КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА

математический анализ, 1 курс, 3 модуль, 2016, А.М. Красносельский

Лекция 1 (13 января 2016)

1 Числовые ряды

Рассмотрим последовательность $a_n \in \mathbb{R}$ и напишем «бесконечную сумму»:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots .$$

Это выражение называется **числовой ряд** или просто **ряд**. Слова «бесконечная сумма» означают пока лишь формальное математическое выражение: слагаемые, соединённые между собой знаком «+». Никакого формального определения я пока не давал. Слагаемые a_n называются **членами** этого ряда.

Величина $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется **частичной суммой** данного ряда.

Частичная сумма — обычная сумма конечного количества слагаемых. Ряд $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность частичных сумм, иными словами, если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Этот предел (если он существует) называется **суммой ряда** $\sum a_n$ и также обозначается $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Если этот предел не существует, то ряд называется **расходящимся** и сумма ряда в этом случае не определена.

Сходимость ряда не зависит от выбрасывания конечного числа элементов. Мы будем много раз этим пользоваться, даже более того — подразумевать без упоминания. Отсюда следует, что имеет смысл вопрос о сходимости ряда $\sum a_n$ без индексов в сумме: все равно, откуда начинать.

Члены ряда могут быть выражены через последовательность частичных сумм: $a_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$ и $a_1 = S_1$. Вроде последовательности и ряды — одно и то же, однако задачи часто разные: у последовательностей — найти предел, у рядов — сходится ли он.

При этом по S_n найти a_n легко, а по a_n найти S_n очень трудно, основные 2 случая — прогрессии и ряды из разностей.

Те же определения могут быть использованы для рядов с комплексными членами, для рядов в любых линейных нормированных пространствах.

Примеры рядов

1. **Геометрическая прогрессия.** Пусть $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, соответствующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ изучался еще в школе. Этот ряд составлен из членов геометрической прогрессии со знаменателем $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ и с первым членом $a_1 = 1$. Так как

$$S_n = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + \ldots + (\frac{1}{2})^n = 2 - (\frac{1}{2})^n, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\, 2 - (\frac{1}{2})^n \,\right) = 2,$$

то рассматриваемый ряд сходится и его сумма равна 2. Аналогично, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, при $|q| < 1$.

2. Пусть $a_n = (-1)^n$, этой последовательности соответствует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

Частичные суммы S_n этого ряда равны -1 при нечетных n и 0 при четных n. Последовательность $-1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots$ частичных сумм не сходится, следовательно ряд расходится.

3. **Гармонический ряд.** Пусть $a_n = \frac{1}{n}$, этой последовательности соответствует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$$

Написать явную формулу для частичных сумм этого ряда не удается. Вопрос о сходимости или расходимости этого ряда был уже рассмотрен и вы знаете, что он расходится. Этот ряд — единственный, имеющий особое название, он называется **гармонический ряд**.

4. Пусть $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, этой последовательности соответствует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Частичные суммы этого ряда легко считаются:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому $S_n \to 1$, значит ряд сходится и его сумма равна 1.

5. Вообще, если самые лёгкие ряды — ряды из сумм $\sum(s_n - s_{n-1})$, для них $S_n = s_n - s_0$.

Необходимое условие сходимости. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Если ряд сходится, то последовательности S_n и S_{n+1} сходятся к общему пределу S — сумме ряда $\sum a_n$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S_{n+1} - S_n \right) = S - S = 0$. $\square$

Пример. Ряд $\sum(-1)^{n+1}$ расходится, так как его члены не стремятся к нулю.

Критерий Коши сходимости ряда.

Этот критерий нужен для доказательства почти всех теорем о рядах, всех признаков сходимости и расходимости. Непосредственно к исследованию конкретных рядов критерий Коши, как правило, не применяется. Это просто перефразировка теоремы «последовательность сходится, если и только если она фундаментальна» для последовательности частичных сумм ряда.

Теорема. *Для того, чтобы ряд* $\sum a_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall m > 0,\ n > N \quad \text{справедливо} \quad A = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Для доказательства достаточно заметить, что $A = S_{n+m} - S_n$ и воспользоваться критерием Коши для последовательностей (последовательность сходится, iff она фундаментальна). $\square$

Важное следствие. *Если ряд* $\sum |a_n|$ *сходится, то и ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

Доказательство: применим дважды признак Коши в обе стороны. $\square$

Определение. Ряд $\sum a_n$ **абсолютно сходится**, если ряд $\sum |a_n|$ сходится. Ряд **сходится условно**, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Следствие произносится теперь по-другому: абсолютно сходящийся ряд сходится.

Важные слова: если ряд сходится условно, то оба ряда, составленные из его членов одного знака, расходятся. Это будет когда-нибудь позже сформулировано и доказано строго, а пока — верите мне на слово. Если бы ровно один из этих рядов сходился, то весь ряд бы расходился; если бы сходились оба, исходный ряд сходился бы абсолютно.

Примеры. Ряд $\sum(-1)^n/n$ сходится условно. Ряд $\sum(-1/2)^n$ сходится абсолютно. Ещё пример условно сходящегося ряда:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots = 0.$$

Расходимость гармонического ряда. Была в листочках и на лекциях, однако вот ещё конструкция.

Теорема. *Гармонический ряд расходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Положим $m = n$, тогда для каждого натурального n справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} a_k\right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По критерию Коши гармонический ряд расходится. $\square$

Арифметические свойства сходящихся рядов

Свойство 1. *Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление конечного числа новых) не влияет на сходимость или расходимость ряда.*

Обозначим через s сумму всех отброшенных членов, через m — их число, а через M — наибольший номер члена, из числа отброшенных-добавленных. Обозначим через s_n частичные суммы ряда, получившегося после отбрасывания. При $n > M$ справедливо равенство $S_n = s_{n-m} + s$. Так как m и s — фиксированные конечные числа, то в силу теоремы о пределе суммы $\lim S_n = s + \lim s_n$, причем пределы в правой и левой части этого равенства существуют одновременно. $\square$

В силу этого свойства можно говорить о сходимости или расходимости ряда $\sum a_n$, не уточняя, с какого n начинается суммирование.

Свойство 2. *Ряд $\sum b_n$, где $b_n = c\,a_n$, сходится или расходится одновременно с рядом $\sum a_n$. Если ряд $\sum a_n$ сходится и $\sum a_n = S$, то $\sum b_n = cS$.*

Иначе говоря, постоянный множитель можно выносить за знак бесконечной суммы.

Обозначим частичные суммы ряда $\sum b_n$ через s_n, очевидно, $s_n = c\,S_n$. Поэтому свойство 2 следует из того, что постоянный множитель можно выносить за знак предела. $\square$

Свойство 3. *Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся, то сходится и ряд $\sum c_n = \sum(a_n + b_n)$.*

Обозначим частичные суммы ряда $\sum b_n$ через s_n, тогда частичные суммы ряда $\sum c_n$ имеют вид $S_n + s_n$, из сходимости последовательности частичных сумм рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ следует сходимость ряда $\sum c_n$. $\square$

2 Ряды с положительными членами

Теорема. *Для сходимости ряда с неотрицательными или положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм была ограничена.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами не убывает. Поэтому, если эта последовательность ограничена, то она сходится по теореме Вейерштрасса. Обратно, если эта последовательность сходится, то она ограничена. $\square$

Заметим, что **сумма сходящегося ряда с положительными членами совпадает с точной верхней гранью частичных сумм**.

Принципы сравнения

Теперь приведём утверждения, позволяющие по сходимости или расходимости одного ряда устанавливать сходимость или расходимость другого. Это — основной подход к исследованию сходимости.

Теорема. *Пусть даны два ряда $\sum a_n$, $\sum b_n$, $a_n, b_n \geqslant 0$. Пусть при некотором $c > 0$ для всех n справедливо неравенство $a_n \leqslant cb_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$, а из расходимости ряда $\sum a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum b_n$.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum b_n$ сходится. Тогда по критерию Коши для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех натуральных $n \geq N$ и $m > 0$ выполнено неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} b_k < \varepsilon$. Но тогда $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} c\,b_k < c\,\varepsilon$. Поэтому в силу критерия Коши ряд $\sum a_n$ сходится тоже.

Второе утверждение следует из уже доказанного первого, рассуждение «от противного». $\square$

Теорема. *Пусть даны два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ с положительными членами и пусть существует конечный положительный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0.$$

Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. В силу условия при достаточно больших n выполнены неравенства

$$\frac{1}{2} L b_n \leqslant a_n \leqslant 2L b_n.$$

Пусть сходится ряд $\sum b_n$. Тогда сходится и ряд $\sum 2Lb_n$. Но тогда ряд $\sum a_n$ сходится.

Пусть сходится ряд $\sum a_n$. Тогда сходится и ряд $\sum \frac{1}{2}Lb_n$. Но тогда ряд $\sum b_n$ сходится снова. $\square$

Теорема. *Пусть даны два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ с положительными членами. Пусть при достаточно больших n справедливо неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тогда из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$, а из расходимости ряда $\sum a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum b_n$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что неравенство выполняется при всех n. В противном случае выбросим начальную конечную часть ряда, ту, где не выполнено. Сходимость ряда не зависит от выбрасывания конечного числа элементов.

Выпишем неравенство для $n = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \ \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

и перемножим все эти неравенства между собой. Полученное неравенство

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} \quad \text{перепишем в виде} \quad a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Теперь утверждения теоремы вытекают из уже доказанного. □

Следующая теорема — весьма практичный метод исследования сходимости рядов с положительными членами.

Теорема. *Пусть последовательность $a_n > 0$ монотонная и убывает к нулю. Тогда ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \qquad \text{сходятся или расходятся одновременно.}$$

Для доказательства напишем неравенства

$$\begin{aligned} a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1, \\ 2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2, \\ 4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4, \\ 8a_{16} \leqslant a_9 + a_{10} + \ldots + a_{15} + a_{16} \leqslant 8a_8, \\ \ldots \\ 2^{n-1} a_{2^n} \leqslant a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n} \leqslant 2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

и сложим их. Положим $R_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$, получается $\frac{1}{2}(R_n - a_1) \leqslant S_{2^n} - a_1 \leqslant R_n$. Осталось воспользоваться теоремами сравнения. □

Примеры применения этой теоремы. Видно, что её доказательство похоже на конструкции, использованные при исследовании гармонического ряда.

Пример 1. Гармонический ряд $a_n = n^{-1}$ расходится, как и ряд $2^n 2^{-n} = 1$.

Пример 2. Ряд $a_n = n^{-1-\sigma}$, $\sigma > 0$ сходится, как и ряд $2^n 2^{-n-\sigma n} = (2^{-\sigma})^n$. Это геометрическая прогрессия со знаменателем меньше 1.

Пример 3. Ряд $a_n = (n \ln n)^{-1}$ расходится, как и ряд $2^n 2^{-n} n^{-1} (\ln 2)^{-1}$ — это гармонический ряд.

Пример 4. Ряд $a_n = n^{-1}(\ln n)^{-1-\sigma}$, $\sigma > 0$ сходится по примеру 2.

Признак Даламбера. *Пусть $a_n > 0$. Положим $\mathcal{D}_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Если для всех достаточно больших n справедливо неравенство $\mathcal{D}_n \leqslant q < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится. Если для всех достаточно больших n справедливо неравенство $\mathcal{D}_n \geqslant 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.*

Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}_n = d$. Если $d < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится; если $d > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится (*признак Даламбера в предельной форме*).

Если существует предел и $d = 1$, то, используя лишь число d, невозможно дать ответ на вопрос о сходимости ряда $\sum a_n$.

Все «хитрые» случаи — это либо когда $\mathcal{D}_n < 1$ и $\mathcal{D}_n \to 1$, либо когда у последовательности $\mathcal{D}_n$ есть несколько предельных точек, среди которых есть и меньшие 1, и большие 1.

Пример. Ряд может сходиться, несмотря на то, что подпоследовательность $\mathcal{D}_n$ имеет 2 предельные точки. Например, ряд $1 + 1/4 + 1/2 + 1/8 + 1/4 + 1/16 + 1/8...$ (1 умножили на 1/4 потом умножили на 2 и так до бесконечности) сходится, сумма равна 2.5.

Доказательство признака Даламбера основано на сравнении изучаемого ряда с геометрической прогрессией. Если верно $q < 1$, то сравним ряд $\sum a_n$ с геометрической прогрессией $b_n = q^n$ со знаменателем q. Основное условие следует из $q < 1$, ряд из геометрической прогрессии сходится, поэтому сходится и ряд $\sum a_n$.

Если верно $d > 1$, то не выполнено необходимое условие сходимости ряда: a_n не убывают и не могут стремиться к нулю.

Если существует предел и $d < 1$, то при достаточно больших n выполнено условие $\mathcal{D}_n \leqslant q$, где $q = (1+d)/2 < 1$ и ряд сходится.

Если существует предел и $d > 1$, то при достаточно больших n выполнено условие $\mathcal{D}_n \geqslant 1$, и ряд расходится. □

Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$. Воспользуемся для этого признаком Даламбера в предельной форме: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{(n+1)}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$. Ряд сходится.

Пример 2. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$. Снова воспользуемся признаком Даламбера в предельной форме:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e > 1$. Ряд расходится.

Лекция 2 (20 января 2016)

На прошлой лекции, неделю назад, мы занимались следующими вещами.

1) Определение ряда, сходящегося ряда;

2) Необходимое условие сходимости ряда ($a_n \to 0$);

3) Критерий Коши $\Leftrightarrow$ фундаментальность последовательности частичных сумм;

4) Абсолютная сходимость, условная сходимость; абсолютно сходящийся ряд сходится;

5) Ряды с положительными членами; аналог теоремы Вейерштрасса: сходимость равносильна ограниченности последовательности частичных сумм;

6) Признак через $\sum 2^n a_{2^n}$;

7) Признаки сравнения, признак Даламбера[1].

Сейчас мы продолжим изучать положительные ряды.

Признак Коши. *Пусть* $a_n > 0$, *положим* $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$. *Если при достаточно больших* n *справедливо неравенство* $\mathcal{C}_n \leqslant q < 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится, Если при бесконечном множестве достаточно больших* n *справедливо неравенство* $\mathcal{C}_n \geqslant 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Для доказательства сходимости сравним ряд $\sum a_n$ с геометрической прогрессией, для доказательства расходимости заметим, что не выполнено необходимое условие сходимости. □

Признаки Даламбера и Коши устроены сходным образом: по членам ряда выписывается некоторая последовательность ($\mathcal{D}_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$), если она меньше 1 и отделена от 1, ответ один, если она больше 1, ответ другой. Если последовательность стремиться к 1 снизу, ответа признак не даёт.

Если существует $\lim \mathcal{C}_n = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится, при $q > 1$ — расходится, при $q = 1$ — неизвестно, признак Коши ответа не даёт.

Признаки Даламбера с прошлой лекции и Коши вытекали из сравнения испытуемого ряда с геометрической прогрессией. Поэтому и годились эти признаки «не часто»: сходимость получалась, только если члены ряда убывали быстрее геометрической прогрессии, а расходимость, если члены ряда не стремились к нулю.

Теперь вместо геометрической прогрессии и константы в качестве образца для сравнения возьмём ряд $\sum n^{-\sigma}$. Как мы знаем уже (и это надо знать наизусть!) этот ряда расходится при $\sigma \leqslant 1$ и сходится при $\sigma > 1$. Вот из сравнения с этими рядами получаются признаки

[1] Д'Аламбер, Жан Лерон, 1717–1783. Лет в 25-30 занимался математикой, потом вместе с Дидро создавал Энциклопедию. Мысль о том, что время — 4е измерение. Комплексный анализ, уравнение струны, первое почти строгое доказательство основной теоремы алгебры.

«похитрее». Мы подробно рассмотрим один из них — признак Раабе[2], а сформулирую я ещё и признак Гаусса[3].

Признак Раабе. *Пусть* $a_n > 0$*, положим*

$$\mathcal{R}_n = n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big).$$

Если $\mathcal{R}_n \geqslant r$ *при некотором* $r > 1$*, то ряд* $\sum a_n$ *сходится, если* $\mathcal{R}_n \leqslant 1$ *при всех достаточно больших* n*, то ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Этот признак похож на признак Гаусса, но чуть слабее.

Признак Гаусса. *Пусть* $a_n > 0$ *и пусть при некоторых* $\varepsilon, \mu, \lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}).$$

Тогда при $\lambda > 1$ *ряд сходится, при* $\lambda < 1$ *— расходится, при* $\lambda = 1$ *и* $\mu > 1$ *ряд сходится, при* $\lambda = 1$ *и* $\mu \leqslant 1$ *— расходится.*

Признак Раабе в предельной форме. *Пусть существует* $\lim \mathcal{R}_n = \rho$*. Если* $\rho > 1$*, то ряд сходится, если* $\rho < 1$ *— ряд расходится.*

Доказательство признака Раабе.

1. Пусть $\mathcal{R}_n \geqslant r > 1$. Тогда $n\Big(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) > r \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \dfrac{r}{n}$. Выберем $s \in (1, r)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+n^{-1})^s - 1}{n^{-1}} = s$, то при достаточно больших n будет

$$\frac{(1+n^{-1})^s - 1}{n^{-1}} < r \qquad \text{или} \qquad \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^s < 1 + \frac{r}{n}.$$

Поэтому $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^s$, то есть $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^s = \dfrac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}}$.

Ряд $\sum n^{-s}$ сходится, значит по теореме сравнения сходится и ряд $\sum a_n$. □

2. Пусть $\mathcal{R}_n \leqslant 1$ при достаточно больших n. Тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^{-1}}{n^{-1}}$, гармонический ряд расходится, по признаку сравнения ряд $\sum a_n$ тоже расходится. □

[2]Раабе, Йозеф Людвиг, 1801–1859, родился в г. Броды недалеко от Львова, немец, швейцарец

[3]Карл Фридрих Гаусс, 1777–1855. Король математиков. Комплексные числа, основная теорема алгебры. В 1820 году Гаусс производит геодезическую съёмку Ганновера. В 1921 году создаёт гауссову кривизну, дифгеометрию, теорию поверхностей. В 1833 году Гаусс изобретает электромагнитный телеграф и (вместе с Вебером) строит действующую модель, в 1839 году начато коммерческое использование. Электромеханический телеграф запатентован в США в 1940 году Морзе вместе с кодом. Были и ранние версии телеграфа: электростатический телеграф, 1774, электрохимический телеграф на пузырьках газа, 1809. В 1843 году передача изображения, в 1858 году — трансатлантический кабель.

Остаточный член ряда. Если ряд $\sum a_k$ сходится, то при каждом n сходится ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Положим $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, величина r_n называется остаточным членом ряда $\sum a_n$.

Вроде очевидно, что если ряд $\sum a_k$ сходится, то $r_n \to 0$. В самом деле, зафиксируем n, введём при каждом натуральном m обозначение $R_{n,m} = r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k$; это частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Теперь $r_n = \lim_{m\to\infty} R_{n,m}$ и $S_{n+m} = S_n + R_{n,m}$, поэтому $S = S_n + r_n$ и $r_n \to 0$.

Если ряд $\sum a_k$ расходится, то величины r_n не определены.

О несуществовании предельной критической функции

Напомнить про сходимость-расходимость рядов $\sum 1/(n \ln n \ln \ln n)$. То есть «зазор» между асимптотиками сходящихся и расходящихся рядов можно сделать маленьким. Вопрос: может быть можно написать критическую функцию f, которая будет разделять сходящиеся ряды $f(n)$ и расходящиеся? Ответ на этот вопрос: нет такой функции.

Пусть есть ряд $\sum a_n,\ a_n > 0,\ a_n \to 0$.

Если он расходится, то $\exists b_n:\ b_n > 0,\ b_n \to 0$, причем ряд $\sum a_n b_n$ также расходится.

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\exists b_n \to +\infty$, причем ряд $\sum a_n b_n$ также сходится.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и положим

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}}, \qquad n > 1.$$

Очевидно, $b_n \to 0$ и

$$\sum_{n=2}^{k} a_n b_n = \sum_{n=2}^{k} \frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} = \sum_{n=2}^{k} (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_1} \to \infty.$$

Для доказательства второго утверждения рассмотрим остатки

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \to 0.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Полагаем $b_n = 1$ для тех n, для которых $\varepsilon < r_n$. Потом полагаем $b_n = 2$ для тех n, для которых $\varepsilon \geqslant r_n < \varepsilon/2$. Потом полагаем $b_n = 3$ для тех n, для которых $\varepsilon/2 \geqslant r_n < \varepsilon/4$. И так далее.

Тогда все частичные суммы ряда $\sum a_n b_n$ не превышают $S + \varepsilon + \varepsilon/2 + \ldots = S + 2\varepsilon$. $\square$

Кто заметил, где я немножко сжульничал, тот молодец.

Признак Ермакова (1870). *Пусть функция $f > 0$ невозрастающая. Положим*

$$E(x) = \frac{e^x f(e^x)}{f(x)}.$$

Если при достаточно больших x справедливо $E(x) \leqslant \lambda < 1$, то ряд $\sum f(n)$ сходится. Если при достаточно больших x справедливо $E(x) \geqslant 1$, то ряд $\sum f(n)$ расходится.

Применить к f типа $1/(x \ln x)$ и сказать, что для этого признака зазор минимальный.

Вопрос: придумать функцию, для которой $E(x) \approx cont$.

Интегральный признак сходимости ряда.

Рассмотрим ряд $\sum f(n)$, пусть функция f непрерывная, положительная, монотонная и стремится к нулю на бесконечности. Предположим ещё, что нам известна её антипроизводная («первообразная» = «неопределенный интеграл»): функция F, производная которой равна f: $F' = f$.

Так как производная функции F положительная, то F монотонно возрастает и у неё есть предел на бесконечности, либо конечный, либо бесконечный.

Теорема. *Если $F(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то ряд $\sum f(n)$ расходится, если $F(x) \to K < \infty$, то ряд $\sum f(n)$ сходится.*

Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$, то говорят, что сходится *несобственный интеграл*

$$J = \int_1^\infty f(t)\,dt.$$

Перефразировка. *Ряд $\sum f(n)$ сходится и расходится одновременно с несобственным интегралом J.*

Очевидно, монотонность f существенна, ряд $\sum \sin^2(\pi n)$ сходится, соответствующий интеграл расходится.

Для доказательства рассмотрим сумму $\sum_{k=1}^n \big(F(k+1) - F(k)\big) = F(n+1) - F(1)$. Эта же сумма может быть в силу теоремы Лагранжа переписана в виде $\sum_{k=1}^n \big(F(k+1) - F(k)\big) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)$. Отсюда и из монотонности все следует:

$$f(k+1) \leqslant f(\xi_k) \leqslant f(k) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F(x) \to \infty & \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{k=1}^\infty f(k) = \infty; \\ F(x) \to K < \infty & \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{k=1}^\infty f(k) < \infty. \end{cases}$$

$\square$

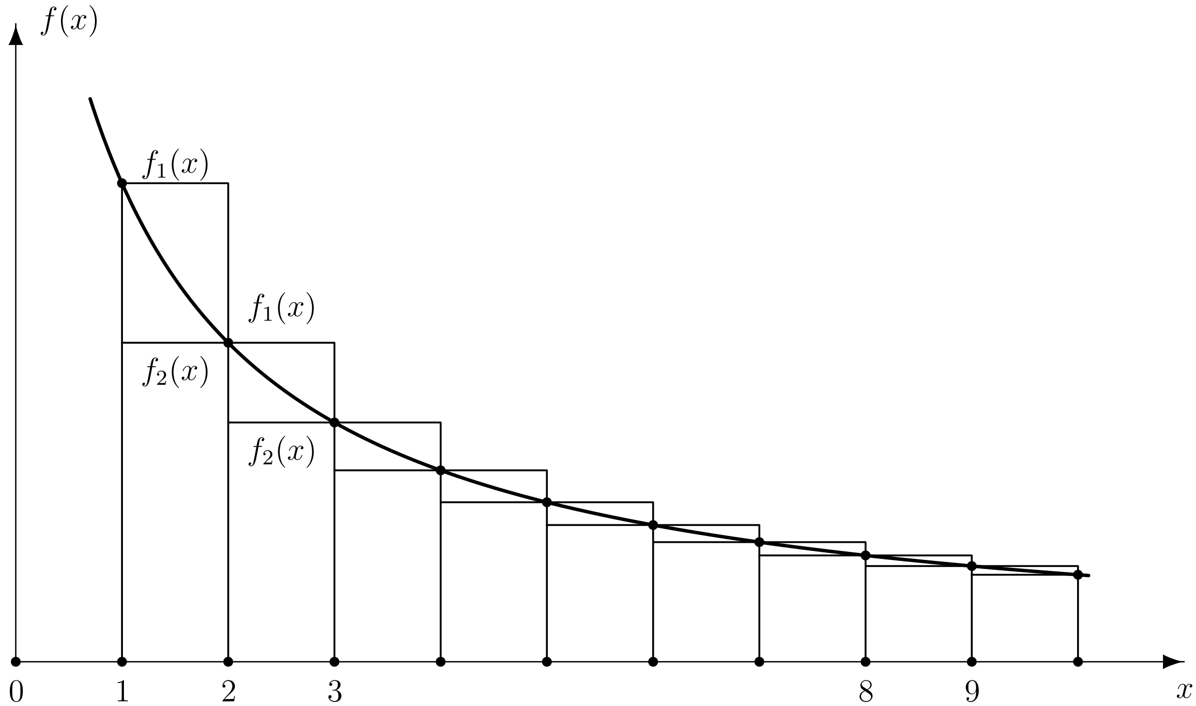


Рис. 1

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum \frac{1}{n \ln n}$. Воспользуемся равенством $(\ln \ln x)' = \frac{1}{x \ln x}$. Так как $F(x) = \ln \ln x \to \infty$, то ряд $\sum \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$. Так как $F(x) = 10 - \frac{1}{\ln x} \to 10$, то этот ряд сходится.

Теперь мы переформулируем примерно этот же признак геометрически. Еще раз, пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant 1$, непрерывна, положительна и не убывает к 0. Рассмотрим ряд $\sum f(n)$. Обозначим через $S(x)$ площадь под графиком функции f: $S(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. Тогда при $n > 1$ справедливы оценки

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant S(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Поэтому, если мы умеем посчитать $S(n)$ и знаем что при $n \to \infty$ $S(n) \to S < \infty$, то ряд сходится. А если при $n \to \infty$ верно $S(n) \to \infty$, то ряд расходится.

Построим график функции $f(x)$ — см. Рис. 1. Из точек этого графика, соответствующих абсциссам 1, 2, 3, 4, ... проведем горизонтальные линии длиной 1. Площадь $S(f)$ части плоскости, расположенной между графиком функции $f(x)$ и осью абсцисс меньше площади S_1 части плоскости, расположенной между графиком ступенчатой функции $f_1(x)$, принимающей значения $f(1)$ при $1 \leqslant x < 2$, $f(2)$ при $2 \leqslant x < 3$ и так далее, и осью абсцисс. График этой ступенчатой функции на рисунке изображен тонкой линией. Площадь $S(f)$ больше площади S_2 части плоскости, расположенной между графиком ступенчатой функции $f_2(x)$, принимающей значения $f(2)$ при $1 \leqslant x < 2$, $f(3)$ при $2 \leqslant x < 3$ и так далее.

Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ при положительных σ. К исследованию сходимости этого ряда не применимы признаки Даламбера и Коши — соответствующие пределы существуют, но $L = 1$. Интегральный признак сходимости даёт ответ, при каких значениях $\sigma > 0$ этот ряд сходится или расходится. Этот ряд порожден функцией $f(x) = x^{-\sigma}$. Эта функция при $x \geq 1$ убывает и положительна,

$$S(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x^{-\sigma+1}}{-\sigma+1} - 1, & a \neq 1; \\ \ln x, & \sigma = 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $\sigma > 1$ ряд сходится, при $\sigma \leqslant 1$ этот ряд расходится.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится: $\int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = \ln\ln n - \ln\ln 2 \to \infty$.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится: $\int_2^n \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^n < \infty$.

Пример 4. Эта же конструкция позволяет дать геометрическую интерпретацию константы Эйлера[4] γ. Напоминаю формулу: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. На картинке видно, что площадь под графиком верхней ступенчатой функции — это $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, а площадь под гиперболой — это $\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x}$. Таким образом, по картинке видно, что постоянная Эйлера — это сумма площадей криволинейных треугольников, расположенных поверх гиперболы.

3 Перестановки членов ряда и условно сходящиеся ряды

В абсолютно сходящемся ряде от перестановки членов сумма не меняется

Пусть $k \mapsto n_k$ — биекция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Перестановкой ряда $\sum\limits_{k}^{\infty} a_k$ называется ряд $\sum\limits_{k}^{\infty} a_{n_k}$.

Основной вопрос: *для каких сходящихся рядов все перестановки сходятся причём к той же сумме.* Подчеркнем, что члены ряда-перестановки не меняются, не добавляются, не вычеркиваются, а только переставляются с места на место. Подчеркнем, что исходный ряд является перестановкой перестановки.

[4]Леонард Эйлер, 1707–1783. Автор 850 первоклассных работ, 20 монографий. 14 лет в Санкт-Петербурге. Видимо, один из величайших математиков в истории.

Иными (не совсем правильными) словами: когда есть коммутативность бесконечного количества слагаемых?

Пример, когда сумма ряда меняется:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\ldots=0,$$

Такой ряд условно сходится, его сумма равна нулю. Переставим его:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\ldots$$

Частичные суммы совпадают с частичными суммами ряда Лейбница

$$\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots=\ln 2.$$

Рассказать, как переставить так, чтобы получился расходящийся ряд.

Теорема. *Пусть при перестановке ряда новый номер члена ряда отстоит от старого не более чем на $K \in \mathbb{N}$. Тогда переставленный ряд сходится и к той же сумме.*

Теорема вытекает из критерия Коши: рассмотрим дальний кусок ряда и дальний кусок переставленного ряда. Они мало отличаются. $\square$

Из этой теоремы следует, «немножко» переставлять слагаемые можно в любом ряду. Например, взять и поменять местами соседние члены...

Теорема (Коши). *В абсолютно сходящемся ряде от перестановки слагаемых сумма не меняется: каждая перестановка абсолютно сходящегося ряда сходится к сумме исходного ряда.*

Доказательство. Сначала пусть ряд $\sum a_k$ состоит из положительных членов, пусть $S = \sum a_k$. Тогда все частичные суммы ряда $\sum a_{n_k}$ не превышают S, по доказанной когда-то лемме (положительный ряд сходится, если и только если его частичные суммы ограничены) ряд $\sum a_{n_k}$ сходится и $S' \leqslant S$.

Итак, от перестановки сумма ряда не возрастает. Но ряд $\sum a_k$ — это перестановка ряда $\sum a_{n_k}$, значит $S \leqslant S' \;\Rightarrow\; S = S'$.

Теперь пусть ряд a_k абсолютно сходится. Введем обозначения a_k^+, a_k^-:

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k > 0, \\ 0, & a_k \leqslant 0; \end{cases} \qquad a_k^- = \begin{cases} -a_k, & a_k < 0, \\ 0, & a_k \geqslant 0. \end{cases}$$

Теперь $a_k = a_k^+ - a_k^-$ и $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$, ряды $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ сходятся (по теоремам сравнения), если $S^+ = \sum a_k^+$, $S^- = \sum a_k^-$, то $\sum a_k = S^+ - S^-$. Теперь ряды $\sum a_{n_k}^+$, $\sum a_{n_k}^-$ сходятся к тем же суммам, $\sum a_{n_k} = S^+ - S^-$. $\square$

Лекция 3 (22 января 2016)

На прошлой лекции, 2 дня назад, мы занимались следующими вещами.

1) Сформулировали несколько простых и хитрых признаков сходимости рядов (Коши, Раабе);

2) Обсудили вопрос о несуществовании критической функции;

3) Для ряда $\sum f(n)$ с монотонной непрерывной функцией f сформулирован интегральный признак сходимости ряда;

4) Изучили вопрос о перестановках абсолютно сходящегося ряда.

Определение. Напомнить: ряд называется условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Теорема. *Если заменить в условно сходящемся ряде все отрицательные (или положительные) слагаемые на 0, то получится расходящийся знакоопределённый ряд.*

Доказательство теоремы для составляющей $\sum a_n^+$ условно сходящегося ряда. Пусть дан ряд $\sum a_n^+$, если этот ряд сходится, то ряд $\sum a_n^- = -\sum a_n + \sum a_n^+$ также сходится, поэтому ряд $\sum |a_n| = \sum a_n^- + \sum a_n^+$ сходится, это противоречит условной сходимости $\sum a_n$. $\square$

Условная сходимость означает расходимость компонент $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ и удачную компенсацию компонентами друг друга.

Теорема (Риман[5]). *В результате перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с произвольной суммой:* $\forall Q \in \mathbb{R}\ \exists n_k : \quad$ *справедливо* $\ \sum a_{n_k} a_k = Q$.

Кроме того, можно переставить слагаемые так, чтобы последовательность частичных сумм сходилась к $+\infty$, к $-\infty$. Непростые задачи:

1. Если ряд из комплексных чисел условно сходится, то как описать множество возможных пределов переставленных рядов?

2. Пусть есть условно сходящийся вещественный ряд. Можно ли переставить его так, чтобы последовательность частичных сумм имела ровно 2 предельные точки? Ответ: не верно. Множество предельных точек частичных сумм переставленного условно сходящегося ряда — всегда замкнутый промежуток.

Перестановки условно сходящегося ряда можно представлять себе так. Есть 2 мешка с числами, в одном отрицательные, в другом — положительные. Не 2 подмножества $\mathbb{R}$ (в мешке может лежать много одинаковых чисел), не 2 последовательности (в мешке числа никак не упорядочены нумерацией). Пусть, однако в каждом мешке лежит счётное количество чисел

[5] Георг Фридрих Бернхард Риман, 1826–1866. Всего 10 трудов. Функция Римана, интеграл Римана, риманова поверхность, гипотеза Римана, тензор кривизны, теория конформных отображений, основоположник газовой динамики, ударные волны

и пусть для любого $\varepsilon > 0$ чисел, по модулю больших ε лишь конечное число. Пусть ещё из каждого мешка можно извлечь конечное количество чисел с суммой по модулю сколь угодно большой.

Утверждение теоремы Римана означает, что можно пронумеровать все числа из мешков так, чтобы ряд из них сходился, причём сумма может быть произвольная.

Если сложить члены условно сходящегося ряда по мешкам, то как раз так и получится.

Доказательство. Рассмотрим произвольный условно сходящийся ряд $\sum a_n$. Выберем положительные слагаемые в одну группу, обозначим ее b_n, отрицательные в другую: c_n. Как уже отмечалось выше, ряды $\sum b_n$ и $\sum c_n$ расходятся, однако b_n и c_n — бесконечно малые. Будем считать, что обе последовательности упорядочены, b_n — не убывает, c_n — не возрастает. Это возможно в силу их бесконечной малости.

Будем считать, что нулевых слагаемых в ряду $\sum a_n$ нет. Если есть и их конечное число, то их можно выбрать сначала, а если есть, то мы их поставим на чётные позиции, а на нечётные будем ставить оставшиеся, не нулевые.

Зафиксируем некоторое произвольное число Q и построим из всех членов обоих этих рядов новый сходящийся ряд, сумма которого равна Q, без ограничения общности считаем $Q > 0$.

Мы будем строить этот ряд следующим образом. Мы будем брать по очереди из последовательностей b_n и c_n по некоторому количеству членов. При этом мы будем каждый раз (может быть, кроме первого) брать хотя бы по одному элементу, не пропуская ни одного элемента ни в одной из последовательностей. При этом параллельно будем вычислять очередную частичную сумму при добавлении каждого очередного элемента в новый ряд. Естественно, частичная сумма будет возрастать при выборе элементов последовательности b_n и убывать при выборе элементов последовательности c_n.

Выберем первый элемент b_1 и назначим его первым элементом переставленного ряда. Частичная сумма переставленного ряда равна $S_1 = b_1$.

Далее, берем последовательно элементы из последовательности b_n до тех пор, пока переменная частичная сумма не превысит Q. Это может произойти после первого шага, если $b_1 > Q$, или позднее, но это обязательно произойдет, так как ряд $\sum b_n$ расходится и начиная с некоторого момента его частичные суммы превысят Q. Как только накопленная частичная сумма станет больше Q (это может произойти сразу после первого шага, если $b_1 > Q$), переключаемся на ряд c_n из отрицательных чисел и начинаем черпать новые элементы из него. Накопленная частичная сумма при этом будет убывать. Как только накопленная частичная сумма станет меньше Q, переключимся назад на b_n.

При таком построении новая последовательность будет переставленной первоначальной: каждый элемент исходной последовательности войдет в новую и ровно один раз.

Новый ряд сходится и его сумма равна Q. Это следует из необходимого условия сходимости ряда: так как $a_n \to 0$, то и $b_n \to 0$, и $c_n \to 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ и $|b_n| < \varepsilon$, и $|c_n| < \varepsilon$. Как только мы сделаем $2N$ переключений при формировании переставленного ряда, так для частичных сумм s_n переставленного ряда будет справедливо неравенство $|s_n - Q| < \varepsilon$. Из этой оценки следует утверждение теоремы. Для доказательства последней оценки надо лишь вспомнить способ выбора переставленного ряда: перед переключением с ряда b_n частичная сумма s_n была меньше Q, потом мы добавили один-единственный элемент, меньший чем ε, и частичная сумма стала больше Q. Но стать больше чем $Q + \varepsilon$ она не может! А на следующем шаге мы уже будем добавлять отрицательные члены из последовательности c_n. Аналогично, частичная сумма не может стать меньше $Q - \varepsilon$. Итак, $s_n < Q + \varepsilon$, $s_n > Q - \varepsilon$, поэтому $|s_n - Q| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. □

Признак Лейбница[6]**.** Ряд называется **знакочередующимся**, если все чётные члены имеют один знак, а нечётные — другой. Иными словами, знакочередующийся ряд имеет либо вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n p_n, \quad \text{либо} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} p_n \quad (p_n \geq 0).$$

Эти ряды отличаются знаком первого члена.

Теорема. *Если модули членов знакочередующегося ряда образуют монотонно убывающую бесконечно малую последовательность, то ряд сходится.*

Доказательство проведем для знакочередующегося ряда $\sum a_n$ с положительным a_1. Обозначим, как обычно, через S_n частичные суммы. Так как $S_1 = a_1$, $S_3 = S_1 - (a_2 - a_3) < S_1 \ldots S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < S_{2n-1}$, то последовательность частичных сумм с нечетными номерами убывает. Так как $S_2 = a_1 - a_2$, $S_4 = S_2 + (a_3 - a_4) > S_2 \ldots S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n}) > S_{2n}$, то последовательность частичных сумм с четными номерами возрастает.

Кроме того,

$$S_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} > 0,$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм с четными номерами и последовательность частичных сумм с нечетными номерами — это монотонные ограниченные последовательности. Значит, эти последовательности сходятся. А так как $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$, то пределы этих последовательностей совпадают. Значит сходится и сама последовательность частичных сумм, что и требовалось доказать. □

[6]Лейбниц, Готфрид Вильгельм, 1646–1716, создал комбинаторику, основы анализа с Ньютоном, логику, двоичную систему счисления, философ, психолог, механик, принцип наименьшего действия.

Пример. Ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$ сходится по признаку Лейбница. Так как ряд из модулей совпадает с гармоническим рядом и, поэтому, расходится, то ряд Лейбница абсолютно не сходится, это условно сходящийся ряд.

Сумма ряда Лейбница равна $\ln 2$. Это следует из формулы

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \gamma+\ln(n)+o(1), \qquad \text{где} \qquad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \approx 0,57721 \quad \text{— постоянная Эйлера:}$$

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \gamma+\ln(2n)-\gamma-\ln n+o(1) \to \ln 2.$$

Постоянная γ Эйлера введена в 1735, Маскероне в 1790 вычислил 32 знака, до сих пор не известно, рационально или нет, куча красивых формул в Википедии. Для доказательства сходимости используем неравенство $\ln(1+x) < x,\ x > -1$ (картинку нарисовать!):

$$0 < \frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Признаки Абеля[7] **и Дирихле**[8]**.** Вначале сформулируем одно равенство, которое называют **тождеством Абеля**. Пусть a_n и b_n — произвольные числа, $S_n = C+\sum\limits_{k=1}^{n}a_n$ число C — некоторая постоянная. Тогда для любой константы C справедливо равенство

$$\sum_{k=n}^{n+p}a_kb_k = \sum_{k=n}^{n+p-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_{n+p}b_{n+p}-S_{n-1}b_n.$$

Тождество Абеля базируется на тождестве $a_k = S_k - S_{k-1}$, выполненном при любом C, и вытекает из цепочки соотношений:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+p}a_kb_k &= \sum_{k=n}^{n+p}S_kb_k - \sum_{k=n}^{n+p}S_{k-1}b_k = \sum_{k=n}^{n+p}S_kb_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1}S_kb_{k+1} = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1}S_kb_k + S_{n+p}b_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1}S_kb_{k+1} - S_{n-1}b_n = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1}S_k(b_k-b_{k+1}) + S_{n+p}b_{n+p} - S_{n-1}b_n. \qquad \square\end{aligned}$$

[7]Нильс Хенрик Абель, 1802-1829, слабое здоровье, безудержное пьянство родителей. Его учитель математики: «С превосходнейшим гением он сочетает ненасытный интерес и тяготение к математике, поэтому, если он будет жить, он, вероятно, станет великим математиком». Умер от туберкулёза.

[8]Лежен Дирихле, 1805-1859, принцип Дирихле, арифметическая прогрессия содержит бесконечно много простых чисел.

Смысл тождества Абеля. Тождество Абеля — это дискретная формула интегрирования по частям. Если считать, что сумма — это интеграл, а разности соседних слагаемых — это некоторый аналог производных, то формула Абеля, переписанная в виде

$$\sum_{k=n}^{n+p}(S_k - S_{k-1})b_k = S_{n+p}b_{n+p} - S_{n-1}b_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(b_{k+1} - b_k),$$

имеет вид формулы Ньютона–Лейбница $\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx$. Добавлю ещё, что константа C играет роль константы в формуле для первообразных.

Теорема (признак Дирихле). *Если последовательность $b_n > 0$ является монотонно убывающей и бесконечно малой, а частичные суммы S_n ряда $\sum a_n$ ограничены, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.*

Теорема (признак Абеля). *Если последовательность $b_n > 0$ является монотонно убывающей и ограниченной, а ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.*

Доказательство признаков Абеля и Дирихле основано на тождестве Абеля. В условиях признаков Абеля и Дирихле не предполагается, что a_n положительные. Эти признаки придуманы именно для исследования знакопеременных рядов.

Доказательство признака Дирихле. Рассмотрим сумму $B(n,p) = \sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k b_k$. По критерию Коши мы докажем сходимость ряда $\sum a_n b_n$, если докажем, что при достаточно больших n и любом p величина $|B(n,p)|$ сколь угодно мала. Воспользуемся тождеством Абеля ($C = 0$):

$$\begin{aligned}
|B(n,p)| &\leqslant \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(b_k - b_{k+1})\right| + |S_{n+p}b_{n+p}| + |S_{n-1}b_n| \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |S_k|(b_k - b_{k+1}) + |S_{n+p}b_{n+p}| + |S_{n-1}b_n| \\
&\leqslant \sup_k |S_k| \sum_{k=n}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) + |S_{n+p}b_{n+p}| + |S_{n-1}b_n| \\
&= \sup_k |S_k|\,(b_n - b_{n+p-1}) + |S_{n+p}b_{n+p}| + |S_{n-1}b_n|.
\end{aligned}$$

В последней оценке все S_k ограничены по предположению, а последовательность b_n бесконечно малая. Поэтому $|B(n,p)|$ ограничена сверху бесконечно малой, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство признака Абеля. Рассмотрим величины $B(n,p)$, положим $C = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$, тогда $S_{n-1}=0,\ S_{n+m}=\sum_{k=n}^{n+m}a_k$ при всех $m=\mathbb{Z}^+$. Из тождества Абеля имеем

$$|B(n,p)|\leqslant\left|\sum_{k=n}^{n+p-1}S_k(b_k-b_{k+1})\right|+|S_{n+p}b_{n+p}|\leqslant\sup_{k>n}|S_k|\,(b_n-b_{n+p-1})+|S_{n+p}b_{n+p}|.$$

Величины $|S_{n+m}|$ при всех $m=0,1,2,\dots$ и $\sup_{k>n}|S_k|$ при достаточно больших n равномерно меньше ε (по критерию Коши для ряда a_k), отсюда следует утверждение принципа Абеля. □

Вообще-то, признак Абеля следует из признака Дирихле.

Последовательность b_n монотонная, значит она стремится к пределу. Пусть $b_n\to B$, тогда $b_k-b_{k+1}\to 0$. Тогда последовательность $b_n^*=B-b_n$ монотонно убывает к нулю, по признаку Дирихле ряд $\sum a_n(B-b_n)$ сходится. Ряд $\sum a_nB$ сходится, значит ряд $\sum a_nb_n$ сходится. □

Пример. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ при фиксированном $x\in\mathbb{R}$ (с помощью признака Дирихле).

Положим $a_n=\cos nx$, $b_n=1/n$. Последовательность b_n удовлетворяет условиям теоремы, проверим ограниченность частичных сумм $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos nx$. Для всех k справедливо соотношение

$$\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x=2\sin\frac{x}{2}\,\cos kx,$$

просуммируем эти соотношения при $k=1,2,\dots,n$. В левой части сократятся все слагаемые, кроме двух, и мы получим равенство

$$\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{1}{2}x=2S_n\sin\frac{x}{2}.\quad\text{Поэтому}\quad|S_n|=\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

Таким образом, при $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, то есть $x\neq 2m\pi$ при целом m, частичные суммы S_n ограничены и в силу признака Дирихле ряд сходится. Если $x=2m\pi$, то $\cos kx=1$ при всех k и ряд превращается в гармонический ряд, который расходится.

Произведение рядов

Написать табличку, дать определение произведения рядов. Последовательность обхода — способ умножения рядов.

Сказать, что если мы знаем только сходимость ряда, составленного из элементов таблички, то результат зависит от последовательности обхода таблички по теореме Римана.

Разные методы суммирования произведения рядов естественные в разных ситуациях. Например, по прямоугольникам естественно суммировать — это произведение частичных сумм. По треугольникам естественно суммировать — такое суммирование возникает в степенных рядах.

По диагоналям — способ Коши. **Теорема Мертенса**[9]**:** если ряд сходится, а второй — абсолютно сходится, то произведение Коши сходится и равно произведению рядов.

Теорема. *Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всех произведений $a_n b_k$, также абсолютно сходится. Сумма полученного ряда равна произведению сумм исходных рядов.*

В условиях теоремы все равно, в какой последовательности брать слагаемые в таблице. Иными словами: *абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать.*

Умножение условно сходящихся рядов не определено.

Доказательство. Выберем удобный для рассуждений порядок «по квадратам», в котором мы будем записывать члены ряда $\sum w_n$, составленного из всех произведений $\sum a_n b_k$:

$$w_1 = a_1 b_1, \qquad w_2 = a_1 b_2,\ w_3 = a_2 b_1,\ w_4 = a_2 b_2,$$

$$w_5 = a_1 b_3,\ w_6 = a_2 b_3,\ w_7 = a_3 b_3,\ w_8 = a_3 b_2,\ w_9 = a_3 b_1,\ \ \ldots$$

Покажем сначала, что ряд $\sum w_n$ абсолютно сходится. Ограниченность частичных сумм ряда $\sum |w_n|$ вытекает из соотношений

$$\sum_{k=1}^{n^2} |w_k| = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right) \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right).$$

Две последних бесконечных суммы принимают конечные значения по предположению. Из доказанной ограниченности частичных сумм следует сходимость ряда $\sum |w_n|$ и, следовательно, абсолютная сходимость ряда $\sum w_n$.

Остается доказать, что последний ряд имеет сумму, равную произведению сумм исходных рядов. Для этого достаточно отметить, что

$$\sum_{k=1}^{n^2} w_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_n\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_n\right)$$

и устремить n к бесконечности. □

[9] Франц Мертенс, 1840–1927. Ученик Кронеккера и Куммера. Придумал пару знаменитых теорем, в частности про задачу 12 из вашего листка. Найти его в Википедии трудно, есть несколько футболистов с такой фамилией!

Лекция 4 (27 января 2016)

На прошлой лекции, в пятницу, мы занимались следующими вещами.

1) Теорему Римана о перестановках условно сходящегося ряда;

2) Произведение рядов;

3) Теорему Лейбница о знакочередующихся рядах;

4) Теоремы Абеля и Дирихле, тождество Абеля

и временно завершили на этом числовые ряды.

4 Функциональные ряды

Ряды, как и последовательности, можно рассматривать не только из чисел, но и из любых линейных метрических пространств. Линейность нужна, чтобы суммы имели смысл.

Линейное метрическое пространство — множество, в которых определены операции сложения и умножения на число и определено расстояние (= метрика). Метрика в линейных пространствах обычно предполагается положительно однородной:

$$\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, \rho(x, y).$$

Вообще, в линейных (векторных) пространствах чаще вместо слова *метрика* используют слово *норма*. Норма вектора x обозначается $\|x\|$ или $\|x\|_M$, это неотрицательная функция переменной x, предполагается, что $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ и $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. Это в точности такие требования, чтобы функция $\|x - y\|$ двух переменных была метрикой, причём положительно однородной метрикой.

Ну и наоборот, если есть положительно однородная метрика ρ, то она порождает норму $\|x\| = \rho(0, x)$.

Я считаю, что линейность у нас относительно вещественных чисел. Практически то же самое будет для комплексных линейных пространств.

Примеры. Вещественные числа, рациональные числа (линейное пространство над полем рациональных чисел). Норма — это модуль. Комплексные числа — норма это тоже модуль. Конечномерное пространство, здесь норма (длина вектора) по-разному может определяться, например, евклидова норма. Или сумма модулей координат. Или вообще любым центрально симметрическим выпуклым телом Минковского[10], рассказать про это. Пространства функций:

[10]Минковский, Герман, 1864–1909. Это уже близкая к нам математика, XX век. Неравенство Минковского. Пространство Минковского в специальной теории относительности. Геометрическая теория чисел. Теорема: если в $\mathbb{R}^3$ объём тела Минковского $\geqslant 8$, то оно содержит ненулевую точку с целыми координатами.

$C[a,b]$, $M(G)$ — пространство ограниченных функций на G, в предыдущем семестре оно обозначалось буквой $\mathcal{F}$. Вот этими пространствами, они называются функциональными пространствам, будем заниматься в ближайшее время.

Напомню, что пространство $M(G)$ ограниченных функций $G \to \mathbb{R}$ содержит все ограниченные функции, метрика в нём задаётся равенством $\rho(f,g) = \sup_{x\in G} |f(x) - g(x)|$. Так как $M(G)$ — это всегда линейное пространство (ограниченные функции можно складывать и умножать на константы), то можно вместо слова *метрика* говорить слово *норма*: $\|x\|_{M(G)} = \rho(0,x) = \sup_{x\in G} |f(x)|$. Например, про пространство C непрерывных функций чаще (Google: 238,000 против 49,500) говорят именно слово норма.

Рассмотрим теперь ряд, составленный из функций: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Мы будем считать, что функции f_n определены на некотором общем для всех функций f_n множестве G, а значения принимают в $\mathbb{R}$. Практически всё (где явно не используется монотонность) можно перенести на рядах из функций со значениями в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^n$. В некоторых теоремах важно, что функции определены на компактном множестве, там про это будет специальная оговорка.

Вот такой ряд из функций можно рассматривать как ряд из элементов какого-то функционального пространства.

Ряд, составленный из функций можно трактовать различными способами.

При каждом фиксированном $x \in G$ это будет числовой ряд. Если этот числовой ряд сходится при каждом x, то мы будем говорить, что ряд *сходится поточечно* к функции f^*:

$$\forall x \in G \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon, x) \ \ \forall k > N: \quad \text{справедливо} \ \ |f^*(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)| < \varepsilon.$$

Подчеркнём, что число N, вообще говоря, зависит от x.

Если ряд в $\mathbb{R}^n$, то есть функции заданы на множестве G из n элементов, то поточечная сходимость — это покоординатная сходимость.

Мы будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно* на множестве G, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall k > N, \ \ \forall x \in G: \quad \text{справедливо} \ \ |f^*(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)| < \varepsilon.$$

Здесь число N обязательно не зависит от x.

Равномерная сходимость на $\boldsymbol{G}$ — сходимость по метрике пространства $M(G)$.

Ещё раз. Поточечная сходимость — это просто сходимость многих числовых рядов. А сходимость по норме функционального пространства — это отдельное дело. Кроме сходимости по норме $M(G)$ рассматривают сходимость по нормам других пространств. Например, нормы с интегралами Лебега, пространства L^2. Бывают и другие виды сходимости, через год узнаете.

Ещё для некоторых множеств G можно рассмотреть множество ограниченных непрерывных функций $C(G)$. Обычно при этом множество G — это компакт в метрическом пространстве (главный пример: $G = [a, b]$), равномерная сходимость — это сходимость по метрике C. В определении нормы в C можно писать max вместо sup: $\|x(t)\|_C = \max_{x \in G} |x(t)|$. Разница в том, что для $f \in C$ на компакте *супремум* всегда достигается, то есть является *максимумом.*

Правильно говорить, на каком множестве ряд или последовательность равномерно сходятся. Иногда я буду про это забывать, когда это очевидно... например, указано только что чуть выше, где́ определены функции. Я считаю, что есть некоторое множество G и все функции на этом множестве G определены.

Множество G может быть $\mathbb{N}$, тогда $M(G)$ — пространство ограниченных последовательностей. Множество G может быть конечным, тогда $M(G)$ — конечномерное пространство с нормой $\|x\| = \max\{|x_k|\}$. Но вообще, слушая сейчас лекцию, лучше представлять себе G в виде отрезка.

Полнота $\boldsymbol{M(G)}$. Напомнить про фундаментальные последовательности в $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall m, n > N \ \text{ справедливо } \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Фундаментальная последовательность в метрическом пространстве с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall m, n > N \ \text{ справедливо } \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Сходящаяся последовательность всегда фундаментальна, в любом пространстве, а вот наоборот — не всегда: не во всяком метрическом пространстве всякая фундаментальная последовательность сходится.

Основная картинка: выколотая точка.

Определение *Метрическое пространство X называется полным, если в нём всякая фундаментальная последовательность сходится.*

Примеры полных пространств ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, C(G), c_0$ — пространство сходящихся последовательностей с нормой sup). Примеры неполных пространств: рациональные числа, (многочлены в $C[0, 1]$, пространство непрерывных функций с метрикой из L_1. Любое незамкнутое подмножество полного пространства.

Замечание 1. Пополнение пространств — сказать, что есть общая конструкция.

Замечание 2. Есть эквивалентное определение полноты пространства X. Я его сформулирую без доказательств, они простые.

Для каждого подмножества $Y \subset X$ определим его диаметр: $\operatorname{diam} Y = \sup_{x,y \in Y} \rho(x,y)$.

Пространство полное, если и только если любая последовательность вложенных замкнутых множеств с убывающим к нулю диаметром имеет единственную общую точку.

Интересно, что если не требовать стремление диаметра к нулю, то последовательность вложенных замкнутых подмножеств полного пространства может иметь пустое пересечение.

Теорема. *Пространство $M(G)$ полное.*

Доказательство. Пусть $f_n \in M(G)$ — фундаментальная последовательность в $M(G)$. Тогда при каждом $x \in G$ числовая последовательность $f_n(x)$ фундаментальна, это следует из определений и полноты пространства $\mathbb{R}$, куда действуют функции.

Поэтому последовательность при каждом $x \in G$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторому числу $f^*(x)$, поточечному пределу последовательности f_n.

Функция f^* — ограниченная, следует из равномерной фундаментальности, $\exists N\, \forall x \in G,\ m, n > N\ |f_n(x) - f_m(x)| < 1$. Если теперь перейти в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, то получится $\forall x \in G,\ |f_n(x) - f^*(x)| < 1$, отсюда следует ограниченность.

Теперь покажем, что сходимость на самом деле не поточечная, а по норме M. Берем $\varepsilon > 0$, выбираем N так, чтобы при $n, k > N$ было выполнено $\|f_n - f_k\|_M < \varepsilon/2$, следовательно при каждом x выполнено $|f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon/2$. Теперь при каждом x перейдем в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ при фиксированном n. Мы знаем, что числовая последовательность $f_k(x)$ сходится к $f^*(x)$. Следовательно, при каждом x справедливо неравенство $|f_n(x) - f^*(x)| \leqslant \varepsilon/2$ и $\|f_n(x) - f^*(x)\|_M \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ Итак, по каждому $\varepsilon > 0$ мы нашли такое N, что при $n > N$ справедливо $\|f_n - f^*\|_M < \varepsilon$, а это и есть определение сходимости f_n к f^* в M. $\square$

Замкнутое подмножество Y полного метрического пространства X — само полное метрическое пространство с той же метрикой. В самом деле, если $x_n \in Y$ — фундаментальная последовательность, то x_n фундаментальна в X, поэтому x_n сходится в X, в силу замкнутости $\lim x_n \in Y$.

Таким замкнутым подмножеством в $M(G)$ является подмножество $C(G)$ непрерывных ограниченных функций. Мы доказывали такую теорему в прошлом семестре.

Пусть G — любой множество с метрикой, на котором имеет смысл говорить о непрерывности[11], f_n — последовательность непрерывных функций, $f_n \rightrightarrows f$. Тогда f — непрерывная функция.

Пусть $x_k \to x^*$, надо доказать, что $f(x_k) \to f(x^*)$. Зададимся $\varepsilon > 0$, выберем и зафиксируем по равномерной сходимости n, такое что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ при каждом $x \in G$. Теперь

$$|f(x_k) - f(x^*)| \leqslant |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f_n(x^*) - f(x^*)| + |f_n(x_k) - f_n(x^*)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

[11] То есть, в G есть предельные точки, что не обязательно!

Мы доказали, что равномерный предел функций, непрерывных в точке, непрерывен в этой точке. Соответственно, равномерный предел функций, непрерывных на каком-то множестве, непрерывен на этом множестве.

Обычно рассматривают пространство непрерывных функций на компакте. Если G — компакт, то можно слово «ограниченных» опустить: там все функции ограничены.

Итак, пространство $C[a,b]$ — это замкнутое подмножество $M([a,b])$.

Заметим, что $C[a,b]$ — очень маленькое множество в $M([a,b])$: у него нет внутренних точек, оно нигде не плотное. А каждая разрывная функция — внутренняя точка множества $M([a,b]) \setminus C[a,b]$. Здесь у нас возникает полная аналогия с канторовым множеством.

Пространство C — одно из самых главных пространств функций. Основной вариант: $C[a,b]$, оно главнее, чем M. Равномерной нормой обычно называют норму в C (хотя и в M). И $C[a,b]$, и $M[a,b]$ — банаховы пространства: полные линейные нормированные пространства.

Критерий Коши равномерной сходимости. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *из ограниченных функций равномерно сходится, если и только если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall k > N, \ m \in \mathbb{N} \ \forall x \in G: \quad \textit{справедливо} \ \Big| \sum_{n=k+1}^{k+m} f_n(x) \Big| < \varepsilon.$$

Критерий Коши означает фундаментальность последовательности частичных сумм в $M(G)$ и следует из полноты пространства $M(G)$. Основное условие можно переписать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall k > N, \ m \in \mathbb{N} \qquad \text{справедливо} \ \sup_{x \in G} \Big| \sum_{n=k+1}^{k+m} f_n(x) \Big| < \varepsilon \qquad \text{или в виде}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall k > N, \ m \in \mathbb{N} \qquad \text{справедливо} \ \Big\| \sum_{n=k+1}^{k+m} f_n(x) \Big\|_{M(G)} < \varepsilon \qquad \text{или в виде}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall k > N, \ m \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in G \qquad \text{справедливо} \ \Big| \sum_{n=k+1}^{k+m} f_n(x) \Big| < \varepsilon.$$

Ряд сходится **равномерно абсолютно**, если равномерно сходится ряд из модулей.

Признак Вейерштрасса.[12] *Пусть* $|f_n(x)| \leqslant a_n, \ x \in G$. *Пусть ряд* $\sum a_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum f_n(x)$ *равномерно абсолютно сходится.*

Доказательство следует немедленно из критерия Коши, использованного дважды. Первый раз для числового ряда $\sum a_n$ по ε строим N, второй раз — используем это N для критерия Коши равномерной сходимости. □

[12] Карл Вейерштрасс, 1815-1897, отец современного анализа.

Пример. Ряд $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ сходится абсолютно равномерно на $\mathbb{R}$. Очевидно!

Естественно, если ряд $\sum g_n$ абсолютно равномерно сходится, и $|f_n(x)| \leqslant |g_n(x)|$ при всех $x \in G$, то и $\sum f_n$ абсолютно равномерно сходится. Такой же признак, как и для числовых рядов. Следует из критерия Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса — это применение этого *принципа мажоризации* для случая $g_n(x) = a_n$.

Замечание. Если ряд $\sum f_n(x)$ равномерно на $G = [0, 1]$ абсолютно сходится, то отсюда вовсе не следует, что числовой ряд $\sum \|f_n\|_{M(G)}$ сходится. даже если $f_n \geqslant 0$.

Однако, справедливо такое утверждение: если ряд равномерно сходится, то в нём можно расставить скобки (не меняя порядка суммирования) так, чтобы для ряда из скобок можно применить признак Вейерштрасса.

Это и для числовых рядов правильно: в сходящемся ряде всегда можно расставить скобки так, чтобы ряд из сумм скобок получился абсолютно сходящимся.

Теперь приведем ещё одну теорему, специфическую для функций с вещественными значениями: в ней используется монотонность. Забегу вперед: множество G, на котором определены функции в этой теореме компактное.

Будем говорить, что *последовательность функций f_n монотонная*, если последовательность её значений $f_n(x)$ при каждом x монотонная, причём либо при всех x не возрастает, либо при всех x не убывает.

Не путаем! Не функции монотонные, а последовательности функций монотонные. Функции могут быть определены не на прямой, так что о монотонности функций нечего говорить.

Если ввести в множестве функций $M(G)$ отношение частичного порядка $f \succeq g \iff \forall x \in G: f(x) \geqslant g(x)$, то монотонность о которой я говорил, это как раз монотонность в пространстве $M(G)$ по отношению порядка «$\succeq$».

Как и у числовых рядов, монотонность последовательности частичных сумм — это то же самое, что неотрицательность членов ряда.

Пусть множество G компактно: из каждой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Например, $G = [a, b]$.

Теорема Ди́ни.[13] *Пусть неотрицательные функции $f_n : G \to \mathbb{R}^+$ непрерывны, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно и пусть сумма f^* — непрерывная функция. Тогда ряд $\sum f_n$ сходится к ней равномерно.*

[13]Улисс Ди́ни, 1845-1918, работал в Пизанском университете, в 1880-1890 годах был его ректором, его именем в Италии называют теорему о неявной функции.

Теорема Ди́ни для последовательностей. *Пусть функции s_n непрерывные, причем последовательность $s_n(x)$ монотонная и сходится поточечно на G к непрерывной функции s^*. Тогда s_n сходится к s^* равномерно.*

Эти теоремы эквивалентны, монотонность последовательности частичных сумм эквивалентна тому, что все члены ряда имеют при всех x определённый знак, один и тот же.

Доказательство теоремы Ди́ни сначала проведём для случая $s^* \equiv 0$ и убывающей последовательности функций s_n. Общий случай следует из этого, если рассмотреть последовательность $g_n = s_n - s^*$ или $g_n = s^* - s_n$.

Пусть при каждом $x \in G$ последовательность непрерывных функций $g_n(x)$ сходится поточечно к нулю, причём монотонно убывает. Надо доказать, что она сходится равномерно.

Рассуждаем от противного, помним, что $g_n \geqslant 0$. Пусть это не так:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n > N, \; x_n : \quad \text{справедливо} \quad g_n(x_n) \geqslant \varepsilon.$$

Выберем из последовательности x_n сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x^*$ (вот тут я использовал компактность множества G).

Напишем бесконечную табличку

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{g_{n_1}(x_{n_1})} & g_{n_1}(x_{n_2}) & g_{n_1}(x_{n_3}) & \ldots \to & g_{n_1}(x^*) \\
g_{n_2}(x_{n_1}) & \boxed{g_{n_2}(x_{n_2})} & g_{n_2}(x_{n_3}) & \ldots \to & g_{n_2}(x^*) \\
g_{n_3}(x_{n_1}) & g_{n_3}(x_{n_2}) & \boxed{g_{n_3}(x_{n_3})} & \ldots \to & g_{n_3}(x^*) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}$$

Сходимость в каждой строке по горизонтали — это непрерывность каждой из функций g_{n_k} и $x_{n_k} \to x^*$. Сходимость в каждом столбце по вертикали — это поточечная сходимость, сходимость монотонной последовательности чисел $g_m(x)$ к 0 при $x = x_{n_k}$.

По предположению, все диагональные элементы (они стоят в рамке) больше ε. По монотонности, все элементы над диагональю тоже больше ε. Поэтому все элементы в правом столбце тоже больше ε. А это противоречит тому, что $g_{n_k}(x^*) \to 0$.

Теперь теорема Ди́ни для ряда следует из доказанного: последовательность $f^*(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ состоит из непрерывных функций и поточечно монотонно стремиться к нулю. □

Контрпример. Для последовательностей функций на некомпактном множестве теорема Дини не верна: последовательность t^n монотонно поточечно сходится к нулю (непрерывной функции!) на $(0,1)$, но эта сходимость неравномерная: $\sup_{t\in(0,1)} t^n = 1$.

Лекция 5 (03 февраля 2016)

На прошлой лекции, в среду, мы занимались следующими вещами.

1) Равномерная и поточечная сходимость;

2) Полные пространства, полнота пространства C, признак Коши равномерной сходимости;

3) Признак равномерной сходимости Вейерштрасса;

4) Теорема Дини.

На прошлой лекции я пропустил несколько более общий (чем Вейерштрасса) признак. Фактически, это обычный мажорантный признак для положительных числовых рядов. Всюду предполагаем, что $x \in G$, G — некоторое множество.

Теорема. *Если $a_n(x) \geqslant 0$ и $\sum a_n(x)$ сходится равномерно, и $|b_n(x)| \leqslant a_n(x)$ при всех $x \in G$, то $\sum b_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство следует из признака Коши, применённого дважды.

В обратную сторону теорема не содержит слова «расходится».

Теорема. *Пусть $a_n(x) \geqslant 0$ и ряд $\sum a_n(x)$ не сходится равномерно. Тогда бо́льший ряд $\sum b_n(x)$, $b_n(x) \geqslant a_n(x)$ также не сходится равномерно.*

Здесь надо написать отрицание к признаку Коши равномерной сходимости $\sum a_n(x)$:

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > m > N\ \exists x \in G: \ \sum_{k=m}^{n} a_k(x) \geqslant \varepsilon,$$

заменой a_n на b_n получится отрицание к признаку Коши равномерной сходимости $\sum b_n(x)$. $\square$

Справедливы **аналоги признаков Дирихле и Абеля** равномерной сходимости рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. (вроде их сформулировали и придумали после Дирихле и Абеля). При доказательстве используется функциональное тождество Абеля, такое же как в числовых рядах.

Пусть a_n и b_n — произвольные числовые последовательности, $S_n = C + \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Тогда

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_{n+p} b_{n+p} - S_{n-1} b_n.$$

Выберем функцию $C(x)$ и положим $S_n(x) = C(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_n(x)$. Тождество Абеля для функций

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) + S_{n+p}(x) b_{n+p}(x) - S_{n-1}(x) b_n(x).$$

Признак равномерной сходимости Дирихле. *Есть 2 функциональных ряда,* $\sum a_n(x)$ *и* $\sum b_n(x)$*. Пусть все частичные суммы ряда* $\sum a_n(x)$ *равномерно ограничены, а последовательность функций* $b_n \rightrightarrows 0$ *монотонная. Тогда ряд* $\sum a_n(x)b_n(x)$ *равномерно сходится.*

Признак равномерной сходимости Абеля. *Есть 2 функциональных ряда,* $\sum a_n(x)$ *и* $\sum b_n(x)$*, Пусть ряд* $\sum a_n$ *равномерно сходится, а последовательность функций* b_n *монотонная и равномерно ограниченная. Тогда ряд* $\sum a_n(x)b_n(x)$ *равномерно сходится.*

Доказательство признаков Дирихле и Абеля равномерной сходимости такое же, как и у признаков Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов. Снова признак Абеля следует из Дирихле. Доказательство признака Дирихле совершенно такое же, как для числовых рядов.

Естественно, в условиях признаков Дирихле и Абеля равномерной сходимости абсолютной равномерной сходимости может не быть.

Доказательство признака Дирехле. Рассмотрим функции $B(n,p)(x) = \sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k(x)b_k(x)$. Положим $C(x) = 0$, тогда $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n(x)$, $S_{n+m}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+m} a_k(x)$ при всех $m = \mathbb{Z}^+$. Из тождества Абеля

$$|B(n,p)(x)| \leqslant \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\right| + |S_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{k>n} |S_k(x)| \left(b_n(x) - b_{n+p-1}(x)\right) + |S_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| + |S_{n-1}(x)b_n(x)|.$$

Теперь
$$\left|\sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\right| \leqslant \sup_k |S_k(x)| \sum_{k=n}^{n+p-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x))$$
$$= \sup_k |S_k(x)| \big(b_n(x) - b_{n+p}(x)\big) \rightrightarrows 0,$$

$$|S_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leqslant \sup_k |S_k(x)|\ |b_{n+p}(x)| \rightrightarrows 0, \qquad |S_{n-1}(x)b_n(x)| \leqslant \sup_k |S_k(x)|\ |b_n(x)| \rightrightarrows 0.$$

При достаточно большом n в силу равномерной сходимости $b_n \rightrightarrows 0$, последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n(x)b_n(x)$ фундаментальная, а сам ряд равномерно сходится. $\square$

Из Дирихле следует аналог Лейбница: если $b_n(x) \rightrightarrows 0$ монотонно, то $\sum(-1)^n b_n(x)$ сходится равномерно. Нужно только сказать, что суммы $\sum(-1)^n$ заведомо ограничены.

Если все функции, которые упоминались в признаках, непрерывны, то и суммы рядов получатся непрерывные.

Перестановка ряда и предела. Философия: самые разные пределы иногда можно переставлять местами. Часто, хотя и не всегда, справедливо что-то вроде

$$\lim_{x\to a}\ \lim_{n\to\infty}\ f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\ \lim_{x\to a}\ f_n(x),$$

где a — число, ∞, элемент пространства. Сюда же относится перестановка предела с интегралом, с производной, ряда с пределом, ряда с интегралом, двух рядов или интегралов.

Мы знаем, что предел можно переставлять с непрерывными функциями, с конечными суммами и произведениями (в частности).

Важное утверждение. *Переставлять пределы можно не всегда!*

Контрпример 1: $f_n(x) = x^n,\ x \in (0,1),\ \lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1} f_n(x)$.

Контрпример 2: $\lim\limits_{n\to\infty}\ \lim\limits_{m\to\infty}\ \dfrac{n^2-m^2}{n^2+m^2} = -1 \neq 1 = \lim\limits_{m\to\infty}\ \lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$.

Ситуация усугубляется частым желанием применить перестановку пределов при вычислениях. Очень так часто бывает: вычисляем что-то, и если переставить пределы, то сразу всё вычисляется. А доказывать, что это правильно долго и трудно.

Вы знаете вариант теоремы о перестановке пределов: равномерный предел последовательности непрерывных функций — непрерывная функция. Эту теорему можно переписать в виде

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ \lim_{x\to x^*} f_n(x) = f_n(x^*) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*)$$

или, что то же, $\lim\limits_{x\to x^*}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x^*} f_n(x)$, это тоже теорема о перестановке пределов.

Обычно, теоремы о перестановках пределов — не очень простые, нужны дополнительные условия, часто используется равномерная сходимость. Приведем теорему в общем виде.

Теорема. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится к* $f^*(x)$ *равномерно на некотором множестве* $G \in X$. *Пусть* $a \notin G$ *— предельная точка* G *(конечная или бесконечная) и пусть при каждом* n *существует* $\lim_{x\to a} f_n(x) = c_n$. *Тогда ряд* $\sum c_n$ *сходится, существует предел* $\lim_{x\to a} f^*(x) = c$ *и можно переставлять предел с рядом:*

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Про условие $a \notin G$. Если $a \notin G$, то теорема превращается в теорему о непрерывности равномерного предела непрерывных в точке a функций.

Переформулировка для последовательностей. *Пусть последовательность* $s_n(x)$ *сходится к* $s^*(x)$ *равномерно на множестве* $G \in X$. *Пусть* $a \notin G$ *— предельная точка* G *(конечная или бесконечная) и пусть при каждом* n *существует* $\lim_{x\to a} s_n(x) = c_n$. *Тогда последовательность* c_n *сходится, существует предел* $\lim_{x\to a} s^*(x)$ *и можно переставлять пределы:*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} s_n(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} s^*(x) = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Доказательство. 1. Ряд $\sum c_n$ сходится. Это следует из Коши: пишем критерий Коши равномерной сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ряда, в неравенстве $|\sum_{n=m}^{m+k} f_n(x)| < \varepsilon$ переходим к пределу при $x \to a$ (сначала переставляем предел с модулем, это можно делать из-за непрерывности модуля, потом переставляем предел с суммой, это можно делать так как сумма конечная), получаем неравенство $|\sum_{n=m}^{m+k} c_n| \leqslant \varepsilon$, это критерий Коши сходимости числового ряда $\sum c_n$, этот ряд сходится, полагаем $c^* = \sum c_n$.

2. Теперь при всех $x \in G$ и всех n

$$|f^*(x) - c^*| \leqslant |f^*(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| + |\sum_{k=1}^{n} c_k - c^*| + \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - c_k|.$$

Выберем n, чтобы первое и второе слагаемые были меньше $\varepsilon/3$ при всех $x \in G$. Для этого n конечная сумма бесконечно малых $|f_k(x) - c_k|$ при $x \to a$ меньше $\varepsilon/3$ при x близких к a. $\square$

Эта теорема довольно общая, в простом случае $G = (a, b]$, функции f_n непрерывны на $[a, b]$.

Следствие 1. Пусть $\sum f_n \rightrightarrows f^*$ на $(a, b]$. Тогда $\sum f_n(a) = \lim_{x\to a} f^*(x)$, причём ряд сходится.

Следствие 2. Пусть $\sum f_n \to f^*$ на $(a, b]$. Пусть $\sum f_n(a) \neq \lim_{x\to a} f^*(x)$, например, ряд слева расходится. Тогда сходимость на $(a, b]$ не является равномерной.

В завершение отмечу, что равномерная сходимость была определена как сходимость в $M(G)$, это не совсем так. Равномерная сходимость рядов и последовательностей определена и для неограниченных функций.

Примеры легко придумать, например, на $\mathbb{R}$: $x + 1/n \rightrightarrows x$. Или можно взять функцию $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, а потом нарезать на отрезки длины $1/n$ и рассмотреть ступенчатую функцию $x_n(t) = k/n$ при $\operatorname{tg} t \in [k/n, (k+1)/n)$. Очевидно, что $0 \leqslant x_n(t) - \operatorname{tg} t < 1/n$, поэтому $x_n(t) \rightrightarrows \operatorname{tg} t$. Такие конструкции будут использоваться через год при определении интеграла Лебега. А пока мы будем говорить только о равномерной сходимости ограниченных функций.

Замечу, признак Коши равномерной сходимости сохраняется. Пространство $M(G)$ не работает, а как бы «полнота» остаётся.

5 Важнейший пример: степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Лемма. *Если степенной ряд сходится для $x = x_*$, то он сходится абсолютно для любого x, удовлетворяющего $|x| < |x_*|$, сходимость на множестве $\{x : |x| \leqslant r < |x_*|\}$ равномерная.*

Можно считать, что $x \in \mathbb{R}$, а можно — что $x \in \mathbb{C}$. Рассуждения и смысл одинаковые.

Доказательство. Так как ряд сходится для $x = x_*$, то последовательность $a_n x_*^n$ стремится к нулю, поэтому эта последовательность ограничена: при всех n справедлива оценка $|a_n x_*^n| \leqslant K$. Отсюда $|a_n x^n| \leqslant K \left|\dfrac{x}{x_*}\right|^n$. Теперь ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится при каждом x, $|x| < |x^*|$, так как он меньше геометрической прогрессии $\sum K q^n$ со знаменателем $q = |x/x_*| < 1$.

Степенной ряд равномерно сходится по признаку Вейерштрасса на множестве $\{x : |x| \leqslant r < |x_*|\}$ по тем же соображениям: $|a_n x^n| < K q^n$, где $q \leqslant r/|x_*| < 1$. $\square$

Радиус сходимости степенного ряда. Таким образом, множество значений x, при которых степенной ряд сходится, это промежуток $(-R, R)$. Промежуток может вырождаться в точку, может быть всей прямой, может (при конечном $R \neq 0$) сходиться или нет в точках $\pm R$. Величина R называется **радиус сходимости**. Слово *радиус* пришло из комплексных рядов, там область сходимости — круг. Я буду говорить и для вещественных рядов слова «круг сходимости».

Непрерывность суммы степенного ряда на интервале $(-R, R)$ следует из равномерной сходимости на меньшем замкнутом промежутке.

Формула Коши–Адамара. Формулу установил Коши, далее она была забыта, потом Адамар[14] её переоткрыл. Формула для радиуса сходимости:

$$R = \frac{1}{\rho}, \qquad \rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(если $\rho = 0$, то $R = \infty$, если $\rho = \infty$, то $R = 0$).

При применении формулы надо помнить, что $\lim \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$, $\lim \sqrt[n]{e^{\sqrt{n}}} = 1$.

Для доказательства надо рассмотреть 3 случая: $\rho = 0$, $\rho = \infty$, $\rho > 0$ — конечное число.

1) Если $\rho = 0$, то по признаку Коши $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ при любом $|x|$.

2) Если $\rho = \infty$, то при каждом $x \neq 0$ общий член ряда не стремится к нулю.

3) Пусть $0 < \rho < \infty$. Зафиксируем x, для которого $|x| < 1/\rho$, Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| < 1/(\rho + \varepsilon)$. По этому ε построим такое число N, что для всех $n > N$ справедливо $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < |x|(\rho + \varepsilon) < 1$. По признаку Коши для этого x ряд сходится.

Теперь возьмём x, удовлетворяющий $|x| > 1/\rho$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ справедливо $|x| > 1/(\rho - \varepsilon)$. По определению, для бесконечного количества значений n выполнено $\sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} > \rho - \varepsilon$. Поэтому для таких n справедливо $a_n x^n \geqslant 1$ и ряд расходится.

Мы доказали, что степенной ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, то есть R — степенной радиус. Формула Коши–Адамара доказана. $\square$

---

[14]Адамар, Жак-Соломон, 1865–1963. Первые работы в 19 лет, работы по алгебре, геометрии, функциональному анализу, дифференциальной геометрии, математической физике, топологии, теории вероятностей, механике, гидродинамике и др.

Если ряд не сходится при $x = R$, то нет равномерной сходимости на $[0, R)$.

В самом деле, если бы сходимость была равномерной, то можно было бы воспользоваться теоремой о перестановке ряда и предела вопреки предположению.

Если ряд сходится при $x = R$, то сходимость на $[0, R]$ равномерная.

Для этого перепишем ряд в удобном виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Воспользуемся признаком Абеля (я говорил, что признаки Абеля–Дирихле для знакопеременных рядов, это как раз этот случай!). Ряд $\sum a_n R^n$ сходится (равномерно, так как не зависит от x), а множители $(x/R)^n$ образуют монотонную и равномерно ограниченную последовательность.

Отсюда следует **теорема Абеля**: *если есть сходимость в крайней точке, то есть и непрерывность суммы ряда в ней.*

Выводы. *Есть «круг» сходимости, на самом деле промежуток. На любом строго меньшем замкнутом промежутке* $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ $(\varepsilon \in (0, R))$ *сходимость равномерная, поэтому к непрерывной функции, то есть внутри круга сходимости предельная функция всегда непрерывная. В крайней точке числовой ряд сходится, если и только если сходимость на соответствующей замкнутой половинке промежутка* ($[-R, 0]$ *или* $[0, R]$) *равномерная и, одновременно, если и только если сходимость на соответствующей не замкнутой половинке промежутка* ($(-R, 0]$ *или* $[0, R)$) *равномерная.*

Лекция 6 (05 февраля 2016)

На прошлой лекции, в среду, мы занимались следующими вещами.

1) Признаки равномерной сходимости Абеля и Дирихле.

2) Теорема о перестановке ряда и предела.

3) Степенные ряды, формула Коши–Адамара

4) Сходимость на концах круга сходимости.

Замечание 1. Ряды в $\mathbb{C}$. Радиус сходимости ($=1$) ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1/(1+x^2)$ — это расстояние от 0 до точки i.

Вопрос о сходимости в граничных точках комплексных степенных рядов сложный. Там не 2 точки, а целая окружность, монотонности не бывает, все не так просто.

Простейший пример: где сходится ряд $\sum z^n/n$? Для исследования этого вопроса можно воспользоваться перефразировкой признака Дирихле для комплексных рядов.

Есть 2 функциональных ряда, $\sum a_n(x) \in \mathbb{C}$ и $\sum b_n(x) \in \mathbb{R}$, Пусть все частичные суммы ряда $\sum a_n(x)$ равномерно ограничены в $\mathbb{C}$, а последовательность функций $b_n \rightrightarrows 0$ монотонная. Тогда ряд $\sum a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство можно провести такое же точно, как в $\mathbb{R}$, а можно воспользоваться сходимостью вещественной и мнимой части отдельно.

Теперь $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^n = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$. Эта сумма равномерно по z ($|z| \leqslant 1$) ограничена при всех n, если и только если $|1-z| > \varepsilon$. В точке $z=1$ у нас получается гармонический ряд, он расходится. Если убрать окрестность точки $z=1$, то на остатке сходимость будет равномерная.

Замечание 2. Радиус сходимости «по Даламберу». Пусть предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = A$ существует. Тогда число $R = |A|$ и есть радиус сходимости.

Следует из обычного признака Даламбера: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n x^n|}{|a_{n+1}x^{n+1}|} = \frac{|A|}{|x|}$.

Если предел не существует, то все не просто. Пример: ряд $\sum a_n x^n$ при $a_n = 1, 2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \dots$, $a_{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $a_{2n+1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ имеет радиус сходимости $\sqrt{2/3}$ (по Коши–Адамару), а последовательность дробей a_{n+1}/a_n скачет между 2 и 1/3.

Замечание 3. Почленное дифференцирование степенного ряда. Степенной ряд легко и приятно почленно дифференцировать. Ряды, полученные почленным дифференцированием или интегрированием имеют тот же радиус сходимости — по формуле Коши–Адамара $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{n|a_{n+1}|} = \overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}$.

Пусть радиус сходимости положительный. Можно ли почленно дифференцировать равенство $g(x) = \sum a_n x^n$ внутри круга сходимости? Справедливо ли равенство $g'(x) = \sum g_n'(x)$?

Это типичный вопрос о перестановке предела и ряда.

Пусть есть ряд $g(x) = \sum g_n(x)$ из дифференцируемых функций. Я пока не конкретизирую, где и как ряд сходится, чуть позже. Пусть n от 0 до ∞. Интересует равенство $g'(x) = \sum g_n'(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \stackrel{?}{=} \sum \lim_{h\to 0} \frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h}.$$

То есть

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sum g_n(x+h) - \sum g_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \sum \frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h} \stackrel{?}{=} \sum \lim_{h\to 0} \frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h}.$$

Пределы по h справа существуют, это производные степенной функции, ряд справа сходится в круге сходимости. А про предел слева мы пока ничего не знаем.

Зафиксируем x и положим $f_n(h) = (g_n(x+h) - g_n(x))/h$. То что, нам бы хотелось доказать выглядит как перестановка ряда и предела:

$$\lim_{h\to 0} \sum f_n(h) \stackrel{?}{=} \sum \lim_{h\to 0} f_n(h).$$

Функции $f_n(h)$ определены при $h \neq 0$ и всех целых $n \geqslant 0$. По теореме с прошлой лекции, если бы удалось показать, что $\sum f_n(h) \rightrightarrows f(h) = (g(x+h) - g(x))/h$ при всех $h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ для какого-то $\delta > 0$, то предел $\lim_{h\to 0}(g(x+h) - g(x))/h$ существовал бы и можно было бы переставлять ряд и предел.

Теперь вспомним, что ряд у нас был степенной, $g_n(x) = a_n x^n$. Пусть радиус сходимости у него R, пусть $x \in (-R, R)$, тогда при маленьком δ имеем $[x-\delta, x+\delta] \in [-r, r]$, где $r < R$. Теперь по Лагранжу $f_n(h) = f_n'(\theta_n)$ при некотором $\theta_n \in [-\delta, \delta]$, то есть $|f_n(h)| \leqslant |a_n| n |\theta_n|^n \leqslant |a_n| n\, r^n = b_n$. Так как $r < R$, то ряд $\sum b_n$ сходится, значит по признаку Вейерштрасса ряд $\sum f_n(h)$ сходится равномерно. И можно почленно дифференцировать степенной ряд в открытом круге сходимости.

Для степенного ряда все сходимости внутри замкнутого круга радиуса, меньшего радиуса сходимости, равномерные и абсолютные,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) \text{ определена и } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

во всех точках внутри круга сходимости.

На границе круга сходимости все может быть как угодно.

Естественно, мы сразу получили, что дифференцировать функцию f внутри круга сходимости степенного ряда можно сколько угодно раз и

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n, \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

Из этой формулы следует, что $f^k(0) = k! a_k$, поэтому **для функции — суммы степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости, этот ряд есть её ряд Маклорена**.

Ряд Тейлора. Разложения элементарных функций. Теперь мы можем исследовать ряды Тейлора (точнее, Маклорена) на сходимость и равномерную сходимость, не зная остаточных членов.

Пример 1. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \ldots + (-1)^{k-1}\dfrac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots$. Радиус сходимости равен 1. Ряд справа сходится при $x = \pm 1$ как знакочередующийся, следовательно, ряд Тейлора для арктангенса сходится равномерно на промежутке $[-1, 1]$.

Вспомнить, если продифференцировать ряд, то будет тот же радиус сходимости. А у производной арктангенса $(1 + x^2)^{-1}$ есть «деление на ноль» (*полюс*) в точке i. Отсюда и происходит радиус круга сходимости. То, что есть сходимость в концах — довольно естественно, арктангенс — хорошая гладкая функция на всей оси.

Пример 2. $\ln(1 + x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \ldots + (-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k} + \ldots$. Радиус сходимости равен 1. Ряд справа сходится при $x = 1$ и расходится при $x = -1$. Ряд Тейлора сходится равномерно на $[0, 1]$ и не сходится равномерно на $(-1, 0]$. И не удивительно: ведь $\ln(1 + x) \to -\infty$ при $x \to -1$.

Пример 3. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$ при $\alpha \notin \mathbb{Z}^+$. Мы этот ряд исследовали, знаем, что $R = 1$. Этот же результат можно получить, заметив, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\alpha - n} = -1.$$

Здесь при $x = 1$ знакочередующийся с некоторого момента ряд сходится, ряд Тейлора сходится равномерно на $[0, 1]$. При $x = -1$ ряд знакопостоянный, исследуем по признаку Раабе: при больших n

$$\mathcal{R}_n = n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = n\Big(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\Big) = \alpha + 1.$$

Значит при $\alpha > 0$ есть сходимость, а при $\alpha < 0$ нет сходимости, это и не странно, при $\alpha > 0$ функция $(1 + x)^\alpha$ в точке -1 непрерывна и всем хороша, а при $\alpha < 0$ она стремится к ∞. Соответственно, при $\alpha > 0$ степенной ряд сходится равномерно на $[-1, 1]$, при $\alpha < 0$ степенной ряд сходится не равномерно на $(-1, 0]$.

Суммирование расходящихся числовых рядов.

Физики в процессе научной работы давно сталкивались (и регулярно сталкиваются до сих пор) с преобразованиями формул, содержащими расходящиеся ряды. Физики пишут эти формулы, часто они не имеют математического смысла, однако после некоторых преобразований оказывается, что всё становится корректно и полученные формулы имеют правильный физический смысл. От любого средства, которое приводит к хорошим результатам отказываться нельзя, хотя математики и пытались.

Несмотря на возражения математиков, физики не отказались от использования такой «математики». Тогда математики придумали, как расширить понятие сходимости ряда: научились так приписывать расходящимся рядам значения их суммы, чтобы полученное выражение имело хоть какой-то смысл. Иногда, некоторым рядам разные учёные приписывали разный смысл. Типичный пример: ряд $\sum(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$. Можно сказать, что его сумма $S = 1 - S$ равна $1/2$. Можно к этому же результату прийти по-другому:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Полагаем в этой формуле (она верна при $x \in (-1, 1)$) $x = 1$, получаем $S = 1/2$ (так делал Эйлер!). Но можно написать формулу

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3} = (1-x^2)(1+x^3+x^6+\ldots) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - \ldots$$

из неё следует при $x = 1$, что $S = 2/3$. А можно получить и еще «что угодно».

Правило, как по ряду выводить число, которое мы называем суммой ряда называют *метод суммирования*. Придумали, какие методы суммирования приемлемые. *Во-первых, метод суммирования должен быть* ***линейным****, во-вторых, —* ***регулярным****,* то есть сходящийся ряд должен быть суммируемым этим методом и его сумма, полученная этим методом, должна совпасть с настоящей суммой.

Я расскажу 2 линейных и регулярных метода суммирования: метод Пуассона[15] (степенными рядами) и метод Чезаро[16] (средние арифметические). Если ряд суммируемый по методу Чезаро, то он суммируемый по Пуассону и к той же самой сумме.

Суммирование по Пуассону. Берем ряд $\sum a_n$, который собираемся суммировать. Рассматриваем степенной ряд $\sum a_n x^n$. Если этот ряд сходится при $x \in (0, 1)$ и существует предел

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

то число S называется суммой ряда $\sum a_n$ по Пуассону.

Линейность метода очевидна.

Регулярность следует из **теоремы Абеля** (он доказал эту теорему вне связи с обобщенным суммированием, а Пуассон использовал): *если ряд $\sum a_n$ сходится в обычном смысле, то существует его сумма по Пуассону и она совпадает с обычной суммой.*

Доказательство. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$ больше 1, то всё очевидно, ряд сходится равномерно на $[-1, 1]$ к непрерывной функции.

Радиус сходимости не может быть меньше 1, так как в 1 он сходится.

---

[15]Пуассон, Симеон Дени, 1781–1840, физик и математик, скобка Пуассона, поток Пуассона и много-много всего ещё.

[16]Чезаро Эрнесто (1859–1906) — итальянский математик.

Пусть радиус круга сходимости равен 1. А тогда у нас была теорема о том, что если ряд сходится в правом конце, то от сходится равномерно на «полукруге» сходимости $[0,1]$. А значит, сходится к непрерывной функции на $[0,1]$. Значит, все в порядке: $\lim_{x\to 1}\sum a_n x^n = \sum a_n$. $\square$

Суммирование по Чезаре. Говорим, что ряд $\sum a_n$ сходится по Чезаре, если сходится последовательность $\alpha_n = \frac{1}{n}S_n$, где S_n, как обычно, — частичные суммы ряда $\sum a_n$. Число $\lim\alpha_n$ называем суммой ряда по Чезаре.

Линейность очевидна, регулярность следует из теоремы, которая у вас была когда-то в листках: если последовательность сходится, то и последовательность средних арифметических тоже сходится к тому же пределу.

Фробениус показал, что если (расходящийся) ряд сходится по Чезаре, то он сходится и по Пуассону, причём к той же сумме.

Есть еще куча разных других методов суммирования расходящихся рядов, они связаны с великими именами: Теплиц, Гельдер, Таубер, Борель, Харди, Эйлер.

6 Повторные и двойные ряды

Повторные ряды. Определение. Геометрическая интерпретация в виде таблицы.

Повторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}$ называется **сходящимся**, если сходятся все внутренние ряды и сходится ряд из сумм внутренних рядов.

Двойной ряд. Определение. Геометрическая интерпретация в виде таблицы.

Двойной ряд $\sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}$ называется сходящимся, если его частичные суммы $S_{m,n}$ сходятся к пределу S при $n,m\to\infty$: $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m>N$ справедливо $|S_{m,n}-S|<\varepsilon$. Число S называется суммой двойного ряда.

Пример и Парадокс Бернулли[17]**.**

$$\begin{array}{|cccccccc}
\frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots & = & 1 \\
 & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots & = & \frac{1}{2} \\
 & & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots & = & \frac{1}{3} \\
 & & & \frac{1}{4\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots & = & \frac{1}{4} \\
 & & & & \frac{1}{5\cdot 6} & \dots & = & \frac{1}{5} \\
 & & & & & \dots & & \\
=\frac{1}{2} & =\frac{1}{3} & =\frac{1}{4} & =\frac{1}{5} & =\frac{1}{6} & \dots & & ???
\end{array}$$

$$\begin{array}{|ccccccc}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \dots \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Здесь сходится двойной ряд к 0, сходятся все ряды по столбцам, тоже к 0, а ряды по строкам расходятся.

Лекция 7 (10 февраля 2016)

На прошлой лекции, в пятницу, мы занимались следующими вещами.

1. Рассмотрели степенные ряды в $\mathbb{C}$;

2. Доказали теорему о почленном дифференцировании степенных рядов и сделали из неё выводы о разложении функций–сумм степенных рядов в ряд Тейлора;

3. Обсудили суммирование расходящихся рядов;

4. Начали двойные ряды, я дал определения и пару примеров.

Продолжаем двойные ряды.

Теорема. *Если сходится двойной ряд и сходятся все ряды по строкам, то сходится повторный ряд и его сумма совпадает с суммой двойного.*

Введем обозначения $S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}$ (частичные суммы двойного ряда по прямоугольникам), $S_m = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{m,\ell}$ — суммы рядов по строкам.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем в силу сходимости двойного ряда по сумме S двойного ряда такое N, что при $m, n > N$ справедливо $|S_{m,n} - S| < \varepsilon$. Фиксируем m и переходим к пределу по n в неравенстве, получаем $|S_m - S| \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует сходимость ряда из сумм рядов к S.$\square$

Напоминаю, на прошлой лекции я приводил пример, когда двойной ряд сходился и один повторный ряд сходился — в самом деле, к той же сумме, а второй был не определен. Вот теорема как раз был про тот двойной ряд.

Как мы видим, переставлять повторные ряды «просто так» нельзя.

Как обычно, мы будем говорить, что двойной (или повторный) ряд абсолютно сходится, если сходится двойной (или повторный) ряд из модулей.

Рассмотрим двойной ряд, 2 повторных ряда и ещё какой-то обычный ряд, содержащий все слагаемые двойного ряда, взятого в каком-то порядке.

Теорема. *Если абсолютно сходится какой-то из этих рядов, то сходятся все остальные, причём суммы всех совпадают.*

Сначала докажем теорему для рядов с положительными членами. Здесь для доказательства нужно пользоваться принципом: ряд с положительными членами сходится, если все частичные суммы равномерно ограничены. Принцип справедлив для двойного ряда, и для повторного и для обычного. Фактически, надо показать, что для каждой частичной суммы любого из перечисленных рядов найдется большая частичная сумма любого другого ряда. Тогда все супремумы будут равны, а они и есть суммы рядов.

Для примера, докажем один вариант этой части теоремы. Пусть сходится один повторный ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = S$, докажем сходимость двойного ряда к той же сумме.

По определению, ограничены все частичные суммы внешнего ряда: $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\leqslant S$. Тогда, очевидно, ограничены все частичные суммы частичных сумм внутренних рядов одной длины: $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{ij}\leqslant S$. Итак, двойной ряд тоже сходится, суммы обоих рядов совпадают в силу предыдущей теоремы.

Для общего случая, когда ряд не из неотрицательных членов, но сходимость абсолютная, надо разбить ряд на положительную часть и отрицательную часть и отдельно для каждой из частей все доказать. □

Замечания.

1. Суммировать абсолютно сходящийся двойной ряд можно не только по прямоугольникам, но и «как угодно». Например, по треугольникам–диагоналям (как было при произведении рядов).

2. Теорема про абсолютно сходящийся двойной ряд аналогична будущей теореме Фубини про интегралы, одной из важных теорем в теории интеграла Лебега, теории вероятностей.

3. В случае абсолютной сходимости всё хорошо: можно переставлять ряды, считать суммы в любом порядки, менять слагаемые произвольным образом.

4. Естественно, вместо двойных рядов можно рассматривать тройные и иные кратные ряды.

5. Справедливы признаки сравнения для положительных двойных рядов и интегральные признаки сходимости, но теперь уже нужно считать двойные интегралы, который будут, скорее всего, в конце 2-го курса.

6. Пример. Исследовать двойной ряд $\displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\bigl(k+\ell\bigr)^{s}}$. Он сходится при $s>2$ и расходится при $s\leqslant 2$. Следует из равенства (суммирование по треугольникам): $\displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\bigl(k+\ell\bigr)^{s}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^{s}}$.

7 Бесконечные произведения.

Сходимость. Бесконечное произведение: $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$.

Классический объект, Эйлер применял бесконечные произведения для вычисления количества $p(n)$ всех разбиений натурального числа (количество различных представлений в виде суммы натуральных чисел), $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, ..., p(100) = 190569292$, это было известно ещё в 19м веке.

Через бесконечные произведения получалась пентагональная теорема

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q x^{(3q^2+q)/2}$$

и рекуррентная формула для $p(n)$ (не привожу). Эйлер доказал придуманную им пентагональную теорему через 14 лет.

Определение. *Произведение называется сходящимся, если* $\exists \lim p_n \neq 0,\ \ p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$*; произведение называется расходящимся, если* $\lim p_n$ *не существует; произведение называется расходящимся к нулю, если* $\lim p_n = 0$.

Необходимое условие сходимости: $\lim u_n = 1$. В частности, отрицательных сомножителей не более конечного числа.

Необходимое и достаточное условие сходимости. *Пусть* $u_n = 1 + a_n,\ \ a_n > -1$*, тогда*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \text{ сходится } \Leftrightarrow \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \text{ сходится.}$$

Доказательство очевидно, следует из непрерывности логарифма и экспоненты.

Абсолютная сходимость. Определение: *если* $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1 + a_n)|$ *сходится.*

Теорема. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *абсолютно сходится* $\Leftrightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится.*

Доказательство. Если ряд из модулей или из логарифмов сходится, то $|a_n| \to 0$, значит при больших n справедливы оценки $\frac{1}{2}|a_n| < \ln(1 + |a_n|) < 2|a_n|$. Значит ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1 + a_n)|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходятся и расходятся одновременно. $\square$

Теорема. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *сходится одновременно с рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Следует из неравенств $(1/2 - c)x^2 < |\ln(1 + x) - x| < (1/2 + c)x^2$.

Это означает, что $\prod_{n=2}^{\infty}(1 + (-1)^n/\sqrt{n})$ расходится. А $\prod_{n=2}^{\infty}(1 + (-1)^n/n^{2/3})$ — сходится.

Пример Эйлера: $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+1/n}=e^{\gamma}$, γ — константа Эйлера, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n+1)+\gamma+o(1)$

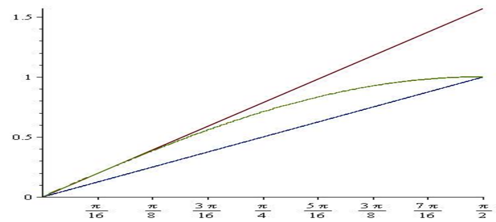
$$\prod_{n=1}^{N}\frac{e^{1/n}}{1+1/n}=\frac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}}}{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\ldots(1+\frac{1}{(N+1)})}=\frac{e^{\ln(N+1)+\gamma+o(1)}}{N+1}\to e^{\gamma}$$

Разложение синуса, формула Валлиса[18]

$\displaystyle\sin x=x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2})$

$$\boxed{\text{Формула Валлиса}\quad \frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}=\frac{2^2\,4^2\,6^2\,\ldots}{1^2\,3^2\,5^2\,\ldots}}$$

1) $\displaystyle\frac{2}{\pi}x\le\sin x\leqslant x$ при $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$



2) $\displaystyle\Big|\prod_{k=m}^{n}(1+a_k)-1\Big|\leqslant\prod_{k=m}^{n}(1+|a_k|)-1$ Раскрыть скобки, вроде, очевидно.

3) $\sin(2n+1)x=(2n+1)\sin x\;P_n(\sin^2x)$, где P_n — многочлен. По индукции.

4) В этом равенстве $\sin(2n+1)x=0$ при $x=\pi k/(2n+1),\ k=1,\ldots,n$.
Поэтому у многочлена P_n известны n разных корней $\sin^2(\pi k/(2n+1))$. Значит

$$P_n(y)=A\prod_{k=1}^{n}\Big(y-\sin^2\frac{k}{2n+1}\Big),\text{ где } A \text{ — коэффициент.}$$

5) Найдем A. Подставим $y:=\sin^2x$:

$$A\prod_{k=1}^{n}\Big(\sin^2x-\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\Big)=\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\sin x}$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\sin x}=A\prod_{k=1}^{n}\Big(-\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\Big)\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2x}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)=A_n\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2x}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)$$

Если теперь перейти к пределу при $x\to0$, получим, что $A_n=1$.

6) Заменим $x:=(2n+1)x$,

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}=\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)$$

возьмем $m:\ \pi m<2n+1$ и разобьем $\prod_{k=1}^{n}\ldots=\prod_{k=1}^{m}\ldots\prod_{k=m+1}^{n}\ldots$.

[18] Джон Валлис, 1616–1703, английский математик, старший современник Ньютона.

7) Сначала оценим второе произведение

$$P_{n,m} = \prod_{k=m+1}^{n} \Big(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\Big).$$

В силу неравенства 2)

$$|1 - P_{n,m}| \leqslant \prod_{k=m+1}^{n} \Big(1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\Big) - 1.$$

А так как в силу неравенств 1)

$$\frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \leq \frac{x^2}{4k^2},$$

то

$$|1 - P_{n,m}| \leqslant \prod_{k=m+1}^{n} (1 + \frac{x^2}{4k^2}) - 1 \leqslant \prod_{k=m+1}^{\infty} (1 + \frac{x^2}{4k^2}) - 1 \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

8) Теперь вернемся к первому сомножителю-произведению $\prod_{k=1}^{m} \ldots$. Перейдем в равенстве

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin \frac{x}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{m} \Big(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\Big) P_{n,m}$$

к пределу при $n \to \infty$. Левая часть стремится к $\sin x/x$, справа стоит сомножитель

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \Big(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \Big(1 - \Big(\frac{\frac{x}{2n+1}}{\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)^2\Big) = \prod_{k=1}^{m} \Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\Big)$$

Теперь получили $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2})$ $\square$