

**Программа на 2016-17 учебный год.  
(Алгебра, геометрия и логика будут добавлены позже)**

**Комбинаторика, 1 курс 2+ модуль (12 недель)**

1. Множества и мультимножества. Биномиальные коэффициенты. Мультиномиальные коэффициенты, перестановки мультимножеств. Статистики на группе перестановок, статистические суммы, циклическая структура.  $q$ -биномиальные коэффициенты - многочлены Гаусса.  $q$ -мультиномиальные коэффициенты и перестановки мультимножеств.
2. Алгебра формальных степенных рядов, теорема существования и единственности обратного ряда. Дифференциальное и интегральное исчисления формальных степенных рядов. Разложение в ряд Тейлора, формула для производной композиции двух рядов. Логарифм и экспонента, бином Ньютона.
3. Числа Фибоначчи. Рекуррентные последовательности, рациональные производящие функции, разложение на простейшие дроби и квазимногочлены. Неоднородные рекуррентные соотношения.
4. Числа Каталана: комбинаторные реализации, рекуррентное соотношение, производящая функция, явная формула. Числа разбиений, диаграммы Юнга, производящая функция. Разбиения на различные и нечётные слагаемые. Пятиугольные числа, теорема Эйлера и рекуррентная формула.
5. Перечисление путей в графах. Графы Дика и Паскаля. Производящие функции от двух переменных. Треугольник Бернулли-Эйлера. Экспоненциальные производящие функции чисел Бернулли-Эйлера от одной и двух переменных.

**Общая топология, 1 курс 3 модуль (11 недель, порядок изложения и наличие доказательств на усмотрение лектора)**

1. Метрические и топологические пространства, их подпространства. База топологии. Замыкание, внутренность, граница. Непрерывные отображения и их графики.
  2. Примеры: метрическая топология в  $\mathbb{R}^n$ ,  $p$ -адическая топология, компактно-открытая топология пространства отображений, метрика Хаусдорфа.
  3. Связность и линейная связность. Компоненты связности.
  4. Компактность. Компактность метрических пространств. Одноточечная компактификация. Гомеоморфизмы компактов.
  5. Факторпространства. Подклейка по отображению, факторизация по действию группы. Сфера, тор, проективное пространство, конус, букет.
  6. Аксиомы отделимости.
  7. Произведение топологических пространств, теорема Тихонова о произведении компактов.
  8. Полные метрические пространства. Теорема Бэра. Пополнение. Полнота пространства непрерывных функций. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения.
- ★ Лемма Урысона. Паракompактность. Разбиение единицы.
  - ★ Теорема Титце о продолжении. Теорема Урысона о метризации.
  - ★ Теорема Вейерштрасса---Стоуна.
- Пункт 5 рекомендуется разобрать по возможности раньше, чтобы выделить как можно больше времени практических занятий на проработку топологии склеек и факторпространств.

## Анализ, 1-2 курс

1. Действительные (вещественные) числа.
2. Пределы последовательностей в  $\mathbf{R}$ . Критерий Коши. Теорема Больцано-Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. Существование предела монотонной последовательности.
3. Пределы функций одного переменного. Эквивалентность определений по Гейне и по Коши. Символы "o" и "O".
4. Непрерывность функций одного переменного. Свойства непрерывных функций на отрезке. Обратная функция и ее непрерывность. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.
5. Производная функции одного переменного. Производная суммы, произведения, композиции, обратной функции. Теорема Ролля и теорема Лагранжа о конечном приращении. Связь производной с возрастанием/убыванием функций. Экстремумы, асимптоты, построение графиков функций одного переменного.
6. Правило Лопиталю. Формула Тейлора.
7. Построение параметризованных кривых на плоскости.
8. Функциональные последовательности. Равномерная сходимости. Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций.
9. Первообразная. Интеграл функции на отрезке. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в интеграле, интегрирование по частям.
10. Ряды с положительными членами. Признаки их сходимости.
11. Ряды с действительными членами. Абсолютная сходимости. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда.
12. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.
13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Сходимость рядов Тейлора элементарных функций.
14. Топология пространства  $\mathbf{R}^n$ . Непрерывные отображения из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ .
15. Дифференцируемые отображения из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ . Дифференциал (производная) отображения. Частные производные. Дифференциал суммы, произведения, композиции, обратного отображения.
16. 1-формы в  $\mathbf{R}^n$ . Интеграл 1-формы по пути. Работа силы.
17. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Экстремум функции нескольких переменных.
18. Теорема о неявном отображении (для отображений из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ ). Диффеоморфизмы. Теорема об обратном отображении.
19. Подмногообразия в  $\mathbf{R}^n$ . Касательное пространство к подмногообразию.
20. Условный экстремум. Множители Лагранжа.
21. Алгебры,  $\sigma$ -алгебры. Борелевская  $\sigma$ -алгебра. Измеримые отображения и функции.
22. Положительные меры. Теорема о продолжении меры с алгебры на  $\sigma$ -алгебру измеримых множеств.
23. Мера Лебега в  $\mathbf{R}^n$ . Ее регулярность.
24. Интеграл Лебега по пространству с мерой. Теоремы о предельном переходе для интеграла Лебега.
25. Произведение мер. Теорема Фубини.

26. Замена переменной в интеграле в  $\mathbf{R}^n$ . Приложения к вычислению объемов тел.
  27. Различные виды сходимости измеримых функций. Теорема Егорова.
  28. Пространства  $L^1$  и  $L^2$ , их полнота.
  29. Теорема Радона-Никодима.
    - ★ Комплексные меры. Вариация комплексной меры. Разложения Хана и Жордана.
    - ★ Функции ограниченной вариации на отрезке. Их дифференцируемость почти всюду.
    - ★ Абсолютно непрерывные функции на отрезке. Производная интеграла интегрируемой по Лебегу функции на отрезке по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница для абсолютно непрерывных функций.
  30. Интегралы, зависящие от параметра. Их дифференцирование и интегрирование по параметру.
  31. В- и Г-функции Эйлера.
  32. Гильбертовы пространства. Ортогональные и ортонормированные системы. Коэффициенты Фурье. Неравенство Бесселя. Ортонормированные базисы, ряды Фурье, равенство Парсеваля.
  33. Тригонометрическая система функций на отрезке. Достаточные условия поточечной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими многочленами.
    - ★ Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
    - ★ Преобразование Фурье интегрируемых функций. Преобразование Фурье и дифференцирование. Преобразование Фурье и свёртка. Пространство Шварца быстро убывающих гладких функций. Формула обращения. Теорема Планшереля.
- Материал пунктов 1-16 должен быть изложен на 1 курсе.
- Материал пунктов 17-20 должен быть изложен не позже, чем в 1 модуле 2 курса.
- Материал пунктов 21-26 должен быть изложен не позже, чем к середине 3 модуля 2 курса.