МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Региональный научно-образовательный математический центр КФУ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ - 2019

Сборник трудов
Международной научной конференции
Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2019

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9
ББК 22.15
С56

С56 **Международная конференция «Современная геометрия и её приложения - 2019»:** сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2019. – 170 с.

ISBN 978-5-00130-198-1

В сборнике трудов опубликованы *0* статьи, посвященные современным проблемам геометрии и её приложений.

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области геометрии и ее приложений.

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9

ББК 22.15

ISBN 978-5-00130-198-1

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 514.762; 514.82

О ГЕОМЕТРИИ РАССЛОЕННЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т.А. Гончар[1], Е.И. Яковлев[2]

1 *gonchar.t.a@yandex.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики
2 *eyakovlev@hse.ru*; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Исследуются связи между геометрическими свойствами расслоенных псевдоримановых многообразий и их баз. Основное внимание уделяется лоренцевым многообразиям и условиям причинности.

Ключевые слова: главное расслоение, G-связность, лоренцево многообразие, пространство-время, условие причинности.

Геометрия расслоенных многообразий имеет многочисленные применения. Например, собственно римановы многообразия такого типа оказались полезными при изучении динамики механических систем с гироскопическими силами, для которых функционал действия многозначен [1]–[3]. Расслоенные лоренцевы многообразия применяются в теоретической физике при построении моделей типа Калуцы-Клейна. С их помощью также оказалось возможными исследование двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа [4], [5]. Очевидно, этот список приложений может быть существенно расширен.

В римановой геометрии в целом любая теорема доказывается в предположении о полноте изучаемого многообразия. В глобальной лоренцевой геометрии геодезичечкая полнота уже не играет такой важной роли. Вместо нее используется целый ряд ограничений, называемых условиями причинности. К тому же, все эти условия допускают физические интерпретации. Поэтому важно иметь как можно больше критериев их выполнения в конкретных ситуациях.

В [6] с этой целью рассмотрен важный класс многообразий, являющихся искривленными произведениями $(E,g) = (B,h) \times_f (G,\gamma)$ лоренцевых многообразий (B,h) на полные римановы многообразия (G,γ) с искривляющими функциями $f : B \to \mathbb{R}$. Показано, что многие условия причинности для многообразий (E,g) и (B,h) выполняются или нет одновременно.

Расслоенное лоренцево многообразие (E,g) представляет собой существенно более сложную конструкцию. Но в случае пространственноподобности слоев оно также индуцирует на базе B лоренцеву метрику h. Возникает естественный вопрос: останется ли в этой ситуации справедливым указанный выше результат из книги [6]? Обсуждению этой проблемы и посвящен данный доклад.

Итак, пусть $\xi = (E,p,B,G)$ – гладкое главное расслоение с базой B, тотальным пространством E, проекцией $p : E \to B$ и структурной группой G. Тогда определено правое действие $R : E \times G \to E$. Пусть также g – псевдориманова метрика на E, инвариантная относительно действия R, причем любой слой $G_b = p^{-1}(b)$, $b \in B$, расслоения ξ с ограничением g_b метрики g является собственно римановым подмногообразием многообразия (E,g). Обозначим символом $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы Ли G.

Предложение 1. *В указанных условиях псевдориманово многообразие (E, g) индуцирует следующие объекты:*

- *G-связность H с формой связности ω на пространстве E расслоения ξ;*
- *псевдориманову метрику h на базе B;*
- *отображение γ, ставящее в соответствие каждой точке $v \in E$ евклидову метрику γ_v на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (левоинвариантную риманову метрику γ_v на структурной группе G).*

При этом для любых касательных векторов $\overline{X}, \overline{Y} \in T_vE$ и элементов $P, Q \in \mathfrak{g}$ и $a \in G$ имеют место равенства

$$g(\overline{X}, \overline{Y}) = \gamma_v(\omega(\overline{X}), \omega(\overline{Y})) + p^* h(\overline{X}, \overline{Y}), \tag{1}$$

$$\gamma_{v \cdot a}(P, Q) = \gamma_v(ad(a)P, ad(a)Q). \tag{2}$$

Верно и обратное. Если h – псевдориманова метрика на многообразии B, ω – форма некоторой G-связности H на E и семейство $\{\gamma_v | v \in E\}$ евклидовых метрик на $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию (2), то формула (1) определяет псевдориманову метрику g на E, инвариантную относительно действия группы G. При этом слои расслоения ξ пространственноподобны.

Пусть далее g – лоренцева метрика с сигнатурой $(- + \cdots +)$, а $\overline{O}$ – непрерывное времениподобное векторное поле на (E, g), инвариантное относительно действия R группы G. Тогда $\overline{O}$ проектируется на базу, причем проекция O является непрерывным времениподобным векторным полем на лоренцевом многообразии (B, h). Если O^* – горизонтальный лифт поля O относительно G-связности H, то $\overline{O}$ и O^* определяют одну и ту же временную ориентацию многообразия (E, g). Таким образом, без ограничения общности можно считать, что лоренцевы многообразия (E, g) и (B, h) ориентированы во времени векторными полями O^* и O соответственно. При этом (E, g) вместе с ориентацией O^* представляет собой расслоенное пространство-время, а (B, h) с ориентацией O – его базу.

Пример 1. Пусть m, ϵ, κ – положительные числа, $m^2 > \epsilon^2 + \kappa^2$, $r_+ = m + \sqrt{m^2 - \epsilon^2 - \kappa^2}$, $B_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 || x| > r_+\}$ и $B = \mathbb{R} \times B_3$. Рассмотрим единичную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, ее риманову метрику σ и форму площади Ω. Определены естественные проекции $t : B \to \mathbb{R}$, $r : B \to (r_+, \infty)$ и $s : B \to S^2$. Положим $\Delta = 1 - 2m/r - (\epsilon^2 + \kappa^2)/r^2$, $h = -\Delta(dt \otimes dt) + (dr \otimes dr)/\Delta + r^2\sigma$, $A = \epsilon dt/r$, $F_1 = dA$, $F_2 = \kappa(s^*\Omega)$ и $F = F_1 + F_2$. Тогда лоренцево многообразие (B, h) вместе с временной ориентацией $O = \partial/\partial t$ может интерпретироваться как внешнее пространство-время черной дыры Рейсснера-Нордстрема с массой m, электрическим зарядом ϵ и магнитным зарядом κ, при этом F – форма ее электромагнитного поля [7].

Так как $s : B \to S^2$ – гомотопическая эквивалентность, то получить нетривиальное главное расслоение с базой B и структурной группой G можно только при $\pi_1(G) \neq 0$. Поэтому выберем $G = U(1)$.

Положим $W = \mathbb{R} \times (r_+, \infty)$ и $E = W \times S^3$. Рассмотрим расслоение Хопфа $\chi = (S^3, q, S^2, G)$ и естественный диффеоморфизм $\alpha : W \times S^2 \to B$. Определим отображение $p : E \to B$ формулой $p(w, u) = \alpha(w, q(u))$. Тогда $\xi = (E, p, B, G)$ – главное расслоение.

На E имеется G-связность H с формой кривизны $p^*F/(4\pi\kappa)$. Пусть ω – ее форма связности, $\gamma_0 = dz \otimes dz$ – евклидова метрика на $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ и $f : B \to (0; +\infty)$ – гладкая функция. Для любой точки $v \in E$ положим $\gamma_v = f(p(v))\gamma_0$. Тогда имеет место (2) и формула (1) определяет инвариантную относительно действия R лоренцеву метрику g на E. Если O^* – горизонтальный лифт векторного поля O относительно связности H, то (E, g) вместе с O^* – расслоенное пространство-время.

Вернемся к общей ситуации. Хронологическое будущее $I^+(v)$ (причинное будущее $J^+(v)$) точки $v \in E$ состоит из точек $w \in E$, для которых существует гладкий направленный в будущее времениподобный (непространственноподобный) путь $x : [0, 1] \to E$ с началом $x(0) = v$ и концом $x(1) = w$. С помощью путей, направленных в прошлое, аналогично определяются хронологическое прошлое $I^-(v)$ и причинное прошлое $J^-(v)$ точки v. Такой же смысл имеют обозначения $I^+(b)$, $J^+(b)$, $I^-(b)$, $J^-(b)$ для точки b базового пространства-времени (B, h). Множества вида $I^+(v) \cap I^-(w)$, где $v, w \in E$, образуют базу топологии Александрова многообразия E.

Предложение 2. *Для любой точки $v \in E$ и ее проекции $b = p(v) \in B$ справедливы равенства:*

$$p(I^+(v)) = I^+(b), \quad p(I^-(v)) = I^-(b), \quad p(J^+(v)) = J^+(b), \quad p(J^-(v)) = J^-(b).$$

Пространство-время (E, g) считается хронологическим, если $v \notin I^+(v)$ для всех $v \in E$. Оно называется причинным, если не содержит различных точек v, w, для которых $w \in J^+(v) \cap J^-(v)$.

Причинное пространство-время (E, g) называется устойчиво причинным, если оно останется причинным при любых достаточно малых возмущениях лоренцевой метрики g. Критерием устойчивой причинности является существование глобальной функции времени $f : E \to \mathbb{R}$, которая характеризуется тем, что строго возрастает вдоль каждой направленной в будущее непространственноподобной кривой $x : (\alpha, \beta) \to E$.

Теорема 1. *Для любого расслоенного пространства-времени (E, g) из хронологичности, причинности или устойчивой причинности его базового пространства-времени (B, h) следует, что (E, g) обладает теми же свойствами.*

Открытое подмножество $U \subset E$ называется причинно выпуклым, если для произвольной непространственноподобной кривой лоренцева многообразия (E, g) ее пересечение с U либо пусто, либо связно. Пространство-время сильно причинно, если любая его точка обладает базой окрестностей, состоящей из причинно выпуклых множеств. Критерием сильной причинности пространства-времени является совпадение его топологии с топологией Александрова.

Теорема 2. *Пусть структурная группа G расслоения $\xi = (E, p, B, G)$ компактна и базовое пространство-время (B, h) сильно причинно. Тогда расслоенное пространство-время (E, g) также сильно причинно.*

Сильно причинное пространство-время (E, g) называется глобально гиперболическим, если для любых $v, w \in E$ пересечение $J^+(v) \cap J^-(w)$ либо пусто, либо компактно.

Это понятие также описывается в терминах поверхностей Коши. Пусть $S \subset E$ и для любой непродолжаемой непространственноподобной кривой $x : (\alpha, \beta) \to E$ найдется, причем единственное $t \in (\alpha, \beta)$ такое, что $x(t) \in S$. Пространство-время глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно содержит поверхность Коши. Согласно [8] поверхность Коши глобально гиперболического пространства-времени можно считать гладким подмногообразием коразмерности 1.

Теорема 3. *Пусть G – компактная группа Ли и (B, h) – глобально гиперболическое пространство-время с поверхностью Коши S. Тогда расслоенное пространство-время (E, g) глобально гиперболично, а $S^* = p^{-1}(S)$ – его поверхность Коши.*

Таким образом, три из рассмотренных причинных свойств всегда поднимаются с базы на тотальноее пространство расслоения ξ, а сильная причинность и глобальная гиперболичность поднимаются при дополнительном ограничении на структурную группу G. Но в приведенных выше результатах из книги [6], посвященных изучению искривленных произведений, утверждалось, что верно и обратное: все эти свойства и проектируются с произведения на базу. Возникает вопрос: распространяется ли это утверждение на случай расслоенного пространства-времени?

Пример 2. Рассмотрим многообразие $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и полярные координаты (r, φ) на B. Тогда $h_0 = -(1/2)(dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr)$ – лоренцева метрика на B, а $O = \partial/\partial r + \partial/\partial\varphi$ – времениподобное векторное поле, задающее временную ориентацию пространства-времени (B, h_0).

Если $G = \mathbb{R}$, $E = G \times B$ и $p : E \to B$ – естественная проекция, то четверка $\xi = (E, p, B, G)$ представляет собой главное расслоение со структурной группой G. На E будем использовать координаты (z, r, φ), где $z \in G$.

Положим $\omega = dz - dr - d\varphi$ и $\gamma_v = dz \otimes dz$ для всех $v \in E$. Тогда существует G-связность H на E с формой связности ω. Посредством формулы (1) объекты h_0, γ_v и ω определяют лоренцеву метрику g_0 на E, инвариантную относительно действия группы G. Горизонтальный лифт векторного поля O относительно G-связности H имеет вид $O^* = 2\partial/\partial z + \partial/\partial r + \partial/\partial\varphi$. При этом лоренцево многообразие (E, g_0) вместе с заданной векторным полем O^* временной ориентацией на нем становится расслоенным пространством-временем. Многообразие (B, h_0) с ориентацией O является его базой.

Предложение 3. *Расслоенное пространство-время (E, g) глобально гиперболично с поверхностью Коши $S = \{(z, r, \varphi) | z = 0\}$ и глобальной функцией времени $f(z, r, \varphi) = z$. Вместе с тем, его база (B, h) содержит замкнутую изотропную кривую и потому не является причинным пространством-временем.*

Пример 3. Рассмотрим те же объекты, что и в примере 2, и для положительного действительного числа ε положим $h_\varepsilon = h_0 - \varepsilon d\varphi \otimes d\varphi$. Посредством формулы (1) определим соответствующую h_ε лоренцеву метрику g_ε на E. Получим новое расслоенное пространство время (E, g_ε) с базой (B, h_ε) с теми же временными ориентациями O^* и O соответственно.

Предложение 4. *Для достаточно малых ε расслоенное пространство-время (E, g_ε) причинно. Но его база (B, h_ε) при любом $\varepsilon > 0$ содержит замкнутую времениподобную кривую и потому не является хронологическим пространством-временем.*

Глобальная гиперболичность является самым сильным причинным свойством, а хронологичность – самым слабым. Поэтому из рассмотренных примеров и предложений 3 и 4 следует ответ на последний вопрос.

Теорема 4. *В общем случае ни одно причинное свойство из раздела 3.2 книги [6] не обязано проектироваться с расслоенного пространства-времени на его базу.*

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

Литература

1. Яковлев Е. И. *Двухконцевая задача для некоторого класса многозначных функционалов* // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24. – № 4. – С. 63–73.

2. Яковлев Е. И. *Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов* // Функц. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30. – № 1. – С. 89–92.

3. Яковлев Е. И. *Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами* // Современная математика. Фундаментальные направления – 2007. – Т. 22. – С. 100–126.

4. Яковлев Е. И. *Двухточечные краевые задачи в релятивистской динамике* // Матем. заметки – 1996. – Т. 59. – № 3. – С. 437–449.

5. Яковлев Е. И. *О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа* // Алгебра и анализ – 1997. – Т. 9. – № 2. – С. 256–271.

6. Beem J. K., Ehrlich P. E., Easley K. L. *Global Lorentzian Geometry.* – New-York: Marcel Dekker, 1996. – 636 p.

7. Новиков И. Д., Фролов В. П. *Физика черных дыр.* – М: Наука, 1986. – 328 с.

8. Bernal A. N., Sanchez M. *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem* // Commun. math. Phys. – 2003. – V. 243. – P. 461–470.

ON THE GEOMETRY OF FIBERED PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

T.A. Gonchar, E.I. Yakovlev

The relations between the geometric properties of fibered pseudo-Riemannian manifolds and their bases are investigated. Special attention is paid to Lorentzian manifolds and causality conditions.

Keywords: principal bundle, G-connection, lorentzian manifold, space-time, causality condition

Научное издание

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ - 2019

Сборник трудов
Международной научной конференции
Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - **А.А. Агафонов**
Техническая редакция, набор и верстка: **А.А. Агафонов, А.А. Попов, К.А. Митничук, П.Н. Иваньшин**
Оформление обложки - **А.А. Агафонов**

Подписано в печать 27.08.2019
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 10.
Тираж 100 экз. Заказ 152/8

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел: (843) 233-73-59, 233-73-28