

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Региональный научно-образовательный математический центр КФУ  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

---

## **СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ - 2019**

**Сборник трудов  
Международной научной конференции  
Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.**

---



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2019

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9  
ББК 22.15  
С56

**Международная конференция «Современная геометрия и её приложения - 2019»:** сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2019. – 170 с.

**ISBN 978-5-00130-198-1**

В сборнике трудов опубликованы 0 статьи, посвященные современным проблемам геометрии и её приложений.

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области геометрии и ее приложений.

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9  
ББК 22.15

**ISBN 978-5-00130-198-1**

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>А.В. Аминова, М.Н. Сабитова.</i> О проективных движениях псевдоримановых многообразий . . . . .	6
<i>А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов.</i> О проективных движениях жестких $h$ -пространств	6
<i>А. Артикбаев.</i> Пятая геометрия на плоскости . . . . .	7
<i>А.В. Багаев, Н.И. Жукова.</i> Характеристика Эйлера–Сатаки компактных аффинных орбифолдов . . . . .	9
<i>Л.Н. Бакирова, В.В. Шурыгин (мл.).</i> Симметрии уравнения Блэка–Шоулза–Мертон для европейских опционов . . . . .	16
<i>В.В. Балащенко.</i> Канонические почти симплектические структуры на однородных $\Phi$ -пространствах . . . . .	18
<i>М.Б. Банару, Г.А. Банару.</i> О почти контактной метрической структуре косимплектического типа на гиперповерхности келерова многообразия . . . . .	22
<i>К.В. Башашина.</i> Ассоциированные проективная, центропроективная, аффинно-групповая, линейная и аффинная связности . . . . .	26
<i>О.О. Белова.</i> Редукция связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей . . . . .	30
<i>V.N. Berestovskii, Yu.G. Nikonorov.</i> Finite homogeneous metric spaces . . . . .	33
<i>А.И. Булыгин.</i> Геометрия подобно однородных $\mathbb{R}$ -деревьев . . . . .	42
<i>С.В. Галаев.</i> Плоские полу-метрические кососимметрические связности на субримановых многообразиях . . . . .	46
<i>Т.А. Гончар, Е.И. Яковлев.</i> О геометрии расслоенных псевдоримановых многообразий . . . . .	50
<i>V.S. Dryuma.</i> On 3D-manifolds determined by the second order ODE's . . . . .	55
<i>Н.М. Ибодуллаева.</i> Обобщенная условная кривизна поверхности . . . . .	60
<i>Ю.Г. Игнатьев.</i> Метод самосогласованного поля и макроскопические уравнения Эйнштейна для ранней Вселенной со скалярным полем . . . . .	62
<i>Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина.</i> Дифференциальная геометрия кривых в системе компьютерной математики MAPLE . . . . .	68
<i>М.О. Katanaev, B.O. Volkov.</i> Point disclinations in the Chern–Simons geometric theory of defects . . . . .	71
<i>П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов.</i> Однородные инвариантные солитоны Риччи на трехмерных группах Ли с векторным кручением . . . . .	72
<i>С.В. Клепикова, О.П. Хромова.</i> Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля . . . . .	74
<i>С.Б. Климентов.</i> Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$ . . . . .	76
<i>А. Kocherova, I. Zhdanovskiy.</i> Geometry of commutators . . . . .	81
<i>А.В. Кулешов.</i> О геометрии орбит пространства центропроективных реперов .	84
<i>М.В. Куркина, В.В. Славский.</i> Преобразование Лежандра конформно-выпуклых функций . . . . .	88
<i>Л.П. Ладыненко.</i> Геометрическая характеристика специальных почти геодезических отображений пространств аффинной связности с кручением . . . . .	91

<i>Д.С. Лисенков, Н.Р. Хуснутдинов, А.А. Попов.</i> Поляризация вакуума квантованного скалярного поля при ненулевой температуре на фоне кротовой норы с бесконечно короткой горловиной . . . . .	93
<i>М.Х. Люлинский.</i> Клиффордовы трюки в дифференциальных уравнениях . . .	95
<i>Й. Микеш, И. Гинтерлейтнер, Н.И. Гусева.</i> Конформные отображения $n$ -мерных пространств Эйнштейна с $n$ полными изотропными геодезическими . . . . .	97
<i>А.А. Малюгина, В.В. Шурьгин.</i> Псевдогруппа голономии многообразия над алгеброй дуальных чисел и некоторые ее применения . . . . .	99
<i>А.В. Марьин, А.А. Попов.</i> Решения с плоской симметрией в $f(R)$ гравитации с дополнительными измерениями . . . . .	101
<i>О.И. Мохов.</i> Метрики диагональной кривизны и их приложения . . . . .	107
<i>А.Р. Нурбаев.</i> Индикатриса поверхностей в четырехмерном галилеевом пространстве . . . . .	111
<i>О.М. Омелян.</i> О пучке связностей 4-го типа, индуцированного композиционным оснащением распределения плоскостей . . . . .	114
<i>А.А. Роров.</i> Evolution of subspaces in $f(R)$ multidimensional gravity. . . . .	117
<i>Ю.И. Попов.</i> Дифференциально-геометрические структуры многообразия $P_n^0(\mathbb{H})$ . . . . .	118
<i>А.М. Pupasov-Maksimov.</i> Coupling and decoupling of matrix Schrödinger-Hill operators by isospectral flows . . . . .	120
<i>А.К. Рыбников, К.В. Семенов.</i> О геометрических структурах, ассоциированных с дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка	124
<i>Н.А. Рязанов.</i> Новый вывод дифференциальных уравнений тензоров кривизны фундаментально-групповой и аффинной связностей . . . . .	127
<i>А.А. Сабыканов, Й. Микеш, П. Пешка.</i> О рекуррентных проективно евклидовых пространствах, отличных от полусимметрических. . . . .	129
<i>Г.А. Серякин.</i> О проективных движениях четырехмерных многообразий специального вида . . . . .	132
<i>Е.Н. Синюкова.</i> Элементы геометрии касательного расслоения пространства аффинной связности, индуцированной теорией приближений базового пространства . . . . .	133
<i>В.В. Славский, В.А. Самарин, О.В. Самарина.</i> Круговая три-ткань цифрового изображения и её инварианты . . . . .	135
<i>Ж.А. Собиров, Т.Н. Сафаров.</i> Внутренняя геометрия поверхности в галилеевом пространстве . . . . .	139
<i>Е.Н. Сосов.</i> О действиях с сохранением пучка прямых на пространстве Лобачевского групп вещественных чисел . . . . .	140
<i>И.С. Стрельцова.</i> Проективные инварианты прямолинейных 3-тканей . . . . .	142
<i>В.И. Субботин.</i> О перечислении выпуклых многогранников с правильными гранями и ромбическими вершинами . . . . .	145
<i>А.Я. Султанов.</i> О максимальной размерности алгебр Ли аффинных векторных полей вещественных реализаций голоморфных линейных связностей на касательных расслоениях произвольного порядка . . . . .	147
<i>Б.М. Султанов.</i> Исследование параболических точек поверхности в галилеевом пространстве . . . . .	149

---

<i>Г.А. Султанова.</i> Об условиях интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений с несимметрической связностью полного лифта . . . . .	151
<i>П.И. Трошин.</i> О регулярном замощении плоскости Лобачевского . . . . .	155
<i>Е.В. Тюриков.</i> Геометрический критерий квазикорректности для одного класса граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек . . . . .	158
<i>А.М. Филин.</i> Локальная геометрия пространства Громова–Хаусдорфа и вполне несимметричные конечные метрические пространства . . . . .	161
<i>Ю.И. Шевченко, Е.В. Скрьдлова.</i> Интерпретация связности Картана с помощью двухъярусной главной связности . . . . .	166

УДК 514.762; 514.82

## О ГЕОМЕТРИИ РАССЛОЕННЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т.А. Гончар<sup>1</sup>, Е.И. Яковлев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [gonchar.t.a@yandex.ru](mailto:gonchar.t.a@yandex.ru); Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

<sup>2</sup> [eyakovlev@hse.ru](mailto:eyakovlev@hse.ru); Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" Факультет информатики, математики и компьютерных наук

*Исследуются связи между геометрическими свойствами расслоенных псевдоримановых многообразий и их баз. Основное внимание уделяется лоренцевым многообразиям и условиям причинности.*

**Ключевые слова:** главное расслоение, G-связность, лоренцево многообразие, пространство-время, условие причинности.

Геометрия расслоенных многообразий имеет многочисленные применения. Например, собственно римановы многообразия такого типа оказались полезными при изучении динамики механических систем с гироскопическими силами, для которых функционал действия многозначен [1]–[3]. Расслоенные лоренцевы многообразия применяются в теоретической физике при построении моделей типа Калуцы-Клейна. С их помощью также оказалось возможным исследование двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа [4], [5]. Очевидно, этот список приложений может быть существенно расширен.

В римановой геометрии в целом любая теорема доказывается в предположении о полноте изучаемого многообразия. В глобальной лоренцевой геометрии геодезическая полнота уже не играет такой важной роли. Вместо нее используется целый ряд ограничений, называемых условиями причинности. К тому же, все эти условия допускают физические интерпретации. Поэтому важно иметь как можно больше критериев их выполнения в конкретных ситуациях.

В [6] с этой целью рассмотрен важный класс многообразий, являющихся искривленными произведениями  $(E, g) = (B, h) \times_f (G, \gamma)$  лоренцевых многообразий  $(B, h)$  на полные римановы многообразия  $(G, \gamma)$  с искривляющими функциями  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Показано, что многие условия причинности для многообразий  $(E, g)$  и  $(B, h)$  выполняются или нет одновременно.

Расслоенное лоренцево многообразие  $(E, g)$  представляет собой существенно более сложную конструкцию. Но в случае пространственноподобности слоев оно также индуцирует на базе  $B$  лоренцеву метрику  $h$ . Возникает естественный вопрос: останется ли в этой ситуации справедливым указанный выше результат из книги [6]? Обсуждению этой проблемы и посвящен данный доклад.

Итак, пусть  $\xi = (E, p, B, G)$  – гладкое главное расслоение с базой  $B$ , тотальным пространством  $E$ , проекцией  $p : E \rightarrow B$  и структурной группой  $G$ . Тогда определено правое действие  $R : E \times G \rightarrow E$ . Пусть также  $g$  – псевдориманова метрика на  $E$ , инвариантная относительно действия  $R$ , причем любой слой  $G_b = p^{-1}(b)$ ,  $b \in B$ , расслоения  $\xi$  с ограничением  $g_b$  метрики  $g$  является собственно римановым подмногообразием многообразия  $(E, g)$ . Обозначим символом  $\mathfrak{g}$  алгебру Ли группы Ли  $G$ .

**Предложение 1.** В указанных условиях псевдориманово многообразии  $(E, g)$  индуцирует следующие объекты:

- $G$ -связность  $H$  с формой связности  $\omega$  на пространстве  $E$  расслоения  $\xi$ ;
- псевдориманову метрику  $h$  на базе  $B$ ;
- отображение  $\gamma$ , ставящее в соответствие каждой точке  $v \in E$  евклидову метрику  $\gamma_v$  на алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  (левоинвариантную риманову метрику  $\gamma_v$  на структурной группе  $G$ ).

При этом для любых касательных векторов  $\bar{X}, \bar{Y} \in T_v E$  и элементов  $P, Q \in \mathfrak{g}$  и  $a \in G$  имеют место равенства

$$g(\bar{X}, \bar{Y}) = \gamma_v(\omega(\bar{X}), \omega(\bar{Y})) + p^* h(\bar{X}, \bar{Y}), \quad (1)$$

$$\gamma_{v \cdot a}(P, Q) = \gamma_v(ad(a)P, ad(a)Q). \quad (2)$$

Верно и обратное. Если  $h$  – псевдориманова метрика на многообразии  $B$ ,  $\omega$  – форма некоторой  $G$ -связности  $H$  на  $E$  и семейство  $\{\gamma_v | v \in E\}$  евклидовых метрик на  $\mathfrak{g}$  удовлетворяет условию (2), то формула (1) определяет псевдориманову метрику  $g$  на  $E$ , инвариантную относительно действия группы  $G$ . При этом слои расслоения  $\xi$  пространственноподобны.

Пусть далее  $g$  – лоренцева метрика с сигнатурой  $(- + \dots +)$ , а  $\bar{O}$  – непрерывное времениподобное векторное поле на  $(E, g)$ , инвариантное относительно действия  $R$  группы  $G$ . Тогда  $\bar{O}$  проецируется на базу, причем проекция  $O$  является непрерывным времениподобным векторным полем на лоренцевом многообразии  $(B, h)$ . Если  $O^*$  – горизонтальный лифт поля  $O$  относительно  $G$ -связности  $H$ , то  $\bar{O}$  и  $O^*$  определяют одну и ту же временную ориентацию многообразия  $(E, g)$ . Таким образом, без ограничения общности можно считать, что лоренцевы многообразия  $(E, g)$  и  $(B, h)$  ориентированы во времени векторными полями  $O^*$  и  $O$  соответственно. При этом  $(E, g)$  вместе с ориентацией  $O^*$  представляет собой расслоенное пространство-время, а  $(B, h)$  с ориентацией  $O$  – его базу.

**Пример 1.** Пусть  $m, \epsilon, \kappa$  – положительные числа,  $m^2 > \epsilon^2 + \kappa^2$ ,  $r_+ = m + \sqrt{m^2 - \epsilon^2 - \kappa^2}$ ,  $B_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 | |x| > r_+\}$  и  $B = \mathbb{R} \times B_3$ . Рассмотрим единичную сферу  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , ее риманову метрику  $\sigma$  и форму площади  $\Omega$ . Определены естественные проекции  $t: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r: B \rightarrow (r_+, \infty)$  и  $s: B \rightarrow S^2$ . Положим  $\Delta = 1 - 2m/r - (\epsilon^2 + \kappa^2)/r^2$ ,  $h = -\Delta(dt \otimes dt) + (dr \otimes dr)/\Delta + r^2\sigma$ ,  $A = \epsilon dt/r$ ,  $F_1 = dA$ ,  $F_2 = \kappa(s^*\Omega)$  и  $F = F_1 + F_2$ . Тогда лоренцево многообразие  $(B, h)$  вместе с временной ориентацией  $O = \partial/\partial t$  может интерпретироваться как внешнее пространство-время черной дыры Рейсснера-Нордстрема с массой  $m$ , электрическим зарядом  $\epsilon$  и магнитным зарядом  $\kappa$ , при этом  $F$  – форма ее электромагнитного поля [7].

Так как  $s: B \rightarrow S^2$  – гомотопическая эквивалентность, то получить нетривиальное главное расслоение с базой  $B$  и структурной группой  $G$  можно только при  $\pi_1(G) \neq 0$ . Поэтому выберем  $G = U(1)$ .

Положим  $W = \mathbb{R} \times (r_+, \infty)$  и  $E = W \times S^3$ . Рассмотрим расслоение Хопфа  $\chi = (S^3, q, S^2, G)$  и естественный диффеоморфизм  $\alpha : W \times S^2 \rightarrow B$ . Определим отображение  $p : E \rightarrow B$  формулой  $p(w, u) = \alpha(w, q(u))$ . Тогда  $\xi = (E, p, B, G)$  – главное расслоение.

На  $E$  имеется  $G$ -связность  $H$  с формой кривизны  $p^*F/(4\pi k)$ . Пусть  $\omega$  – ее форма связности,  $\gamma_0 = dz \otimes dz$  – евклидова метрика на  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$  и  $f : B \rightarrow (0; +\infty)$  – гладкая функция. Для любой точки  $v \in E$  положим  $\gamma_v = f(p(v))\gamma_0$ . Тогда имеет место (2) и формула (1) определяет инвариантную относительно действия  $R$  лоренцеву метрику  $g$  на  $E$ . Если  $O^*$  – горизонтальный лифт векторного поля  $O$  относительно связности  $H$ , то  $(E, g)$  вместе с  $O^*$  – расслоенное пространство-время.

Вернемся к общей ситуации. Хронологическое будущее  $I^+(v)$  (причинное будущее  $J^+(v)$ ) точки  $v \in E$  состоит из точек  $w \in E$ , для которых существует гладкий направленный в будущее времениподобный (непространственноподобный) путь  $x : [0, 1] \rightarrow E$  с началом  $x(0) = v$  и концом  $x(1) = w$ . С помощью путей, направленных в прошлое, аналогично определяются хронологическое прошлое  $I^-(v)$  и причинное прошлое  $J^-(v)$  точки  $v$ . Такой же смысл имеют обозначения  $I^+(b)$ ,  $J^+(b)$ ,  $I^-(b)$ ,  $J^-(b)$  для точки  $b$  базового пространства-времени  $(B, h)$ . Множества вида  $I^+(v) \cap I^-(w)$ , где  $v, w \in E$ , образуют базу топологии Александрова многообразия  $E$ .

**Предложение 2.** Для любой точки  $v \in E$  и ее проекции  $b = p(v) \in B$  справедливы равенства:

$$p(I^+(v)) = I^+(b), \quad p(I^-(v)) = I^-(b), \quad p(J^+(v)) = J^+(b), \quad p(J^-(v)) = J^-(b).$$

Пространство-время  $(E, g)$  считается хронологическим, если  $v \notin I^+(v)$  для всех  $v \in E$ . Оно называется причинным, если не содержит различных точек  $v, w$ , для которых  $w \in J^+(v) \cap J^-(v)$ .

Причинное пространство-время  $(E, g)$  называется устойчиво причинным, если оно останется причинным при любых достаточно малых возмущениях лоренцевой метрики  $g$ . Критерием устойчивой причинности является существование глобальной функции времени  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , которая характеризуется тем, что строго возрастает вдоль каждой направленной в будущее непространственноподобной кривой  $x : (\alpha, \beta) \rightarrow E$ .

**Теорема 1.** Для любого расслоенного пространства-времени  $(E, g)$  из хронологичности, причинности или устойчивой причинности его базового пространства-времени  $(B, h)$  следует, что  $(E, g)$  обладает теми же свойствами.

Открытое подмножество  $U \subset E$  называется причинно выпуклым, если для произвольной непространственноподобной кривой лоренцева многообразия  $(E, g)$  ее пересечение с  $U$  либо пусто, либо связно. Пространство-время сильно причинно, если любая его точка обладает базой окрестностей, состоящей из причинно выпуклых множеств. Критерием сильной причинности пространства-времени является совпадение его топологии с топологией Александрова.

**Теорема 2.** Пусть структурная группа  $G$  расслоения  $\xi = (E, p, B, G)$  компактна и базовое пространство-время  $(B, h)$  сильно причинно. Тогда расслоенное пространство-время  $(E, g)$  также сильно причинно.



Сильно причинное пространство-время  $(E, g)$  называется глобально гиперболическим, если для любых  $v, w \in E$  пересечение  $J^+(v) \cap J^-(w)$  либо пусто, либо компактно.

Это понятие также описывается в терминах поверхностей Коши. Пусть  $S \subset E$  и для любой непродолжаемой непространственноподобной кривой  $x : (\alpha, \beta) \rightarrow E$  найдется, причем единственное  $t \in (\alpha, \beta)$  такое, что  $x(t) \in S$ . Пространство-время глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно содержит поверхность Коши. Согласно [8] поверхность Коши глобально гиперболического пространства-времени можно считать гладким подмногообразием коразмерности 1.

**Теорема 3.** Пусть  $G$  – компактная группа Ли и  $(B, h)$  – глобально гиперболическое пространство-время с поверхностью Коши  $S$ . Тогда расслоенное пространство-время  $(E, g)$  глобально гиперболично, а  $S^* = p^{-1}(S)$  – его поверхность Коши.

Таким образом, три из рассмотренных причинных свойств всегда поднимаются с базы на тотальное пространство расслоения  $\xi$ , а сильная причинность и глобальная гиперболичность поднимаются при дополнительном ограничении на структурную группу  $G$ . Но в приведенных выше результатах из книги [6], посвященных изучению искривленных произведений, утверждалось, что верно и обратное: все эти свойства и проектируются с произведения на базу. Возникает вопрос: распространяется ли это утверждение на случай расслоенного пространства-времени?

Пример 2. Рассмотрим многообразие  $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  и полярные координаты  $(r, \varphi)$  на  $B$ . Тогда  $h_0 = -(1/2)(dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr)$  – лоренцева метрика на  $B$ , а  $O = \partial/\partial r + \partial/\partial \varphi$  – времениподобное векторное поле, задающее временную ориентацию пространства-времени  $(B, h_0)$ .

Если  $G = \mathbb{R}$ ,  $E = G \times B$  и  $p : E \rightarrow B$  – естественная проекция, то четверка  $\xi = (E, p, B, G)$  представляет собой главное расслоение со структурной группой  $G$ . На  $E$  будем использовать координаты  $(z, r, \varphi)$ , где  $z \in G$ .

Положим  $\omega = dz - dr - d\varphi$  и  $\gamma_v = dz \otimes dz$  для всех  $v \in E$ . Тогда существует  $G$ -связность  $H$  на  $E$  с формой связности  $\omega$ . Посредством формулы (1) объекты  $h_0, \gamma_v$  и  $\omega$  определяют лоренцеву метрику  $g_0$  на  $E$ , инвариантную относительно действия группы  $G$ . Горизонтальный лифт векторного поля  $O$  относительно  $G$ -связности  $H$  имеет вид  $O^* = 2\partial/\partial z + \partial/\partial r + \partial/\partial \varphi$ . При этом лоренцево многообразие  $(E, g_0)$  вместе с заданным векторным полем  $O^*$  временной ориентацией на нем становится расслоенным пространством-временем. Многообразие  $(B, h_0)$  с ориентацией  $O$  является его базой.

**Предложение 3.** Расслоенное пространство-время  $(E, g)$  глобально гиперболично с поверхностью Коши  $S = \{(z, r, \varphi) | z = 0\}$  и глобальной функцией времени  $f(z, r, \varphi) = z$ . Вместе с тем, его база  $(B, h)$  содержит замкнутую изотропную кривую и потому не является причинным пространством-временем.

Пример 3. Рассмотрим те же объекты, что и в примере 2, и для положительного действительного числа  $\varepsilon$  положим  $h_\varepsilon = h_0 - \varepsilon d\varphi \otimes d\varphi$ . Посредством формулы (1) определим соответствующую  $h_\varepsilon$  лоренцеву метрику  $g_\varepsilon$  на  $E$ . Получим новое расслоенное пространство-время  $(E, g_\varepsilon)$  с базой  $(B, h_\varepsilon)$  с теми же временными ориентациями  $O^*$  и  $O$  соответственно.

**Предложение 4.** Для достаточно малых  $\varepsilon$  расслоенное пространство-время  $(E, g_\varepsilon)$  причинно. Но его база  $(B, h_\varepsilon)$  при любом  $\varepsilon > 0$  содержит замкнутую времени-подобную кривую и потому не является хронологическим пространством-временем.

Глобальная гиперболичность является самым сильным причинным свойством, а хронологичность – самым слабым. Поэтому из рассмотренных примеров и предложений 3 и 4 следует ответ на последний вопрос.

**Теорема 4.** В общем случае ни одно причинное свойство из раздела 3.2 книги [6] не обязано проектироваться с расслоенного пространства-времени на его базу.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

## Литература

1. Яковлев Е.И. Двухконцевая задача для некоторого класса многозначных функционалов // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24. – № 4. – С. 63–73.
2. Яковлев Е.И. Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов // Функц. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30. – № 1. – С. 89–92.
3. Яковлев Е.И. Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами // Современная математика. Фундаментальные направления – 2007. – Т. 22. – С. 100–126.
4. Яковлев Е.И. Двухточечные краевые задачи в релятивистской динамике // Матем. заметки – 1996. – Т. 59. – № 3. – С. 437–449.
5. Яковлев Е.И. О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа // Алгебра и анализ – 1997. – Т. 9. – № 2. – С. 256–271.
6. Beem J.K., Ehrlich P.E., Easley K.L. *Global Lorentzian Geometry*. – New-York: Marcel Dekker, 1996. – 636 p.
7. Новиков И. Д., Фролов В. П. *Физика черных дыр*. – М: Наука, 1986. – 328 с.
8. Bernal A.N., Sanchez M. *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem* // Commun. math. Phys. – 2003. – V. 243. – P. 461–470.

## ON THE GEOMETRY OF FIBERED PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

T.A. Gonchar, E.I. Yakovlev

*The relations between the geometric properties of fibered pseudo-Riemannian manifolds and their bases are investigated. Special attention is paid to Lorentzian manifolds and causality conditions.*

**Keywords:** principal bundle, G-connection, lorentzian manifold, space-time, causality condition

*Научное издание*

**СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ - 2019**

**Сборник трудов  
Международной научной конференции  
Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - **А.А. Агафонов**  
Техническая редакция, набор и верстка: **А.А. Агафонов, А.А. Попов,  
К.А. Митничук, П.Н. Иваньшин**  
Оформление обложки - **А.А. Агафонов**

Подписано в печать 27.08.2019  
Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 10.  
Тираж 100 экз. Заказ 152/8

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37  
тел: (843) 233-73-59, 233-73-28