

# КОМБИНАТОРНАЯ ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Виктор Батырев (Тюбинген)  
victor.batyrev@uni – tuebingen.de

Комбинаторной зеркальной симметрией называется чисто комбинаторный подход к зеркальной симметрии, основанный на полярной двойственности в классе специальных целочисленных многогранников, введённых лектором и называемых *рефлексивными* [Ba94]. Платоновы тела дают самые известные примеры полярно двойственных пар многогранников: куб-октаэдр, икосаэдр-додекаэдр. Для комбинаторной зеркальной симметрии существенным обстоятельством является то, что рассматриваемые рефлексивные многогранники  $\Delta$  имеют вершины в целых точках решётки  $M$ , а вершины полярно двойственных рефлексивных многогранников  $\Delta^*$  принадлежат двойственной решётке  $N$ . Решётку  $M$  можно отождествить с решёткой характеров  $\mathcal{X}(T)$  некоторого алгебраического тора  $T$ , а соответствующую двойственную решётку  $N$  с решёткой однопараметрических подгрупп в  $T$ . Именно по этой причине основным инструментом данного комбинаторного подхода является теория торических многообразий [Da78]. Комбинаторная зеркальная симметрия позволяет проинтерпретировать обнаруженную физиками зеркальную двойственность для многообразий Калаби-Яу с помощью перехода от  $M$  к двойственной решётке  $N$ , при которой рефлексивный многогранник  $\Delta$  заменяется на полярный рефлексивный многогранник  $\Delta^*$ , а многогранник  $\Delta^*$  на  $(\Delta^*)^* = \Delta$ .

Цель лекций состоит в том, чтобы максимально доступно объяснить связь между рефлексивными многогранниками и многообразиями Калаби-Яу, а также проинформировать слушателей о дальнейших методах и результатах, полученных в связи с этой комбинаторной двойственностью при исследовании зеркальной симметрии за последние четверть века. В лекциях будут рассмотрены следующие темы:

- (1) Торические многообразия. Ковариантное описание торических многообразий с помощью вееров из конусов. Контравариантное описание торических многообразий с помощью целочисленных многогранников. Критерий гладкости. Разрешение особенностей торических многообразий с помощью симплицальных подразбиений конусов. Дивизоры Вейля и

- Карты на торических многообразиях, критерий обильности. Числа Бетти торических многообразий. Многочлен Эххарта целочисленного многогранника. Кольцо когомологий гладкого проективного торического многообразия [Da78].
- (2) Гладкие проективные бирациональные модели невырожденных гиперповерхностей в торе. Комбинаторное вычисление чисел Ходжа-Делиня невырожденных гиперповерхностей в торе [DKh86].
  - (3) Обобщённые гипергеометрические функции Гельфанда, Зелевинского и Капранова, связанные с торическими многообразиями [GKZ89]. Выпуклые триангуляции многогранника Ньютона и их связь с вторичными многогранниками [GKZ90]. Вторичный веер торического многообразия [OP91].
  - (4) Рефлексивные многогранники. Построение гладких проективных многообразий Калаби-Яу по рефлексивным многогранникам размерности не более 4. Комбинаторное вычисление чисел Ходжа многообразий Калаби-Яу [Ba94]. Струнные числа Ходжа особых многообразий [BB96]. Обобщение двойственности для рефлексивных многогранников на случай полных пересечений Калаби-Яу в торических многообразиях [BB97].
  - (5) Вычисление инвариантов Громова-Виттена для гиперповерхностей и полных пересечений Калаби-Яу в торических многообразиях с помощью обобщённых гипергеометрических функций [BvS95].
  - (6) Вертексные алгебры, связанные с торическими многообразиями и их применения в комбинаторной зеркальной симметрии [Bo01, Bo13, BH13].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ba94] V. V. Batyrev, *Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties*, J. Alg. Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535.
- [BvS95] V. V. Batyrev, D. van Straten, *Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toric varieties*, Comm. Math. Phys., 168:3 (1995), 493–533.
- [BB96] V. V. Batyrev and L. A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. 126 (1) (1996) 183–203.
- [BB97] V. V. Batyrev and L. A. Borisov, *Dual cones and mirror symmetry for generalized Calabi-Yau manifolds*, Mirror Symmetry II, AMS/IP Stud. Adv. Math. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997), 71–86.
- [Bo01] L. A. Borisov, *Vertex algebras and mirror symmetry*, Commun.Math.Phys. 215 (2001) 517–557.

- [Bo13] L. A. Borisov, *Berglund–Hübsch mirror symmetry via vertex algebras*, Commun. Math. Phys. 320 (1) (2013) 73–99.
- [BH13] L. A. Borisov, R. P. Horja, *On the better behaved version of the GKZ hypergeometric system*, Math. Ann. **357** :2 (2013), 585–603.
- [Da78] В. И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, УМН, **33** :2 (200) (1978), 85–134.
- [DKh86] В. И. Данилов, А.Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня* Изв. АН СССР. Сер. матем., **50** : 5 (1986), 925–945.
- [GKZ89] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов, *Гипергеометрические функции и торические многообразия*, Функц. анализ и его прил., **23**:2 (1989), 12–26.
- [GKZ90] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М.М. Капранов, *Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона*, Алгебра и Анализ **2** : 3 (1990), 1–62.
- [OP91] T. Oda, H. S. Park, *Linear Gale transforms and Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decomposition*, Tohoku Math. J., II Ser., **43** (1991), 375–399.