причём ряд $\sum f_k = s(x)$ сходится поточечно. Тогда ряд $\sum f_k'(x)$ сходится почти всюду и $\sum f_k'(x) \overset{a.e.}{=} s'(x)$.*

1. Без ограничения общности считаем, что $f_k(a) = 0$ при всех k, $f_k \geqslant 0$.
2. $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \to s(x)$, это всё монотонные функции (s_n, f_k, s).
3. $f_k'(x), s_k'(x), s(x) \geqslant 0$ существуют при $x \in [a,b] \setminus E_0$, $\mu(E_0) = 0$.
4. Очевидно, $s_n'(x) \leqslant s_{n+1}'(x) \leqslant s'(x)$, $x \notin E_0$. Поэтому равенство $s'(x) - s_n'(x) \to 0$ достаточно проверить для какой-то подпоследовательности n_k.
5. Мы пока что доказали, что если $\sum f_k$ поточечно сходится, то $\sum f_k'$ тоже сходится.
6. $s_n(b) \to s(b)$, выберем подпоследовательность n_k так, чтобы ряд $\sum (s(b) - s_{n_k}(b))$ сходился.
7. $s(x) - s_{n_k}(x) \leqslant s(b) - s_{n_k}(b)$. Это следует из монотонности $s - s_{n_k} = \sum f_m$.
8. Поэтому $\sum (s - s_{n_k})$ — это ряд из монотонных функций, такого же типа как и ряд из f_k. Для такого ряда только что доказали сходимость из производных почти всюду, раз ряд сходится, значит и $s'(x) - s_{n_k}'(x) \overset{a.e.}{\to} 0$. □

Замечание. Ну всё-таки чудес нету :) Тут и функции положительные, и производные неотрицательны... монотонность и ограниченность, поэтому естественно (?), что ряды сходятся :)

Лекция 7 (24 февраля 2015)

На прошлой лекции была рассказана теорема Лебега о том, что любая монотонная функция почти всюду имеет производную. Теорема была доказана для непрерывных функций, но для разрывных доказательство такое же. Также была доказана теорема Фубини о том, что сходящиеся поточечно ряды из монотонных функций можно дифференцировать почти всюду.

Теперь мы можем перейти к связи операций дифференцирования и интегрирования по Лебегу.

Первый факт очень простой. Пусть функция f суммируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\,d\mu, \qquad x \geqslant 0$$

почти всюду дифференцируемая. Для доказательства надо написать, что $f = f^+ - f^-$, обе функции f^+ и f^- суммируемы, определены функции

$$F^+(x) = \int_{[a,x]} f^+\,d\mu, \qquad F^-(x) = \int_{[a,x]} f^-\,d\mu,$$

они монотонные, поэтому у них есть производные почти всюду. □

Естественно предположить, что $F' \overset{a.e.}{=} f$, до этого мы пока что не дошли.

Второй факт также очень простой. Пусть снова функция f суммируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $F(x)$ непрерывна. Это следует из абсолютной непрерывности интеграла:

$$|F(x+\Delta) - F(x)| = \int_{[x,x+\Delta]} |f|\,d\mu, \quad \Delta > 0, \text{ или } \int_{[x+\Delta,x]} |f|\,d\mu, \quad \Delta < 0.$$

Теорема. *Пусть f дифференцируема на $[a,b]$ и пусть f' ограничена. Тогда она измерима и*

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt, \qquad x > a.$$

Доказательство. Продлим f на промежуток $[a, b+1]$ формулой $f(x) = f(b) + f'(b)(x-b)$. Рассмотрим измеримые функции $f_n(x) = n\Big(f(x+n^{-1}) - f(x)\Big)$, которые теперь определены.

Эти функции в каждой точке сходятся к f', поэтому она измерима, по предположению она ограничена, значит, интегрируема по Лебегу. По формуле Лагранжа $f_n(x) = f'(x + \theta(x,n)/n)$ при некотором $\theta \in [0,1]$, поэтому функции f_n ограничены. Теперь можно менять предел и интеграл местами,

$$\int_{[a,b]} f'(t)dt = \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n(x)dx, \qquad \text{(тут всюду интегралы Лебега!)}$$

Функция f непрерывна, интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана,

$$\int_{[a,b]} f_n(x)dx = \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))dx = n\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)dx - n\int_a^b f(x)dx =$$
$$= n\int_b^{b+1/n} f(x)dx - n\int_a^{a+1/n} f(x)dx = f(b+\theta_1/n) - f(a+\theta_2/n) \to f(b) - f(a).$$

Получили $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$, это верно при всех b. $\square$

Теорема. *Пусть f интегрируема на $[a,b]$. Тогда* $f(x) \overset{a.e.}{=} \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{[a,x]} f(t)dt\right)$, $x > a$.

Доказательство.

1. Положим

$$\Phi(x) = \int_{[a,x]} f(t)dt.$$

Как я уже говорил, в силу того, что Φ можно представить в виде разности двух монотонных функций, почти всюду определена производная $\Phi'(x)$.

Функция Φ' определена почти всюду, доопределим ее как-то на $[a,b]$ и продолжим константой для $x > b$. Рассмотрим функции $g_n(x) = n(\Phi(x+1/n) - \Phi(x))$, почти всюду $g_n \to \Phi'$. Следовательно, $\Phi'(x)$ измеримая функция.

2. Покажем сперва, что $f(x) \overset{a.e.}{\geqslant} \Phi'(x)$.

Если $f(x) < \Phi'(x)$, то найдутся рациональные α и β такие, что $f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x)$, обозначим $E_{\alpha,\beta} = \{x : f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x)\}$. Если $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ при всех α, β, то всё доказано. Зафиксируем некоторые α, β.

3. Пусть $\varepsilon > 0$, построим по нему δ в силу абсолютной непрерывности:

$$\mu(e) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\int_e f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Выберем теперь открытое множество $G \subset [a,b]$ так, чтобы $E_{\alpha,\beta} \subset G$ и $\mu(G) < \mu(E_{\alpha,\beta}) + \delta$.

4. Если $x \in E_{\alpha,\beta}$, to

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x)}{\xi - x} > \beta, \qquad \forall \xi > x,\ \xi - x \text{ мало}.$$

Переписываем в виде $\Phi(\xi) - \beta\xi > \Phi(x) - \beta x$, получаем, что точка x — невидимая справа для функции $\Phi(x) - \beta x$ на любом из интервалов Δ_n, составляющих $G = \coprod \Delta_n$. Используем на Δ_n лемму Рисса о светотени: $\exists$ открытое множество $S_n = \bigcup_k (a_k^n, b_k^n)$ такое, что $E_{\alpha,\beta} \subset S = \coprod S_n \subset G$ и $\Phi(b_k^n) - \beta b_k^n \geqslant \Phi(a_k^n) - \beta a_k^n$. Поэтому при каждом k

$$\Phi(b_k^n) - \Phi(a_k^n) = \int_{(a_k^n, b_k^n)} f(t)\,dt \geqslant \beta(b_k^n - a_k^n).$$

Суммируем по k и по n, получаем $\displaystyle\int_S f(t)\,dt \geqslant \beta\mu(S)$. Одновременно,

$$\int_S f(t)\,dt = \int_{E_{\alpha,\beta}} f(t)\,dt + \int_{S\setminus E_{\alpha,\beta}} f(t)\,dt \leqslant \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}) + \varepsilon \leqslant \alpha\mu(S) + |\alpha|\delta + \varepsilon$$

(вспомнили, что α может быть и отрицательным). Отсюда $\alpha\mu(S) + |\alpha|\delta + \varepsilon \geqslant \beta\mu(S)$ и $\mu(S) \leqslant (|\alpha|\delta + \varepsilon|)/(\beta - \alpha)$. Теперь множество $E_{\alpha,\beta}$ оказалось включено в множество S сколь угодно малой меры, значит $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$.

5. Доказали, что $f(x) \overset{a.e.}{\geqslant} \Phi'(x)$. Заменив функцию $f(x)$ на $-f(x)$, так же получим, что $-f(x) \overset{a.e.}{\geqslant} -\Phi'(x)$, поэтому $f(x) \overset{a.e.}{=} \Phi'(x)$. □

Мы знаем, что формула $F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t)\,dt$ не правильная даже для монотонных функций: канторова лестница — контрпример.

Теорема. *Производная $f = F'$ монотонной неубывающей функции F суммируема и*

$$\int_{[a,x]} F'(t)\,dt \leqslant F(x) - F(a).$$

Доказательство. Продолжим $F(x) = F(b)$ при $x > b$ и пусть $\varphi_h(x) = (F(x+h) - F(x))/h \geqslant 0$.

$$\int_{[a,b]} \varphi_h(x)dx = \frac{1}{h}\int_{[a,b]} F(x+h)dx - \frac{1}{h}\int_{[a,b]} F(x)dx \\ = \frac{1}{h}\int_{[b,b+h]} F(x)dx - \frac{1}{h}\int_{[a,a+h]} F(x)dx \leqslant F(b) - F(a).$$

Теперь в силу теоремы Фату ($\varphi_h \geqslant 0$)

$$\int_{[a,b]} F'(x)dx = \int_{[a,b]} \varliminf_{h\to 0} \phi_h(x) \leqslant \varliminf_{h\to 0} \int_{[a,b]} \phi_h(x)dx \leqslant F(b) - F(a).$$

□

Напоминаю теорему Фату: если $f_n \overset{a.e.}{\to} f(x),\ f_n \geqslant 0$, то $\displaystyle\int_E f(x)dx \leqslant \sup\left(\int_E f_n(x)dx\right)$.

Основной смысл этой теоремы примерно такой. Каждая непрерывная возрастающая функция F представима в виде суммы двух функций, двух частей: *абсолютно-непрерывной* и *сингулярной*. Для абсолютно непрерывной части формула Ньютона–Лейбница выполнена. А для сингулярной (это что-то типа канторовой лестницы) части производная почти всюду рана нулю. Обе монотонно неубывающие, интеграл от F равен интегралу от производной абсолютно непрерывной части, а справа стоит нечто большее: сумма приращений обеих частей.

Определение 1. Абсолютно непрерывная функция f:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1 > 0 : \forall \text{ не пересекающихся } (a_k, b_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \delta_1 \text{ справедливо } \sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Пишем $f \in AC$ или $f \in AC(0,1)$ или $f \in AC([0,1])$: «*absolutely continuous*».

Определение 2. Абсолютно непрерывная функция f:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_2 > 0 : \forall N \text{ и не пересекающихся } (a_k, b_k), k = 1, \ldots, N : \\ \sum_{k=1}^{N} |b_k - a_k| < \delta_2 \text{ справедливо } \sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Определение 3. Абсолютно непрерывная функция f:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_3 > 0 : \forall N \text{ и не пересекающихся } (a_k, b_k) : \sum_{k=1}^{N} |b_k - a_k| < \delta_3 \text{ справедливо } \sum_{k=1}^{N} \omega(f, [a_k, b_k]) < \varepsilon,$$

$\omega(f, \Delta) = \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{x \in \Delta} f(x)$ — колебание f на Δ.

Определение 4. Абсолютно непрерывная функция f:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_4 > 0 : \forall \text{не пересекающихся } (a_k, b_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \delta_4 \text{ справедливо } \sum_{k=1}^{\infty} \omega(f, [a_k, b_k]) < \varepsilon.$$

Слова «не пересекающиеся» — важные. Функция $f : x \mapsto \sqrt{x}$ на $[0, 1]$ абсолютно непрерывная. Однако, если убрать эти слова, ничего не получится.

Определения эквивалентны.

Из О1 следует О2 (почти очевидно). Берем произвольное $\varepsilon > 0$. Строим по ε число δ_1. Теперь полагаем $\delta_2 = \delta_1/2$. Берем конечную систему интервалов, суммарной длины δ_2. Добираем эту систему до бесконечной: берем точку, в её окрестности берем точку на расстоянии меньше $\delta_2/2$, потом следующую точку, в её окрестности берем точку на расстоянии меньше $\delta_2/4$, и т.д. Получили счетную систему интервалов, длины меньше δ_1, поэтому сумма приращений будет меньше ε. $\square$

В обратную сторону (из О2 следует О1) чуть сложнее. Заметим, сначала, что если есть ряд с неотрицательными элементами c_k, и для любого конечного множества элементов их сумма не превосходит K, то и сумма ряда меньше K — это вроде очевидно. Отсюда с точностью до нестрогого неравенства следует О2⇒О1. $\square$

Из О3 следует О2 — очевидно, так как $\omega(f, [a_k, b_k]) \geqslant |f(b_k) - f(a_k)|$. $\square$

Из О2 следует О3. По заданному ε строим $\delta_3 = \delta_2(\varepsilon/2)$. Берем N и набор из N промежутков $\Delta_k = [a_k, b_k]$ с суммой длин меньше δ_3. На каждом промежутке Δ_k берем точки a'_k, b'_k, так чтобы $|f(b'_k) - f(a'_k)| \geqslant \omega(f, [a_k, b_k]) - \varepsilon/(2N)$. Теперь $\sum_{k=1}^{N} |b'_k - a'_k| < \delta_3$, поэтому $\sum_{k=1}^{N} |f(b'_k) - f(a'_k)| \leqslant \varepsilon/2$ и $\sum_{k=1}^{N} \omega(f, [a_k, b_k]) \leqslant \varepsilon$. $\square$

Из О4 следует О1 — очевидно, так как $\omega(f, [a_k, b_k]) \geqslant |f(b_k) - f(a_k)|$. $\square$

Из О3 следует О4. Все частичные суммы ряда $\sum \omega(f, [a_k, b_k])$ не превосходят ε, значит и ряд будет не больше ε. $\square$

Главный пример: условие Липшица ($|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$) ⇒ абсолютная непрерывность. В частности, условие Липшица следует из $f \in C^1 \Rightarrow f \in LC$ (LC — «*Lipschitz continuous*»).

Ещё пример: канторова лестница — не абсолютно непрерывная функция. Это следует из таких соображений. Покроем канторово множество нулевой меры счетной системой интервалов сколь угодно малой суммарной длины. При этом сумма длин образов этих интервалов будет равна 1.

Свойства AC функций.

1. $g \in L_1 \Rightarrow G(x) = \int_{[a,x]} g(t)dt \in AC$ — следует из абсолютной непрерывности интеграла.
Для доказательства удобно пользоваться определением 2.

2. $g \in AC \Rightarrow g \in C$ — полагаем в О2 $N = 1$.

3. $g \in AC \Rightarrow |g| \in AC$ очевидно.

4. $g \in C,\ |g| \in AC \Rightarrow g \in AC$. Свойство чуть похитрее.

Для доказательства, рассмотрим произвольную конечную систему интервалов. Выделим в ней те, в которых g принимает значения разных знаков. На этих интервалах, по теореме Коши, есть точка, в которой g обращается в ноль. Увеличим количество интервалов: разобьем такие интервалы точками, нулями функции, вместо каждого получится ровно 2. Теперь колебание по полученной системе от $|g|$ равно колебанию по исходной от g. $\square$

5. $f \in AC(0,1)$, $E \subset [0,1]$, $\mu(E) = 0$, тогда $\mu(f(E)) = 0$.

Для доказательства зададимся $\varepsilon > 0$ и покажем, что $\mu(f(E)) < \varepsilon$.

Определим по ε число δ согласно О4. Покроем E счетной системой отрезков Δ_k, сумма длин которых меньше δ. Тогда $f(E)$ будет покрыто отрезками $f(\Delta_k)$, при этом $\mu(\Delta_k) = \omega(f, \Delta_k)$. $\square$

6. Сумма, разность и произведение двух AC функций, тоже AC функции.

Сумма, разность — очевидно, надо по $\varepsilon/2$ построить δ для каждой из входящих функций, а потом взять минимальное число.

Произведение: пусть $f, g \in AC$, пусть $\varepsilon > 0$, теперь выберем для функции f по определению абсолютной непрерывности δ_f по числу $\varepsilon/(2\max|g|)$ и, наоборот, выберем для функции g по определению абсолютной непрерывности δ_g по числу $\varepsilon/(2\max|f|)$. Теперь положим $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Включение $fg \in AC$ следует из

$$\sum |f(a_k)g(a_k) - f(b_k)g(b_k)| \leqslant \max|g| \sum |f(a_k) - f(b_k)| + \max|f| \sum |g(a_k) - f(g_k)| < \varepsilon.$$

Определение. *Вариация функции* f: $\qquad \bigvee\limits_a^b f = \sup\limits_{x_k} \sum |f(x_{k-1}) - f(x_k)|.$

Пишем, $f \in BV$ (a function of «*Bounded Variation*»), если у f ограниченная вариация, $BV \not\subset C$.