ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С. Беленький, Л.Г. Егорова

ДВЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ УЧАСТНИКОМ ТОРГОВ НА ФОНДОВОЙ БИРЖЕ ПО ФОРМИРОВАНИЮ И ИЗМЕНЕНИЮ СВОЕГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Препринт WP7/2015/02

Серия WP7

«Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике

Москва
2015

УДК 519.8
ББК 22.18
Б43

Беленький, А. С., Егорова, Л. Г.
Б43 Две модели принятия решений участником торгов на фондовой бирже по формированию и изменению своего инвестиционного портфеля : препринт WP7/2015/02 [Текст] / А. С. Беленький, Л. Г. Егорова ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. – 32 с. – 35 экз.

Предлагаются две математические модели, с использованием которых участник биржевых торгов на фондовой бирже может принимать решения по формированию и изменению своего инвестиционного портфеля. В первой модели используется способность трейдера прогнозировать будущие значения стоимости каждого из интересующих его финансовых инструментов; при этом задачу отыскания оптимальных стратегий инвестирования трейдера в эти инструменты удается свести к задаче линейного программирования. В рамках второй модели трейдер может оценивать лишь область изменения значений для всей совокупности интересующих его финансовых инструментов в форме линейных неравенств балансового типа; при этом задача отыскания оптимальных стратегий трейдера формулируется как антагонистическая игра с нелинейной целевой функцией, аналогичная игре с природой. Доказано, что седловые точки в этой игре находятся из решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару.

УДК 519.8
ББК 22.18

Беленький А.С. – профессор, кафедра высшей математики Департамента математики на факультете экономических наук, НИУ ВШЭ, Москва, Россия.

Егорова Л.Г. – преподаватель, кафедра высшей математики Департамента математики на факультете экономических наук, НИУ ВШЭ, Москва, Россия.

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

1. Введение

Биржа как регулярно функционирующий организованный оптовый рынок однородных товаров активно изучается экономистами, которые исследуют особенности функционирования всех типов бирж – товарных, фондовых, валютных, универсальных, бирж труда. Хотя закономерности функционирования всех перечисленных бирж (кроме бирж труда) практически одинаковы, по-видимому, можно считать общепризнанным, что наибольший теоретический и прикладной интерес представляет изучение фондовых бирж. По мнению авторов, это объясняется как наличием широкого круга людей и организаций, желающих инвестировать собственные средства в финансовые инструменты, обращающиеся на бирже, так и зависимостью экономической политики государства и даже его финансовой безопасности от того, насколько стабильно функционирует фондовая биржа. Считается также, что идеи и методы, предложенные в работах по анализу фондовой биржи, применимы к анализу других видов бирж (за исключением биржи труда ввиду специфики ее биржевого товара).

Изучение законов функционирования и закономерностей поведения фондовой биржи, например, с учетом действий «быков» и «медведей», реакции биржи на обвал акций и образование финансовых «пузырей», поведения биржи в условиях кризисов представляет объективные трудности, поскольку фондовая биржа – это сложная система, в рамках которой взаимодействует большое число элементов с неявными взаимосвязями между ними. Более того, фондовая биржа функционирует в условиях неопределенности множества факторов, и к числу важнейших из них следует отнести неопределенность поведения самих участников биржевых торгов. Поэтому исследование поведения трейдеров при принятии ими решений о формировании и изменении инвестиционных портфелей и построение адекватных моделей их взаимодействия с биржей представляются целесообразными, прежде всего с точки зрения прояснения природы биржевых закономерностей и феноменов. Однако разные группы исследователей придают понятию адекватности указанных моделей разный смысл.

Например, с точки зрения классической теории финансов адекватной считается так называемая (математическая) модель репрезентативного агента, являющегося рациональным и принимающего решения, способствующие максимизации его благосостояния. Также практически во всех моделях поиска стратегий оптимального инвестирования на бирже, предлагаемых в рамках этой теории, начиная с работы Г. Марковица [Markowitz, 1952], предполагается, что трейдеру известен закон распределения будущей цены интересующих его финансовых инструментов. Однако обе указанные предпосылки, лежащие в основе этих моделей, – рациональность трейдера и знание им закона распределения будущей цены актива – в реальной жизни выполняются далеко не всегда. Существуют многочисленные свидетельства отклонения поведения конкретных трейдеров от рационального, отмеченные, например, в исследованиях [De Bondt, Thaler, 1994; Mullainathan, Thaler, 2000; Barberis, Thaler, 2002; Kahneman, 2011]. Исследования по анализу способностей трейдеров действовать рационально вообще [Odean, 1999; Barber, Odean, 2000; Malkiel, Saha, 2005; Soderlind, 2010; Penikas, Proskurin, 2013] свидетельствуют о неспособности не только значительного числа трейдеров, но даже и финансовых аналитиков принимать рациональные инвестиционные решения и предсказывать направление изменений стоимостей интересующих их финансовых инструментов на основе имеющихся у них предположений о законах распределения будущих цен на эти финансовые инструменты.

В качестве примера другой точки зрения на адекватность модели взаимодействия трейдера с фондовой биржей можно указать рекомендации «счастливых» игроков фондовой биржи, сумевших заработать значительный капитал на нестандартных решениях, реализация которых принесла им этот финансовый успех. В частности, Н.Н. Талеб [Taleb, 2008], отрицающий эффективность каких-либо теорий функционирования биржи для формирования решений трейдера об управлении своим инвестиционным портфелем, рекомендует ориентироваться исключительно на кризисные ситуации на бирже, во время которых, как он утверждает, и могут быть достигнуты серьезные позитивные для трейдера финансовые результаты.

В известной степени оба указанные выше взгляда на адекватность модели взаимодействия трейдера с фондовой биржей можно рассматривать как экстремальные, слабо согласующиеся с практикой работы трейдеров на фондовой бирже. Возникает вопрос: можно ли предложить альтернативу указанным экстремальным понятиям адекватности модели поведения и принятия решений участником биржевых торгов и построить модели, позволяющие трейдеру оценивать ожидаемый финансовый результат при отсутствии у него информации о каких-либо специальных законах распределения значений интересующих его финансовых инструментов, обращающихся на бирже? В частности, можно ли предложить модели, позволяющие трейдеру с подтвержденной способностью правильно оценивать в каждый момент времени направления изменения значений стоимостей интересующих его финансовых инструментов в случаях, когда: а) для каждого из указанных финансовых инструментов трейдер может указать некоторый диапазон, в котором изменяются значения этого финансового инструмента и которые трейдер считает равновозможными, и б) трейдер может указать только лишь предполагаемую область изменения значений всей совокупности интересующих его финансовых инструментов с помощью систем линейных неравенств балансового типа?

Ответам на эти вопросы и посвящена настоящая работа. Естественно ожидать, что если бы у трейдера появилась возможность оценивания ожидаемого финансового результата с использованием указанных моделей, и хотя бы часть из них пользовалась этими моделями (непосредственно или с помощью финансовых аналитиков и консультантов), то это могло бы существенно повлиять на поведение фондовой биржи в целом. Кроме того, следовало бы также ожидать, что соответствующие модели могли бы использоваться исследователями биржевых законов и закономерностей.

2. Исследование способности участника биржевых торгов определять направления изменения стоимости конкретных финансовых инструментов

Способность трейдера предсказывать будущее поведение рынка или конкретных финансовых инструментов является ключевой характеристикой трейдера как участника биржевых торгов. Для выявления у трейдера такой способности можно воспользоваться, например, схемой Бернулли, т.е. провести серию испытаний, в каждом из которых определенное событие (угадывание направления движения цены конкретного финансового инструмента в следующий момент времени) происходит с некоторой (одной и той же) вероятностью p [Кремер, 2010].

Хорошо известно, что для организации таких серий из n испытаний необходимо а) n раз предоставить трейдеру статистические данные в виде временных рядов из значений стоимостей интересующего его финансового инструмента (длину ряда трейдер может выбрать исходя из собственной методики составления прогноза) и б) предложить ему спрогнозировать значение стоимости (цену) этого финансового инструмента в следующий (за моментом предсказания) момент. Затем необходимо сравнить его выбор с реальной стоимостью этого финансового инструмента в указанный следующий момент. Доля успешно спрогнозированных трейдером будущих стоимостей конкретного финансового инструмента может служить оценкой вероятности трейдера верно угадать направление изменения стоимости этого финансового инструмента.

Применение схемы Бернулли [Кремер, 2010] с целью оценки будущих стоимостей конкретного финансового инструмента предполагает выполнение следующих условий:

1) каждое испытание имеет ровно два исхода;

2) испытания являются независимыми, т.е. вероятность того или иного исхода каждого испытания не зависит от того, какие исходы имели другие испытания;

3) вероятность успеха должна быть постоянной для всех испытаний.

Первое условие схемы Бернулли очевидным образом выполняется, так как в каждом из испытаний трейдер может либо угадать, либо не угадать направление изменения значения стоимости финансового инструмента по сравнению с текущим ее значением. Для выполнения второго условия необходимо обеспечить одинаковые условия проведения испытаний, т.е. для принятия решений всегда предоставлять трейдеру временные ряды одинаковой длины и выбирать эти ряды из доступной совокупности статистических данных случайным образом.

Третье условие, вообще говоря, может не выполняться, например, для трейдеров-новичков, которые учатся играть на бирже и накапливают опыт, позволяющий им все чаще успешно определять направление движения значений стоимостей финансовых инструментов. Поэтому перед прохождением испытаний по схеме Бернулли трейдеру желательно иметь опыт торговли либо на реальной бирже, либо на учебных торгах, открывая демо-счета и заключая сделки на виртуальные финансовые инструменты (подобные услуги оказывают многие брокерские и инвестиционные компании).

При выполнении всех трех условий вероятность в серии из n опытов получить ровно m верно угаданных направлений изменений будущих значений цен равна $P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, т.е. число верно угаданных направлений изменения значений стоимостей финансового инструмента является случайной величиной, подчиняющейся биномиальному закону распределения [Кремер, 2010].

Согласно теореме Бернулли (следствию из теоремы Чебышева для схемы Бернулли), при большом числе проведенных испытаний частота верно угаданных трейдером направлений движения значений стоимостей финансового инструмента $\frac{m}{n}$ сходится по вероятности к вероятности этого события, состоящего в правильном угадывании будущих значений стоимости финансового инструмента, в отдельном испытании:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

В качестве оценки способности трейдера верно определять направление движения стоимостей финансовых инструментов можно взять долю верных прогнозов трейдера в серии испытаний при достаточно большом числе этих испытаний. Ясно, что точность вычисления оценки вероятности p трейдера верно определить направление изменения значения стоимости финансового инструмента зависит от числа испытаний.

Пусть X_i – результат i-го испытания трейдера в серии из n испытаний, т.е. $X_i = 1$, если трейдер верно определил направление изменения стоимости финансового инструмента в момент $t + 1$ в ходе i-го испытания, и $X_i = 0$ в противном случае. Соответственно,

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{с вероятностью } p, \\ 0, \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

Пусть $X = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ – доля успешно угаданных трейдером направлений изменения стоимостей ценных бумаг. Тогда для оценки сверху для вероятности p можно использовать неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

и, поскольку $M(X) = p, D(X) = \frac{nD(X_i)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \le \frac{1}{4n}$, справедливо неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Таким образом, если оценивать вероятность p с точностью до первого знака после запятой по результатам испытаний по схеме Бернулли, то необходимо взять долю успешных прогнозов трейдера в серии из 2500 испытаний.

Очевидно, что для количественного анализа способностей трейдера угадывать направление изменения значений финансового инструмента, на основе какой-либо формальной стратегии (например, с использованием классических моделей формирования оптимального портфеля ценных бумаг, эконометрических моделей или эвристических методов технического анализа) проведение необходимого числа испытаний и достижение требуемой точности возможно лишь при условии разработки комплекса программ, имитирующих действия трейдера в соответствии с выбранной им стратегией предсказания [Belenky, Egorova, 2015].

Этот комплекс программ должен также включать в себя средства, позволяющие трейдеру быть уверенным в том, что при оценке финансовых перспектив работы с конкретным финансовым инструментом, на каждом шаге испытания, вероятность, с которой в момент времени t он угадывает значение стоимости финансового инструмента в момент времени $t+1$, действительно совпадает с выявленной (в результате проведенных по схеме Бернулли испытаний) вероятностью (или, по крайней мере, достаточно близка к ней) с тем, чтобы избежать неоправданных рекомендаций по включению конкретного финансового инструмента в портфель трейдера, если по каким-либо причинам это совпадение (или близость) не имеют места.

3. Отыскание оптимальных стратегий инвестирования трейдеров в финансовые инструменты. Модель 1: значения стоимостей финансовых инструментов являются случайными величинами, распределенными по закону равномерной плотности

3.1. Обозначения и предположения

Для удобства изложения каждому финансовому инструменту, доступному для торгов на фондовой бирже, присвоим номер из множества

$N = \{1,2,\dots,n\}$, где $i \in N$ обозначает наименование финансового инструмента, находящегося в множестве N под номером i. Пусть далее

числа $t_0 < \dots < t < t+1 < t+2 < \cdots$ соответствуют моментам времени, в которые трейдер принимает решения об изменении структуры своего инвестиционного портфеля;

m_t (от слова money) – некоторая сумма наличных средств (часть капитала), оставшаяся после формирования инвестиционного портфеля к моменту времени t;

W_t (от слова wealth) – объем капитала в виде наличных средств m_t и имеющихся в портфеле финансовых инструментов трейдера в момент времени t;

$s_{i,t}$ (от слова spot) – спот-цена или стоимость финансового инструмента i в момент времени t , т.е. цена, по которой продается финансовый инструмент в момент времени t в конкретном месте на условиях немедленного совершения сделки);

$v_{i,t}$ (от слова volume) – число единиц финансового инструмента i, приобретенных трейдером в момент времени по цене $s_{i,t}$.

Основные предположения о поведении трейдера в момент времени t:

1) трейдер обладает подтвержденными (в результате испытаний по схеме Бернулли) способностями по оценке биржевой ситуации с финансовыми инструментами, формирующими его портфель, выраженными в виде известных ему вероятностей p_i верно определять направление изменения будущей стоимости финансового инструмента i в момент времени $t+1$, т.е. предсказывать, будет ли эта стоимость расти или снижаться в следующий момент $t+1$ времени;

2) трейдер в момент времени t может разделить все множество финансовых инструментов N на непересекающиеся подмножества I_t^+, I_t^-, I_t^0, где

I_t^+ – множество финансовых инструментов, относительно которых трейдер уверен, что они вырастут в цене в момент времени $t+1$ и которые он собирается покупать в момент времени t;

I_t^- – множество финансовых инструментов, относительно которых трейдер уверен, что они снизятся в цене в момент времени $t+1$ и которые он собирается продавать в момент времени t;

I_t^0 – множество финансовых инструментов, относительно которых трейдер считает, что они не изменятся в цене в момент времени $t+1$

(либо считает будущие их изменения слишком незначительными) и которые он не собирается ни продавать, ни покупать в момент времени t;

3) для покупки финансовых инструментов из множества I_t^+ в момент времени t трейдер может тратить наличные средства m_t и средства, вырученные от продажи в момент времени t финансовых инструментов из I_t^- (как из собственного портфеля, так и взятых взаймы, если такой кредит доступен трейдеру); аналогично, для продажи финансовых инструментов $i \in I_t^-$ он может использовать собственные запасы этих финансовых инструментов в размере $v_{i,t}$, а также занимать финансовые инструменты у брокера, если это ему доступно;

4) трейдер не производит никаких действий с финансовыми инструментами из множества I_t^0.

Для упрощения записи математических моделей, описывающих действия трейдера, будем считать, что трейдер работает только с конкретными финансовыми инструментами – ценными бумагами (акциями и облигациями) и не работает с производными ценными бумагами (опционами, фьючерсами и проч.), а также что он выставляет только рыночные заявки, т.е. заявки, которые будут исполнены мгновенно по текущей рыночной цене.

3.2. Формулировка задачи отыскания оптимальной стратегии инвестирования трейдером

При отыскании оптимальной стратегии инвестирования в финансовые инструменты трейдеру, работающему на фондовой бирже, приходится рассматривать две ситуации: а) формирования нового портфеля ценных бумаг, и б) изменения состава имеющегося у него портфеля ценных бумаг. Ниже рассматривается вторая из этих двух ситуаций (как более общая).

В момент времени t трейдер обладает портфелем ценных бумаг в размере $v_{i,t}, i = \overline{1,n}$ и некоторым объемом наличных денег m_t, следовательно, его благосостояние на этот момент равно $W_t = \sum_{i=1}^{n} v_{i,t} s_{i,t} + m_t$. Задача трейдера состоит в выборе объемов покупки ценных бумаг $x_{i,t}^+$ (целых чисел) из множества I_t^+, относительно которых трейдер ожидает увеличения их стоимости в момент $t+1$, объемов продажи $x_{i,t}^-$ (целых чисел) ценных бумаг из текущего портфеля ценных бумаг из множества I_t^- и объемов продажи $z_{i,t}^-$ (целых чисел) ценных бумаг из множества I_t^- , взятых взаймы у брокера для открытия короткой позиции в момент t с возвратом ему этих ценных бумаг в момент $t+1$ по цене $s_{i,t+1}$.

Ясно, что благосостояние трейдера, ожидаемое им в момент $t+1$, составит

$$\begin{aligned} W_{t+1} = &\sum_{i \in I_t^0} v_{i,t} s_{i,t+1} + \sum_{i \in I_t^+} \left[v_{i,t} + x_{i,t}^+\right] s_{i,t+1} + \sum_{i \in I_t^-} \left[v_{i,t} - x_{i,t}^-\right] s_{i,t+1} + \\ &+ \left(m_t - \sum_{i \in I_t^+} x_{i,t}^+ s_{i,t} + \sum_{i \in I_t^-} x_{i,t}^- s_{i,t} + \sum_{i \in I_t^-} z_{i,t}^- \left[s_{i,t} - s_{i,t+1}\right] \right), \end{aligned} \tag{1}$$

где первые три слагаемых определяют часть благосостояния трейдера, размещенного в принадлежащих ему ценных бумагах, а последнее слагаемое определяет сумму средств, оставшихся после совершения всех сделок по купле/продаже ценных бумаг к моменту времени $t+1$, включая возврат заемных ценных бумаг.

Прирост стоимости портфеля после совершения всех сделок составит

$$\begin{aligned} \Delta W_{t+1} = &\sum_{i \in I_t^0} v_{i,t}\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) + \sum_{i \in I_t^+} \left(v_{i,t} + x_{i,t}^+\right)\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) + \\ &+ \sum_{i \in I_t^-} \left(v_{i,t} - x_{i,t}^-\right)\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) + \sum_{i \in I_t^-} z_{i,t}^-\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $v_{i,t}$, $s_{i,t}$, m_t, $i \in I_t^+, I_t^-$ – известные действительные числа (числа $v_{i,t}$ целые), а $s_{i,t+1}, i \in I_t^+, I_t^-$ являются случайными величинами. Далее предполагается, что значения стоимостей ценных бумаг $i, j \in N$ в момент времени $t+1$ являются независимыми случайными величинами.

Торговые операции трейдера с ценными бумагами должны проводиться с учетом следующих ограничений:

1) условия целочисленности объемов покупаемых, продаваемых и берущихся взаймы ценных бумаг;

2) объем продажи ценной бумаги в количестве $x_{i,t}^-$ из собственного портфеля ценных бумаг не может превышать имеющийся у него объем $v_{i,t}$,

$$x_{i,t}^- \le v_{i,t}, i \in I_t^-;$$

(заметим, что если трейдер планирует продать ценную бумагу i в количестве, превышающем имеющийся у него объем $v_{i,t}$ этой ценной бумаги, то он совершает дополнительно к продаже этого объема $v_{i,t}$ заём ценных бумаг в количестве $z_{i,t}$ для короткой позиции);

3) ограничение по доступности заемного капитала при использовании маржинальных кредитов с кредитным плечом $1{:}\,k_t$ при условии нехватки собственного капитала (для покупки ценных бумаг или при продаже через открытие короткой позиции, т.е. продаже заемных ценных бумаг):

$$\sum_{i\in I_t^+} x_{i,t}^+ s_{i,t} + \sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^- s_{i,t} - \left(m_t + \sum_{i\in I_t^-} x_{i,t}^- s_{i,t}\right) \le k_t\left(m_t + \sum_{i=1}^{n} v_{i,t} s_{i,t}\right),$$

где первые два слагаемых в левой части означают затраты на осуществление сделок по купле/продаже ценных бумаг, третье слагаемое – имеющийся в наличии у трейдера в момент t капитал в виде собственных денежных средств m_t и средств, полученных от продажи собственных ценных бумаг из инвестиционного портфеля, а правая часть представляет собой максимально доступный капитал с учетом заемных средств при доступном в момент t кредитном плече k_t ($k_t = 1$ означает отсутствие маржинального кредита и использование собственного капитала при осуществлении сделок).

Также предполагается, что при принятии инвестиционных решений трейдер исходит из существования некоторого порога α, относительно которого трейдер определяет критический момент остановки своей торговли на бирже $W_{i,t+1} \ge \alpha W_{i,t}$, т.е. трейдеру необходимо удерживать собственное благосостояние не ниже какого-то конкретного уровня $\alpha \in [0,1]$, в том числе при $\alpha = 1$: $W_{i,t+1} \ge W_{i,t}$.

3.3. Сведение задачи поиска оптимальной стратегии инвестирования к задаче линейного программирования

Предположим далее, что трейдер, играющий на фондовой бирже, в момент времени t может оценить границы (пороги) изменений $s_{i,t+1}^{max}$ и $s_{i,t+1}^{min}$ будущей стоимости ценных бумаг $i \in I_t^+, I_t^-$ в момент времени $t+1$, основываясь на прошлых наблюдениях или оцененных им фундаментальных значениях стоимости каждой из ценных бумаг.

Если трейдер может оценить границы изменений, но не может сделать предположений о конкретном законе распределения будущей стоимости ценной бумаги в указанных им границах, то для оценки значений $s_{i,t}$ естественно считать, что изменение стоимости ценной бумаги i как в сторону увеличения, так и изменение стоимости ценной бумаги i в сторону уменьшения по отношению к текущему значению $s_{i,t}$ являются непрерывными случайными величинами u и v, равномерно распределенными на промежутках $[s_{i,t}, s_{i,t+1}^{max}]$ и $[s_{i,t+1}^{min}, s_{i,t}]$, соответственно, с плотностями распределения вероятностей

$$f_1(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{s_{i,t+1}^{max} - s_{i,t}}, \textit{при } u \in \left[s_{i,t}, s_{i,t+1}^{max}\right], \\ 0, \textit{при } u \notin \left[s_{i,t}, s_{i,t+1}^{max}\right], \end{cases}$$

$$f_1(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{s_{i,t} - s_{i,t+1}^{min}}, \textit{при } v \in \left[s_{i,t+1}^{min}, s_{i,t}\right], \\ 0, \textit{при } v \notin \left[s_{i,t+1}^{min}, s_{i,t}\right]. \end{cases}$$

Если трейдер прогнозирует, что стоимость ценной бумаги i вырастет по сравнению с текущей стоимостью $s_{i,t+1} > s_{i,t}$, то математическое ожидание значения стоимости ценной бумаги вида i составит $Ms_{i,t+1} = \frac{s_{i,t}+ s_{i,t+1}^{max}}{2}$, а если, напротив, он прогнозирует снижение ее стоимости $s_{i,t+1} < s_{i,t}$, то математическое ожидание стоимости ценной бумаги i составит $Ms_{i,t+1} = \frac{s_{i,t+1}^{min}+s_{i,t}}{2}$. Возможно также, что по ценной бумаге i трейдер не может высказать ни одного из указанных выше предположений, тогда естественно предполагать, что стоимость ценной бумаги i остается без изменения, т.е. $s_{i,t+1} = s_{i,t}$.

Если в момент времени t трейдер предполагает (с вероятностью p_i), что в момент $t+1$ стоимость ценной бумаги i возрастет, т.е. $i \in I_t^+$, то среднее значение стоимости этой ценной бумаги составит $\frac{s_{i,t}+ s_{i,t+1}^{max}}{2}$. Если же в момент t решение трейдера относительно этой ценной бумаги ошибочно, то естественно предположить, что возможны два события: а) стоимость ценной бумаги i в момент времени $t+1$ уменьшится, б) стоимость ценной бумаги i в момент времени $t+1$ не изменится по сравнению с ее значением в момент времени t. Ясно, что эти два события несовместны, и естественно предположить, что эти события равновозможны, т.е. что каждое из них происходит с вероятностью $\frac{1-p_i}{2}$.

Таким образом, среднее значение стоимости ценной бумаги $i \in I_t^+$ в результате предположений трейдера представляет собой дискретную случайную величину, принимающую три значения, ряд распределения которой задается следующей таблицей

Таблица 1. Ряд распределения случайной величины $Ms_{i,t+1}, i \in I_t^+$

$Ms_{i,t+1}, i \in I_t^+$	$\frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$	$\frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2}$	$s_{i,t}$
P	p_i	$\frac{1-p_i}{2}$	$\frac{1-p_i}{2}$

Если же трейдер в момент времени t предполагает с вероятностью p_i, что в момент $t+1$ стоимость этой ценной бумаги уменьшится, т.е. $i \in I_t^-$, то рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, позволяют заключить, что среднее значение стоимости этой ценной бумаги трейдер может рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую три значения, ряд распределения которой задается следующей таблицей.

Таблица 2. Ряд распределения случайной величины $Ms_{i,t+1}, i \in I_t^-$

$Ms_{i,t+1}, i \in I_t^-$	$\frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2}$	$\frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$	$s_{i,t}$
P	p_i	$\frac{1-p_i}{2}$	$\frac{1-p_i}{2}$

Наконец, если трейдер считает, что ценная бумага i должна рассматриваться как ценная бумага из множества $i \in I_t^0$, аналогичные рассуждения позволяют рассматривать среднее значение стоимости этой ценной бумаги как дискретную случайную величину, принимающую три значения, ряд распределения которой задается табл. 3.

Таблица 3. Ряд распределения случайной величины $Ms_{i,t+1}, i \in I_t^0$

$Ms_{i,t+1}, i \in I_t^0$	$s_{i,t}$	$\dfrac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2}$	$\dfrac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$
P	p_i	$\dfrac{1-p_i}{2}$	$\dfrac{1-p_i}{2}$

Таким образом, в рассмотренных трех случаях математические ожидания $Ms_{i,t+1}$ вычисляются по следующим формулам:

$$Ms_{i,t+1} = p_i \frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2} + \frac{1-p_i}{2} s_{i,t}, i \in I_t^+,$$
$$Ms_{i,t+1} = p_i \frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2} + \frac{1-p_i}{2} s_{i,t}, i \in I_t^-,$$
$$Ms_{i,t+1} = p_i s_{i,t} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}, i \in I_t^0.$$

Если же трейдер может выдвинуть какие-либо конкретные предположения о законе распределения значений будущих стоимостей ценных бумаг из множеств I_t^+, I_t^-, то эти предположения могут позволить вычислить математические ожидания этих значений, аналогично тому, как это было показано для закона распределения с равномерной плотностью.

Оптимальная стратегия изменения трейдером своего портфеля инвестиций в момент t может быть найдена из решения задачи максимизации математического ожидания приращения стоимости портфеля при выполнении всех перечисленных выше ограничений, например, при выборе значения порога $\alpha = 1/2$ эта задача формулируется в виде

$$M[\Delta W_{t+1}] = \sum_{i \in I_t^0} v_{i,t}(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) + \sum_{i \in I_t^+} (v_{i,t} + x_{i,t}^+)(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) +$$
$$+ \sum_{i \in I_t^-} (v_{i,t} - x_{i,t}^-)(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) + \sum_{i \in I_t^-} z_{i,t}^-(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) \to max,$$
$$\sum_{i \in I_t^0} v_{i,t} Ms_{i,t+1} + \sum_{i \in I_t^+} [v_{i,t} + x_{i,t}^+] Ms_{i,t+1} + \sum_{i \in I_t^-} [v_{i,t} - x_{i,t}^-] Ms_{i,t+1} +$$

$$+\left(m_t - \sum_{i\in I_t^+} x_{i,t}^+ M s_{i,t} + \sum_{i\in I_t^-} x_{i,t}^- s_{i,t} + \sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^- [s_{i,t} - M s_{i,t+1}]\right)$$

$$\geq \alpha\left[\sum_{i=1}^{n} v_{i,t} s_{i,t} + m_t\right],$$

$$\sum_{i\in I_t^+} x_{i,t}^+ s_{i,t} + \sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^- s_{i,t} - \left(m_t + \sum_{i\in I_t^-} x_{i,t}^- s_{i,t}\right) \leq k_t\left(m_t + \sum_{i=1}^{n} v_{i,t} s_{i,t}\right),$$

$$x_{i,t}^- \leq v_{i,t}, i \in I_t^-,$$

и $x_{i,t}^+, i \in I_t^+$, $x_{i,t}^-, i \in I_t^-, z_{i,t}^-, i \in I_t^-$ – целые числа, т.е. является задачей целочисленного линейного программирования, в которой переменными являются $x_{i,t}^+, i \in I_t^+$, $x_{i,t}^-, i \in I_t^-$ и $z_{i,t}^-, i \in I_t^-$.

Как известно, при достаточно больших значениях целых переменных в задаче целочисленного линейного программирования, при решении прикладных задач, эти переменные рассматриваются как непрерывные, т.е. вместо задачи целочисленного линейного программирования решается задача линейного программирования, являющаяся ее релаксацией, и нецелочисленные компоненты решения затем округляются до целых значений [Юдин, Юдин, 2009] по какой-либо методике. Такое преобразование используется чаще всего тогда, когда ограничения задачи целочисленного линейного программирования нестрогие, т.е. являются ограничениями-неравенствами (что и имеет место в рассматриваемой задаче). Отметим, что проблема округления нецелых решений в релаксированной задаче линейного программирования и подход к анализу точности этого округления обсуждаются, в частности, в [Асратян, Кузюрин, 2004].

Таким образом, условия целочисленности переменных в приведенной выше задаче заменяются на условия неотрицательности объемов покупок/продаж ценных бумаг

$$x_{i,t}^+ \geq 0, i \in I_t^+,$$
$$x_{i,t}^- \geq 0, i \in I_t^-,$$
$$z_{i,t} \geq 0, i \in I_t^-,$$

что преобразует сформулированную задачу целочисленного линейного программирования в задачу линейного программирования.

4. Отыскание оптимальных стратегий инвестирования трейдера в финансовые инструменты. Модель 2: трейдер может численно оценивать лишь область изменения значений для всей совокупности (портфеля) финансовых инструментов

Предположим теперь, что в момент времени t трейдер может лишь: 1) выбрать множество I_t^+ ценных бумаг, стоимости которых, по его мнению, в момент времени $t+1$ вырастут по сравнению с их стоимостью в момент времени t, и 2) множество I_t^- ценных бумаг, стоимости которых, по его мнению, уменьшатся по сравнению с их стоимостью в момент времени t. Предположим далее, что с вероятностью $p^+ > 0{,}5$ трейдер верно определит, что значения стоимости ценных бумаг из множества I_t^+ увеличатся, так что с вероятностью $1-p^+$ эти значения не увеличатся. Аналогично предположим, что с вероятностью $p^- > 0{,}5$ трейдер верно определит, что значения стоимостей ценных бумаг из множества I_t^- уменьшатся, так что с вероятностью $1-p^-$ эти значения не уменьшатся.

Если в портфеле трейдера есть ценные бумаги из множества $I_t^0 = N \backslash (I_t^+ \cup I_t^-)$, то их стоимость также может измениться к моменту времени $t+1$, и, поскольку у трейдера относительно этих ценных бумаг нет никаких предположений о значениях их стоимостй в момент времени $t+1$, естествввенно предположить, что с точки зрения трейдера увеличение и уменьшение значений стоимостей этих ценных бумаг равновероятны.

Как и в п. 3, трейдер может рассматривать выбор оптимальной стратегии инвестирования в двух ситуациях: а) формирования нового портфеля, и б) изменения состава имеющегося у него портфеля. Хотя ниже рассматривается лишь ситуация а), предлагаемая модель дает полное представление об идеях подхода к выбору оптимальной стратегии инвестирования в случае, когда трейдер может численно оценивать лишь область изменения значений для всей совокупности (портфеля) финансовых инструментов.

Пусть

1) $x_t = (x_t^+, x_t^-, x_t^0) \in X_t^+ \times X_t^- \times X_t^0 \in R_+^{|I_t^+|+|I_t^-|+|I_t^0|}$ – вектор объемов покупок/продаж ценных бумаг из множества N в момент времени t,

где $x_t^+ \in R_+^{|I_t^+|}$ – вектор объемов покупок ценных бумаг из множества I_t^+, $x_t^- \in R_+^{|I_t^-|}$ – вектор объемов продаж ценных бумаг из множества I_t^-, $x_t^0 \in R_+^{|I_t^0|}$ – вектор объемов возможных покупок/продаж ценных бумаг из множества I_t^0;

2) $y_{t+1} = (y_{t+1}^+, y_{t+1}^-, y_{t+1}^0) \in Y_t^+ \times Y_t^- \times Y_t^0 \in R_+^{|I_t^+|+|I_t^-|+|I_t^0|}$ – вектор стоимостей единиц продаваемых и покупаемых ценных бумаг из множества N в момент времени $t+1$, если трейдер верно определил направление изменения значений стоимостей этих ценных бумаг,

где $y_{t+1}^+ \in R_+^{|I_t^+|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^+, по которой можно будет купить единицу ценной бумаги $i \in I_t^+$, если трейдер верно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью p^+), $y_{t+1}^- \in R_+^{|I_t^-|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^-, по которой можно будет продать единицу ценной бумаги $i \in I_t^-$, если трейдер верно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью p^-), $y_{t+1}^0 \in R_+^{|I_t^0|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^0, по которым (с вероятностью 1/2) они окажутся доступными в момент $t+1$, если трейдер верно определил направления изменений значений этих стоимостей;

3) $z_{t+1} = (z_{t+1}^+, z_{t+1}^-, z_{t+1}^0) \in Z_t^+ \times Z_t^- \times Z_t^0 \in R_+^{|I_t^+|+|I_t^-|+|I_t^0|}$ – вектор цен покупок/продаж ценных бумаг из множества N в момент времени $t+1$, если трейдер ошибся в своих прогнозах,

где $z_{t+1}^+ \in R_+^{|I_t^+|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^+, по которой можно будет купить единицу ценной бумаги $i \in I_t^+$, если трейдер неверно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью $1-p^+$), $z_{t+1}^- \in R_+^{|I_t^-|}$ – вектор стоимости ценных бумаг из множества I_t^-, по которой можно будет продать единицу ценной бумаги $i \in I_t^-$, если трейдер неверно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью $1-p^-$), $z_{t+1}^0 \in R_+^{|I_t^0|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^0, по которым (с вероятностью 1/2) они окажутся доступными в момент $t+1$, если трейдер неверно определил направления изменений значений этих стоимостей.

Пусть далее в каждый момент времени t трейдер исходит из существования линейных ограничений балансового типа на компоненты вектора x_t (аналогичных ограничениям, описанным в разделе 3), включая двусторонние ограничения – неравенства на каждую компоненту каждого из трех векторов, формирующих вектор x_t. Наличие этих ограничений позволяет заключить, что X_t^+ (допустимое множество для x_t^+), X_t^- (допустимое множество для x_t^-) и X_t^0 (допустимое множество для x_t^0) являются выпуклыми многогранниками в пространствах $R^{|I_t^+|}$, $R^{|I_t^-|}$, $R^{|I_t^0|}$ соответственно. Аналогично $Y_{t+1}^+, Y_{t+1}^-, Y_{t+1}^0$ и $Z_{t+1}^+, Z_{t+1}^-, Z_{t+1}^0$ (допустимые множества для $y_{t+1}^+, y_{t+1}^-, y_{t+1}^0$ и $z_{t+1}^+, z_{t+1}^-, z_{t+1}^0$ соответственно) являются выпуклыми многогранниками в силу неотрицательности и конечности значений стоимостей ценных бумаг из множества N.

Пусть, наконец, трейдер уверен в том, что в каждый момент времени t направления изменения стоимостей ценных бумаг связаны внутри множеств I_t^+ и I_t^- в том смысле, что значения стоимостей всех ценных бумаг внутри каждого из этих множеств меняются в одном направлении, т.е. либо все возрастают, либо все убывают, в то время как значения стоимостей ценных бумаг из группы I_t^0 могут меняться разнонаправленно.

Взаимодействие трейдера с биржей в части разбиения им множества N на подмножества I_t^+, I_t^- и I_t^0 можно рассматривать как игру двух лиц – трейдера и биржи, в которой стратегией трейдера является выбор объемов продаваемых и покупаемых им ценных бумаг из множеств I_t^+, I_t^- в момент t с намерением увеличить свой капитал в момент $t+1$, в то время как «стратегией» биржи является «выбор» значений стоимостей единиц ценных бумаг из множества N. В силу сложности и непредсказуемости формирования значений стоимостей ценных бумаг на бирже эту игру можно рассматривать как игру трейдера с природой, в которой природа (фондовая биржа) как игрок предлагает трейдеру наиболее неблагоприятные (для выбора трейдером множеств I_t^+, I_t^- и I_t^0) сочетания значений стоимостей ценных бумаг из инвестиционного портфеля трейдера в момент $t+1$ в виде векторов из выпуклых многогранников $Y_{t+1}^+, Y_{t+1}^-, Y_{t+1}^0$ и $Z_{t+1}^+, Z_{t+1}^-, Z_{t+1}^0$. Такая игра имеет определенную структуру, позволяющую отыскивать оптимальные стратегии игроков из решения задачи линейного программирования [Беленький, 1981].

Теорема. В каждый момент времени t взаимодействие между трейдером и биржей может быть описано в форме антагонистической игры на

выпуклых многогранниках несвязанных стратегий игроков $M_t = \{x_t \in R_+^n : B_t x_t \geq d_t)\}$ и $\theta_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^{2n} : A_t w_{t+1} \geq b_t\}$ с платежной функцией $\langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle$,
где

$$D_t = \begin{pmatrix} D^{|I_t^+|}(p^+) & D^{|I_t^+|}(1-p^+) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{|I_t^-|}(p^-) & D^{|I_t^-|}(1-p^-) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$x_t = (x_t^+, x_t^-, x_t^0) \in M_t = X_t^+ \times X_t^- \times X_t^0$,

$w_{t+1} = (w_{t+1}^+, w_{t+1}^-, w_{t+1}^0) \in \theta_{t+1} = \theta_{t+1}^+ \times \theta_{t+1}^- \times \theta_{t+1}^0$,

D_t – матрица размера $(|I_t^+| + |I_t^-| + |I_t^0|) \times 2(|I_t^+| + |I_t^-| + |I_t^0|)$,

$D^{|I|}(x)$ – диагональная матрица размера $|I|$, у которой все элементы главной диагонали равны x,

M_t – множество стратегий трейдера,

θ_{t+1} – множество стратегий фондовой биржи,

$\theta_{t+1}^+ = Y_{t+1}^+ \times Z_{t+1}^+$, $\theta_{t+1}^- = Y_{t+1}^- \times Z_{t+1}^-$, $\theta_{t+1}^0 = Y_{t+1}^0 \times Z_{t+1}^0$ – выпуклые многогранники и $w_{t+1}^+ = (y_{t+1}^+, z_{t+1}^+) \in \theta_{t+1}^+$, $w_{t+1}^- = (y_{t+1}^-, z_{t+1}^-) \in \theta_{t+1}^-$, $w_{t+1}^0 = (y_{t+1}^0, z_{t+1}^0) \in \theta_{t+1}^0$ – векторы, и седловая точка этой игры может быть найдена из решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару.

Доказательство

1. Рассмотрим ценные бумаги, входящие в множество I_t^+ в момент времени t. Если трейдер правильно угадал направление изменения значений ценных бумаг из этого множества, то приобретая ценные бумаги в количествах, являющихся компонентами вектора x_t^+, цены на которые в момент времени $t+1$ будут определяться компонентами вектора y_{t+1}^+, трейдер рассчитывает увеличить свой суммарный капитал. При этом наилучшая стратегия для трейдера в игре с биржей (с природой) состоит в выборе таких объемов приобретаемых ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle \to \max_{x_t^+ \in X_t^+}.$$

Если же трейдер не угадал бы направление изменения значений ценных бумаг из множества I_t^+, т.е. стоимости ценных бумаг из множества I_t^+ уменьшились бы в момент $t+1$, то наилучшей стратегией для трейдера в игре с биржей (с природой) являлся бы выбор таких объемов приобретаемых ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle \to \max_{x_t^+ \in X_t^+}.$$

Поскольку трейдер (правильно) угадывает направление изменения ценных бумаг из множества I_t^+ с вероятностью p^+, то при выборе трейдером конкретных количеств покупаемых им в момент t видов ценных бумаг из множества I_t^+, т.е. при выборе им конкретного вектора $x_t^+ \in X_t^+$, финансовый результат этого выбора можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую значения $\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle$ и $\min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle$ с вероятностями p^+ и $1-p^+$ соответственно. Ясно, что оптимальной стратегией трейдера будет выбор такого вектора $x_t^+ \in X_t^+$, который максимизирует математическое ожидание указанной дискретной случайной величины. Этот вектор находится из решения задачи:

$$p^+ \min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle + (1-p^+) \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle \to \max_{x_t^+ \in X_t^+}.$$

Нетрудно заметить, что справедливы равенства

$$\max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[p^+ \min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle + (1-p^+) \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle \right] =$$
$$= \max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(p^+)\, y_{t+1}^+ \rangle + \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(1-p^+)\, z_{t+1}^+ \rangle \right],$$

а поскольку множества Y_{t+1}^+ и Z_{t+1}^+ не пересекаются, то справедливы равенства

$$\max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(p^+)\, y_{t+1}^+ \rangle + \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(1-p^+)\, z_{t+1}^+ \rangle \right] =$$

$$\max_{x_t^+\in X_t^+}\left[\min_{(y_{t+1}^+,z_{t+1}^+)\in Y_{t+1}^+\times Z_{t+1}^+}\langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(p^+)D^{|I_t^+|}(1-p^+)\,(y_{t+1}^+,z_{t+1}^+)\rangle\right]=$$
$$=\max_{x_t^+\in X_t^+}\left[\min_{w_{t+1}^+\in\theta_{t+1}^+}\langle x_t^+, D^{2|I_t^+|}(p^+,1-p^+)\,w_{t+1}^+\rangle\right],$$

где $w_{t+1}^+ = \ (y_{t+1}^+, z_{t+1}^+), \theta_{t+1}^+ = Y_{t+1}^+ \times Z_{t+1}^+$,

$D^{2|I_t^+|}(p^+, 1-p^+) = D^{|I_t^+|}(p^+)D^{|I_t^+|}(1-p^+)$ и

$D^{|I_t^+|}(p^+)$ – диагональная матрица размера $|I_t^+|\times|I_t^+|$, у которой все элементы главной диагонали равны p^+,

$D^{|I_t^+|}(1-p^+)$ – диагональная матрица размера $|I_t^+|\times|I_t^+|$, у которой все элементы главной диагонали равны $1-p^+$,

$D^{2|I_t^+|}(p^+, 1-p^+)$ – матрица размера $|I_t^+|\times 2|I_t^+|$, образованная присоединением матрицы $D^{|I_t^+|}(1-p^+)$ к матрице $D^{|I_t^+|}(p^+)$ справа.

2. Рассмотрим ценные бумаги, образующие множество I_t^- в момент t. Если трейдер правильно угадал направление изменения стоимостей ценных бумаг из этого множества, то продавая ценные бумаги в количествах, являющихся компонентами вектора x_t^-, цены на которые в момент $t+1$ будут определяться компонентами вектора y_{t+1}^-, трейдер рассчитывает сохранить часть своего капитала за счет продажи по текущим ценам тех видов ценных бумаг, значения стоимостей которых, по мнению трейдера, должны уменьшиться. При этом наилучшая стратегия для трейдера состоит в выборе таких объемов продаваемых видов ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{y_{t+1}^-\in Y_{t+1}^-}\langle x_t^-, y_{t+1}^-\rangle \to \max_{x_t^-\in X_t^-}.$$

Если же трейдер не угадал бы направление изменений стоимостей ценных бумаг из множества I_t^-, т.е. стоимости ценных бумаг из множества I_t^- увеличились бы в момент $t+1$, то наилучшей стратегией для трейдера являлся бы выбор таких объемов приобретаемых ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{z_{t+1}^- \in Z_{t+1}^-} \langle x_t^-, z_{t+1}^- \rangle \to \max_{x_t^- \in X_t^-}.$$

Рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям, приведенным в п.1 настоящего доказательства, позволяют записать выражение для математического ожидания финансового результата выбора трейдером объемов ценных бумаг из множества I_t^- в виде

$$\min_{q_{t+1}^- \in \theta_{t+1}^-} \langle x_t^-, D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-)\, w_{t+1}^- \rangle,$$

которое (как и в случае бумаг из множества I_t^+), трейдер максимизирует за счет выбора вектора $x_t^- \in X_t^-$, т.е. решает задачу отыскания

$$\max_{x_t^- \in X_t^-} \left[\min_{q_{t+1}^- \in \theta_{t+1}^-} \langle x_t^-, D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-)\, w_{t+1}^- \rangle \right],$$

где $w_{t+1}^- = (y_{t+1}^-, z_{t+1}^-), \theta_{t+1}^- = Y_{t+1}^- \times Z_{t+1}^-$,

$D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-) = D^{|I_t^-|}(p^-) D^{|I_t^-|}(1-p^-)$ и

$D^{|I_t^-|}(p^-)$ – диагональная матрица размера $|I_t^-| \times |I_t^-|$, у которой все элементы главной диагонали равны p^-,

$D^{|I_t^-|}(1-p^-)$ – диагональная матрица размера $|I_t^-| \times |I_t^-|$, у которой все элементы главной диагонали равны $1-p^-$,

$D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-)$ – матрица размера $|I_t^-| \times 2|I_t^-|$, образованная присоединением матрицы $D^{|I_t^-|}(1-p^-)$ к матрице $D^{|I_t^-|}(p^-)$ справа.

3. Рассмотрим ценные бумаги, входящие в множество I_t^0 в момент t (по которым трейдер не может определить направление изменения стоимостей). Поскольку стоимости ценных бумаг из множества I_t^0 в момент $t+1$ могут принимать любые значения (как больше текущих стоимостей $s_{i,t+1}$, так и меньше), то наилучшей стратегией для трейдера является выбор объемов ценных бумаг, которые определяются из решения задач

$$\min_{y_{t+1}^0 \in Y_{t+1}^0} \langle x_t^0, y_{t+1}^0 \rangle \to \max_{x_t^0 \in X_t^0},$$

и

$$\min_{z_{t+1}^0 \in Z_{t+1}^0} \langle x_t^0, z_{t+1}^0 \rangle \to \max_{x_t^0 \in X_t^0},$$

причем рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным в п. 1 и п. 2 настоящего доказательства, позволяют записать выражение для математического ожидания финансового результата выбора трейдером объемов ценных бумаг из множества I_t^0 в виде

$$\min_{w_{t+1}^0 \in \theta_{t+1}^0} \langle x_t^0, D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) w_{t+1}^0 \rangle,$$

которое (как и в случае бумаг из множества I_t^+ и I_t^-), трейдер максимизирует за счет выбора вектора $x_t^0 \in X_t^0$, т.е. решает задачу отыскания

$$\max_{x_t^0 \in X_t^0} \left[\min_{w_{t+1}^0 \in \theta_{t+1}^0} \langle x_t^0, D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) w_{t+1}^0 \rangle \right],$$

где $w_{t+1}^0 = (y_{t+1}^0, z_{t+1}^0), \theta_{t+1}^0 = Y_{t+1}^0 \times Z_{t+1}^0$,

$D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = D^{|I_t^0|}(p^-) D^{|I_t^0|}(1 - p^-)$ и

$D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right)$ – диагональная матрица размера $|I_t^0| \times |I_t^0|$, у которой все элементы главной диагонали равны $\frac{1}{2}$,

$D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – матрица размера $|I_t^0| \times 2|I_t^0|$, образованная присоединением матрицы $D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right)$ к матрице $D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right)$ справа.

4. Поскольку финансовые результаты выбора трейдером объемов ценных бумаг из множеств I_t^+, I_t^- и I_t^0 являются случайными величинами (поскольку трейдер угадывает или не угадывает стоимости ценных бумаг в момент $t + 1$ лишь с некоторыми вероятностями), то математическое ожидание суммарного финансового результата является суммой указанных выше трех математических ожиданий.

Пусть $x_t = (x_t^+, x_t^-, x_t^0)$ принадлежит выпуклому многограннику $M_t = X_t^+ \times X_t^- \times X_t^0$ и $w_{t+1} = (w_{t+1}^+, w_{t+1}^-, w_{t+1}^0)$ принадлежит выпуклому многограннику $\theta_{t+1} = \theta_{t+1}^+ \times \theta_{t+1}^- \times \theta_{t+1}^0$, матрица D_t составлена следующим образом:

$$D_t = \begin{pmatrix} D^{2|I_t^+|}(p^+, 1-p^+) & 0 & 0 \\ 0 & D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-) & 0 \\ 0 & 0 & D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D^{|I_t^+|}(p^+) & D^{|I_t^+|}(1-p^+) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{|I_t^-|}(p^-) & D^{|I_t^-|}(1-p^-) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

а выпуклые многогранники M_t и θ_{t+1} являются множествами допустимых решений некоторых совместных систем линейных неравенств, так что $M_t = \{x_t \in R_+^n : B_t x_t \geq d_t)\}$, $\theta_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^{2n} : A_t w_{t+1} \geq b_t\}$.

Тогда при каждом выборе трейдером вектора x_t из множества X_t математическое ожидание суммарного финансового результата, определяемого этим выбором, составит

$$\min_{w_{t+1} \in \theta_{t+1}} \langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle.$$

Естественно считать наилучшим выбором такой, при котором достигается

$$\max_{x_t \in X_t} \left[\min_{w_{t+1} \in \theta_{t+1}} \langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle \right] \tag{3}$$

и значение этого максимина достигается в седловой точке игры двух лиц на выпуклых многогранниках M_t и θ_{t+1} с платежной функцией $\langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle$.

Пусть

$$Q_t = \{(h_t, x_t) \geq 0 : h_t A_t \leq x_t D_t, B_t x_t \geq d_t\}$$
$$P_{t,t+1} = \{(s_{t+1}, w_{t+1}) \geq 0 : s_{t+1} B_t \leq -D_t w_{t+1}, A_t w_{t+1} \geq b_t\}.$$

Тогда оптимальные значения векторов $(x_t)^*$ и $(w_{t+1})^*$, образующие седловую точку функции (3) на $M_t \times \theta_{t+1}$, находятся как компоненты векторов решений задач линейного программирования, образующих двойственную пару

$$\langle b_t, h_t \rangle \to \max_{(h_t, x_t) \in Q_t},$$
$$\langle -d_t, s_{t+1} \rangle \to \min_{(s_{t+1}, w_{t+1}) \in P_{t,t+1}}.$$

Если $((x_t)^*, (w_{t+1})^*)$ – решение указанной пары задач линейного программирования, то значения векторов $(x_t^+)^*$, $(x_t^-)^*$ и $(x_t^0)^*$, где $(x_t)^* = ((x_t^+)^*, (x_t^-)^*, (x_t^0)^*)$, полностью определяются значениями компонент вектора $(x_t)^*$ [Беленький, 1981]. Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно показать, что в ситуации б), когда трейдер отыскивает оптимальные стратегии инвестирования в ценные бумаги исходя из имеющегося у него в момент времени t портфеля ценных бумаг, рассмотренная игра формулируется как игра на выпуклых многогранниках $\widetilde{M}_t = \{x_t \in R_+^n : \tilde{B}_t x_t \geq \tilde{d}_t)\}$ и $\tilde{\theta}_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^{2n} : \tilde{A}_t w_{t+1} \geq \tilde{b}_t\}$ с платежной функцией $\langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle + \langle q, w_{t+1} \rangle$, где $q \in R_+^{2n}$ – некоторый фиксированный вектор. Как показано в [Беленький, 1981], седловая точка в такой игре находится из решения задач линейного программирования

$$\langle \tilde{b}_t, h_t \rangle \to \underset{(h_t, x_t) \in \tilde{Q}_t}{max},$$
$$\langle -\tilde{d}_t, s_{t+1} \rangle + \langle q, w_{t+1} \rangle \to \underset{(s_{t+1}, w_{t+1}) \in \tilde{P}_{t,t+1}}{min},$$

где $\tilde{Q}_t = \{(h_t, x_t) \geq 0 : h_t \tilde{A}_t \leq q + x_t D_t, \tilde{B}_t x_t \geq \tilde{d}_t\}$, $\tilde{P}_{t,t+1} = \{(s_{t+1}, w_{t+1}) \geq 0 : s_{t+1} \tilde{B}_t \leq -D_t w_{t+1}, \tilde{A}_t w_{t+1} \geq \tilde{b}_t\}$, образующих двойственную пару.

Замечание 2. Хотя в обеих моделях рассматривалась ситуация, когда формирование и изменение портфеля трейдера осуществлялось только из числа ценных бумаг и не включало производные финансовые инструменты (опционы и фьючерсы), можно показать, что обе предложенные модели могут быть использованы для формирования и решения задачи отыскания оптимального портфеля с учетом интересующих трейдера производных финансовых инструментов (опционов и фьючерсов).

5. Заключение

Работа посвящена моделированию поведения трейдера при принятии им решений о формировании и изменении структуры и состава его инвестиционного портфеля при двух предположениях о возможностях трейдера по оценке будущих значений стоимостей каждого из финансовых инструментов из его портфеля.

В ней рассмотрены две ситуации: а) когда у трейдера есть некоторые предположения о законах распределения изменений будущих цен на финансовые инструменты (как минимум, о границах ожидаемых им изменений значений стоимости каждого финансового инструмента), и б) когда трейдер может только определить лишь направления изменений стоимостей всей совокупности финансовых инструментов, входящих в его инвестиционный портфель, с помощью линейных неравенств балансового типа. Первый вариант более характерен для трейдеров, придерживающихся технического анализа и определяющих на графиках цен так называемые «уровни сопротивления» и «уровни поддержки» на основании анализа, например, паттернов цен. Второй вариант является более общим и может представлять интерес для любых трейдеров и/или их финансовых консультантов.

Доказано, что оптимальные стратегии инвестирования трейдера в интересующие его финансовые инструменты можно отыскивать из решения задач линейного программирования (в ситуации а)) и решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару (в ситуации б)).

Благодарности. Препринт подготовлен в ходе исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ. Авторы признательны профессору Ф.Т. Алескерову за обсуждение работы и высказанные критические замечания, позволившие улучшить изложение материала, и возглавляемой им Международной научно-учебной Лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ за финансовую поддержку их работы. Л.Г. Егорова выражает благодарность Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0057.

Литература

Асратян А.С., Кузюрин Н.Н. Анализ точности вероятностного округления для задач целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. 2004. Т. 6. Вып. 4. С. 3–13.

Беленький А.С. Минимаксные задачи планирования с линейными ограничениями и методы их решения // Автоматика и Телемеханика. 1981. Т. 42. Вып. 10. С. 1409–1419.

Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.

Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Экстремальные модели в экономике. М.: URSS, 2009.

Barber B., Odean T. Trading is hazardous to your wealth: The common stock investment performance of individual investors // Journal of Finance. 2000. Vol. 55. No. 2. P. 773–806.

Barberis N., Thaler R. A survey of behavioral finance // NBER Working Paper Series. 2002. Working paper 9222 <http://www.nber.org/ papers/w9222>.

Belenky A.S., Egorova L.G. An approach to forming and managing a portfolio of financial securities by small and medium price-taking traders in a stock exchange // Advances in Intelligent Systems and Computing. May, 2015.

De Bondt W.F.M., Thaler R.H. Financial Decision-Making in Markets and Firms: a Behavioral Perspective // NBER Working paper. 1994. Working paper 4777 <http://www.nber.org/papers/w4777>.

Kahneman D. Thinking, fast and slow. N.Y.: Penguin, 2011.

Malkiel B.G., Saha A. Hedge Funds: Risk and Return // Financial Analysts Journal. 2005. Vol. 61. No. 6. P. 80–88.

Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. Vol. VII. No. 1. P. 77–91.

Mullainathan S., Thaler R.H. Behavioral Economics // NBER Working paper. 2000. Working paper 7948 <http://www.nber.org/papers/w7948>.

Odean T. Do investors trade too much? // American Economic Review. 1999. Vol. 89. No. 5. P. 1279–98.

Penikas H., Proskurin S. How Well Do Analysts Predict Stock Prices? Evidence from Russia // Working papers by NRU Higher School of Economics. Series FE "Financial Economics". WP BRP 18/FE/2013.

Soderlind P. Predicting stock price movements: regressions versus economists // Applied Economic Letters. 2010. Vol. 17. P. 869–874.

Taleb N.N. The Black Swan: The Impact of The Highly Improbable. L.: Penguin Books, 2008.

Belenky, A. S., Egorova, L. G.

Two decision-making models of a trader on developing and changing her investment portfolio [Text] : Working paper WP7/2015/02 / A. S. Belenky, L. G. Egorova ; National Research University Higher School of Economics. – Moscow: Higher School of Economics Publ. House, 2015. – 32 p. – 35 copies. (In Russian.)

Two mathematical models formalizing the decision-making process by a trader on developing and changing her investment portfolio in a stock exchange are presented. According to the first model the trader can correctly predict future values of financial securities of her interest. In this case, the problem of finding optimal strategies of investing in these financial securities is reduced to solving a linear programming problem. Under the second model, by means of linear inequalities of a balance type, the trader can estimate the area in which the values of the whole spectrum of the above financial securities may change. In this case, the same problem is formulated as an antagonistic game, analogous to the game with nature, with a nonlinear payoff function. It is proven that saddle points in this game can be found by solving linear programming problems forming a dual pair.

Belenky A.S. – professor, Department of Higher Mathematics, Faculty of Economics, NRU HSE, Moscow, Russia.

Egorova L.G. – lecturer, Department of Higher Mathematics, Faculty of Economics, NRU HSE, Moscow, Russia.

Препринт WP7/2015/02
Серия WP7
Математические методы анализа решений
в экономике, бизнесе и политике

Беленький Александр Соломонович,
Егорова Людмила Геннадьевна

Две модели принятия решений участником торгов на фондовой бирже по формированию и изменению своего инвестиционного портфеля

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Тираж 35 экз. Уч.-изд. л. 2
Усл. печ. л. 1,86. Заказ № . Изд. № 1922

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»