Алгебра

Проверка остаточных знаний.
"Алгебра". Осенний семестр 2019-2020 уч. года.
Группы БПМ191—БПМ195.

1. Тест

(1) Используя формулу Кардано, найти вещественный корень кубического многочлена $x^3 + 6x - 2$.
(2) При каком a многочлен $x^3 + ax + 2$ имеет кратный корень и чему он равен?
(3) Ассоциативна ли бинарная операция на $\mathbb{Z}$: $x \circ y = x + |y|$?
(4) Группу $\mathbb{Z}_{36}^*$ разложить в прямую сумму групп $\mathbb{Z}_k$, найти порядок группы, максимальный порядок элемента в ней и перечислить (в прямой сумме) элементы порядка 3.
(5) Используя формулу Бернсайда, найти число различных раскрасок вершин правильного шестиугольника в 2 цвета: 3 вершины белые и 3 — черные (группа D_6).

2. Вариант 1

(1) Используя формулу Кардано, найти вещественный корень кубического многочлена $x^3 - 6x + 6$.
(2) При каком a многочлен $x^3 + ax^2 - 1$ имеет кратный корень и чему он равен?
(3) Ассоциативна ли бинарная операция на $\mathbb{Z}$: $x \circ y = |x - y|$?
(4) Группу $\mathbb{Z}_{33}^*$ разложить в прямую сумму групп $\mathbb{Z}_k$, найти порядок группы, максимальный порядок элемента в ней и перечислить (в прямой сумме) элементы порядка 5.
(5) Используя формулу Бернсайда, найти число различных раскрасок вершин правильного шестиугольника в 3 цвета: 2 вершины красные, 2 — синие и 2 — зеленые (группа D_6).

3. Вариант 2

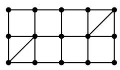
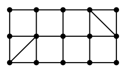
(1) Используя формулу Кардано, найти вещественный корень кубического многочлена $x^3 + 9x + 6$.
(2) При каком a многочлен $x^3 + ax + a$ имеет кратный корень и чему он равен?
(3) Ассоциативна ли бинарная операция на $\mathbb{Z}$: $x \circ y = \max(x, -y)$?
(4) Группу $\mathbb{Z}_{42}^*$ разложить в прямую сумму групп $\mathbb{Z}_k$, найти порядок группы, максимальный порядок элемента в ней и перечислить (в прямой сумме) элементы порядка 2.
(5) Используя формулу Бернсайда, найти число различных раскрасок вершин правильного восьмиугольника в 2 цвета: 4 вершины белые и 4 — черные (группа D_8).

Дискретная математика

Проверка остаточных знаний.
"Дискретная математика". Весенний семестр 2018-2019 уч. года.
Группы БПМ181—БПМ185.

1. Тест

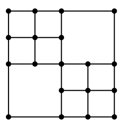
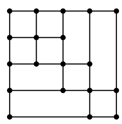
(1) Сколько имеется семизначных чисел таких, что: а) в их записи нет цифры 0; б) в их записи присутствует 4 нечетные цифры — 3 различные и 3 четные цифры — 2 различные?
(2) Найти коэффициент при x^8 в разложении $(1 - 2x + x^3)^9$.
(3) Используя формулу Бернсайда, найти число различных раскрасок ребер правильной треугольной призмы в 3 цвета: 2 ребра красные, 2 — синие, 2 — зеленые.
(4) При каком a многочлен $x^3 + ax^2 + x - a$ имеет кратный корень.
(5) Изоморфны ли графы


и


(6) У карты 6 вершин и 6 стран. Какое максимальное количесиво вершин степени 4 она может иметь? Нарисовать.

2. Вариант 1

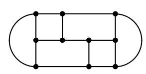
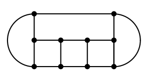
(1) Сколькими способами можно поставить 4 крестика в прямоугольнике 5×6 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было не более одного крестика?
(2) Найти коэффициент при x^9 в разложении $(1 - x - 2x^3)^{10}$.
(3) Используя формулу Бернсайда, найти число различных раскрасок вершин куба в 3 цвета: 2 вершины красные, 2 — синие, 4 — зеленые.
(4) При каком a многочлен $x^4 + ax^3 - 2$ имеет кратный корень?
(5) Изоморфны ли графы


и


(6) У карты 8 вершин и 12 ребер. Все ее страны — треугольники и пятиугольники. Найти число треугольников. Нарисовать.

3. Вариант 2

(1) Сколькими способами можно поставить 6 крестиков в прямоугольнике 4×6 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце был хотя бы один крестик?
(2) Найти коэффициент при x^{10} в разложении $(2 - x + x^3)^9$.
(3) Используя формулу Бернсайда, найти число различных раскрасок ребер куба в 2 цвета: 6 ребер белые, 6 — черные.
(4) При каком a многочлен $x^4 + ax + 3$ имеет кратный корень?
(5) Изоморфны ли графы


и


(6) У карты 7 вершин и 7 стран. Степени всех ее вершин — 3 или 4. Найти число вершин степени 3. Нарисовать.

Дифференциальные уравнения

Вариант №0

1. Решите данную систему, исследуйте её нулевое решение на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2z - y. \end{cases}$$

Решить уравнения:

$$y'' - 2y' = xe^{2x} + 2e^{x} \sin 3x;$$

$$3. \quad \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

4. Постройте фазовый портрет системы, найдите положения равновесия системы, определите их тип и исследуйте положения равновесия на устойчивость:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 8x - 2y. \end{cases}$$

Компьютерное моделирование стохастических систем

Вариант 0

1. Для системы массового обслуживания с параметрами:

- число каналов 2,
- число мест в очереди 0,
- интервалы между моментами прихода требований во входном потоке имеют экспоненциальный закон распределения с параметром 0.1,
- время обслуживания распределено по закону Эрланга 3-го порядка с параметром 0.04,
- интервал функционирования [0,100],

построить оценку среднего числа потерянных требований (нарисовать блок-схему с пояснениями, количество траекторий N=1000).

2. Для системы массового обслуживания с параметрами:

- число каналов 4,
- число мест в очереди 0,
- интервалы между моментами прихода требований во входном потоке имеют равномерное распределение на $[0,6]$,
- время обслуживания распределено по закону Эрланга 2-го порядка с параметром 0.05,
- интервал функционирования [0,150],

построить оценку вероятности потери хотя бы одного требования (нарисовать блок-схему с пояснениями, количество траекторий N=2000).

3. Нарисовать блок-схему (с пояснениями) алгоритма моделирования дискретной случайной величины X с распределением

X	2	3	4
	0.7	0.2	0.1

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Вариант 1

Задание 1 (1 балл)

Вычислить площадь треугольника, стороны которого лежат на прямых L1, L2 и L3, заданных следующими уравнениями: L1: 7x-5y+7=0; L2: 8x+3y-53=0; L3: x+8y+1=0.

Задание 2 (2 балла)

Дана пирамида с вершинами $A_1(3;5;-1)$, $A_2(11;-6;6)$, $A_3(9;-13;14)$, $A_4(1;0;2)$. Найти:

1. Длину ребра A_1 A_2;
2. Угол между ребрами A_1 A_2 и A_2 A_3;
3. Площадь грани A_1 A_2 A_3;
4. Уравнение плоскости A_1 A_2 A_3;
5. Объем пирамиды.

Задание 3 (1 балл)

Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Задание 4 (1 балл)

Найти матрицу X, удовлетворяющую матричному уравнению:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Задание 5 (2 балла)

Найти ранг, ядро и образ линейного оператора, заданного в некотором базисе следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 6 (2 балла)

Пусть в некотором базисе трехмерного линейного пространства заданы векторы: f1=(2,6,5), f2=(5,3,-2), f3=(7,4,-3) и x=(2,-1,1). Доказать, что векторы f1, f2 и f3 образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе.

Задание 7 (1 балл)

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-\ z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$$

Решить методами Крамера и Гаусса.

Математическая теория страхования

Вариант 0

1. Пусть имеются две однородные группы клиентов численностью, соответственно, 1000 и 4000. Клиенты первой группы имеют вероятность страхового события $p = 0.02$, распределение страховых выплат

X_i^0	2	3	4
	0.7	0.2	0.1

Для второй группы: $p = 0.005$, распределение выплат

X_i^0	3	4
	0.5	0.5

Найти вероятность того, что суммарный ущерб не превысит 400.

2. Пусть $u(y) = y^{1/2}$ -- функция полезности для клиента, у которого вероятность страхового случая $p = 0.5$, а размер страховых выплат имеет равномерное распределение на $[0,100]$.

Клиент имеет возможность отказаться от страхования либо застраховать свой риск в компании, где предлагается безусловная франшиза с уровнем 10, взнос 21. Какой вариант ему следует выбрать, если начальный капитал равен 150 ?

3. Пусть для однородной группы из $n = 1000$ клиентов вероятность страхового случая $p = 0.1$, размер страховых выплат имеет экспоненциальное распределение $F(x) = 1 - e^{-x}$, коэффициент нагрузки страховщика равен 10%, требуемая надежность 98%.

Определить минимальное значение w_* собственного капитала при уровне собственного удержания $r = 2$ в индивидуальном эксцедентном (stop loss) перестраховании, если коэффициент нагрузки перестраховщика равен 13%.

Методы оптимизации

Методы оптимизации (3 курс, ПМ, лектор Манита ЛА, 4 задания на 4 академчаса, 2 задания на 2 академчаса)

1.

$$\int_0^1 \left(x\left(t\right)+\left(x'\left(t\right)\right)^2\right)dt \longrightarrow extr, \quad x\left(0\right)=0,\ x\left(1\right)=1$$

Найти допустимую экстремаль.

2. Проверить, удовлетворяет ли точка $(2,6)$ необходимым условиям экстремума в задаче с ограничениями в виде равенств и неравенств.

$$3x^2+y^2 \to extr$$

$$x+y \geq 8$$

3. Проверить, удовлетворяет ли точка $(0,0,0)$ достаточным условиям экстремума в задаче

$$\begin{array}{rcl} x^2+z^2+yz & \to & extr \\ x+y+z & = & 0 \end{array}$$

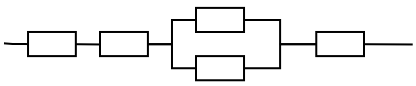
Надежность стохастических систем

Вариант контрольной работы.

1. По заданному распределению времени безотказной работы найти функцию надежности и интенсивность отказов; вычислить указанные показатели при фиксированном t. Найти среднее время безотказной работы. Найти вероятность безотказной работы системы в течение времени τ при условии, что она уже проработала время t.
2. Найти функцию надежности системы, заданной структурной схемой, используя метод прямого перебора и метод сечений. Сравнить полученные результаты.
3. Имеется невосстанавливаемая резервированная система (n,m) с нагруженным (облегченным, холодным) резервом. Время безотказной работы элементов распределено по экспоненциальному закону с заданными параметрами. Найти функцию надежности системы и среднее время безотказной работы.
4. Функционирование системы происходит следующим образом: в момент начала работы планируется проведение предупредительной профилактики через случайное время η с функцией распределения $G(x)$. Если система не отказала до назначенного момента, то в этот момент начинается предупредительная профилактика, средняя длительность которой равна $T_{пп}$. Если отказ произошел раньше, то в момент отказа начинается аварийный ремонт, средняя длительность которого $T_{ап}$. После восстановительных работ система полностью обновляется, и снова планируется момент начала профилактических работ. Функция распределения времени безотказной работы системы $F(x)$. Выписать выражение для коэффициента оперативной готовности и найти стационарный коэффициент оперативной готовности описанной системы для заданных параметров.

Вариант 1.

1. Пусть время безотказной работы системы ξ имеет распределение Вейбулла: $F(t) = P(\xi < t) = \begin{cases} 0, t \le 0 \\ 1 - e^{-2t^{0,5}}, t > 0 \end{cases}$. Найти функцию надежности и интенсивность отказов; вычислить указанные показатели при t=2 часа. Найти среднее время безотказной работы. Найти вероятность безотказной работы системы в течение времени τ=1 час при условии, что она уже проработала время t=2 часа. Является ли данное распределение «стареющим»?
2. Найти функцию надежности системы, заданной структурной схемой, используя метод прямого перебора и метод сечений. Сравнить полученные результаты. Функция распределения времени безотказной работы каждого элемента $F(t)$. Элементы работают независимо друг от друга.



3. Имеется невосстанавливаемая резервированная система *(1,2)* с нагруженным резервом. Время безотказной работы элементов распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 2$ час$^{-1}$. Найти функцию надежности системы и среднее время безотказной работы.
4. Функционирование системы происходит следующим образом: в момент начала работы планируется проведение предупредительной профилактики через случайное время η с функцией распределения *G(t)*= $P(\eta < t) = \begin{cases} 0, t \le 0 \\ 1 - e^{-t}, t > 0 \end{cases}$. Если система не отказала до назначенного момента, то в этот момент начинается предупредительная профилактика, средняя длительность которой равна $T_{пп}$=1 час. Если отказ произошел раньше, то в момент отказа начинается аварийный ремонт, средняя длительность которого $T_{ав}$=2 часа. После восстановительных работ система полностью обновляется, и снова планируется момент начала профилактических работ. Функция распределения времени безотказной работы системы ξ имеет вид: *F(t)*= $P(\xi < t) = \begin{cases} 0, t \le 0 \\ 1 - e^{-t}, t > 0 \end{cases}$. Выписать выражение для коэффициента оперативной готовности и найти стационарный коэффициент оперативной готовности описанной системы $K(z) = \lim\limits_{t \to \infty} K(t,z)$ для $z = 2$ часа.

Операционные системы

1.Понятие «Операционная система»
2. Понятие «Ядро операционной системы»
3. Функции ядра операционной системы
4. Понятие процесса
5. Понятие потока.
6. Понятие «параллельные процессы/потоки»
7. Понятие «асинхронные процессы/потоки»
8. Дескриптор процесса/потока
9. Приоритет процесса/потока
10. Состояние процесса/потока
11. Планирование процессов/потоков
12. Понятие «семафор/мьютекс»
13. Понятие файла
14. Типы организации файлов
15. Дескриптор файла
16. Способы реализации файлов
17. Понятие прерывания
18. Обработка прерывания
19. Понятие системного вызова
20. Подходы к распределению и перераспределению оперативной памяти
21. Программное обеспечение для управления устройствами ввода/вывода

Теоретическая механика

Контрольно-измерительные материалы по курсу:

Теоретическая механика

Пробные задания

Найдите Гамильнониан системы, Лагранжиан которой приведен ниже

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - \dot{x}y + \Omega(x, y)$$

1. $H = \frac{1}{2}\left(\mathrm{p_x^2} + \mathrm{p_y^2}\right) - \Omega(x, y)$
2. $H = \frac{1}{2}\left((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2\right) - \Omega(x, y)$
3. $H = \frac{1}{2}\left(\mathrm{p_x^2} + \mathrm{p_y^2}\right) + \mathrm{xp_y} - \mathrm{yp_x} - \Omega(x, y)$
4. $H = \frac{1}{2}\left((p_x - y)^2 + (p_y + x)^2\right) - \Omega(x, y)$
5. $H = \frac{1}{2}\left(\mathrm{p_x^2} + \mathrm{p_y^2}\right) + \mathrm{x^2} + \mathrm{y^2} - \Omega(x, y)$
6. $H = \frac{1}{2}\left(\mathrm{p_x^2} + \mathrm{p_y^2}\right) - \mathrm{xp_y} + \mathrm{yp_x} - \Omega(x, y)$

Из перечисленных ниже соотношений выберите формулу Ривальса для распределения ускорений точек абсолютно твердого тела.

1. $\overline{w}_A = \overline{w}_B + (\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}) + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB})$
2. $\overline{w}_A = \overline{w}_B + (\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}) + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB})$
3. $\overline{w}_A = \overline{w}_\mathrm{A} + \overline{w}_B + 2(\overline{\omega} \times \overline{v}_{\overline{BA}})$
4. $\overline{w}_A = \overline{w}_B + (\overline{\varepsilon} \times \overline{BA}) + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{BA})$
5. $\overline{w}_A = \dot{\overline{v}}_A$
6. $\overline{w}_A = \overline{w}_B + (\overline{\varepsilon} \times \overline{BA}) + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{BA})$

Главные моменты абсолютно твердого тела равны $A > B > C$, его угловая скорость при движении вокруг центра масс равна $\overline{\omega} = (p, q, r)^T$. Какие из нижеперечисленных соотношений являются первыми интегралами при движении в случае Эйлера.

1. $Ap + Bq + Cr$
2. $p^2 + q^2 + r^2$
3. $A^2p + B^2q + C^2r$
4. $A^2 + B^2 + C^2$
5. $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$
6. $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$

Тестовые вопросы

Сопровождающий трехгранник (трехгранник Френэ) образован ортами $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ и $\bar{b}$ касательной, главной нормали и бинормали. Какие из нижеперечисленных утверждений не соответствуют действительности:

1. Скорость точки всегда сонаправлена с вектором $\bar{\tau}$
2. Ускорение точки всегда сонаправлено с вектором $\bar{\tau}$
3. Проекция ускорения точки на вектор $\bar{b}$ всегда равна нолю
4. Проекция ускорения точки на вектор $\bar{n}$ всегда равна нолю
5. Проекция скорости точки на вектор $\bar{b}$ всегда равна нолю
6. Проекция скорости точки на вектор $\bar{n}$ всегда равна нолю

Механическая система с идеальными кинематическими связями, это такая система, в которой:

1. Работа активных сил на виртуальных перемещениях равна нолю
2. Реакции всех связей равны нолю
3. Связи являются стационарными
4. Работа реакций связей на виртуальных перемещениях равна нолю
5. Связи являются интегрируемыми

Найдите Гамильнониан системы, Лагранжиан которой приведен ниже

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1\dot{q}_2^2) - V(q_1, t)$$

1. $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1}\right) - V(q_1, t)$
2. $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1 p_2^2\ ) + V(q_1, t)$
3. $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1}\right) + V(q_1, t)$
4. $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1 p_2^2\ ) - V(q_1, t)$
5. $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 p_2^2\ ) + V(q_1, t)$
6. $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 p_2^2\ ) - V(q_1, t)$

Найдите обобщенные импульсы для системы, Лагранжиан которой приведен ниже

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega m x\dot{y} - \omega m\dot{x}y + \Omega(x, y)$$

1. $p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}$
2. $p_x = \omega m\dot{x}y, \quad p_y = \omega m\dot{y}x$

3. $p_x = m\dot{x} + \omega m y, \quad p_y = m\dot{y} + \omega m x$
4. $p_x = m\dot{x} - \omega m y, \quad p_y = m\dot{y} + \omega m x$
5. $p_x = m\dot{x} + \omega m y, \quad p_y = m\dot{y} - \omega m x$
6. $p_x = m\dot{x} - \omega m y, \quad p_y = m\dot{y} - \omega m x$
7. $p_x = \omega m y - m\dot{x}, \quad p_y = \omega m x + m\dot{y}$
8. $p_x = \omega m\dot{x} + m y, \quad p_y = \omega m y - m\dot{x}$

Выберете из перечисленных ниже соотношений уравнения Лагранжа второго рода.

1. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
2. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$
3. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$
4. $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$
5. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$
6. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Материальная точка массы m движется в потенциальном поле сил. Какие из нижеперечисленных выражений являются первыми интегралами, если потенциальная энергия задана следующим образом:

$$\Pi(\bar{\mathrm{r}}) = -\frac{\alpha \mathrm{m}}{|\bar{r}|}$$

1. $(\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}})$
2. $|(\dot{\bar{r}} \times \bar{r})|$
3. $(\dot{\bar{r}}, \bar{r})$
4. $(\dot{\bar{r}}, \bar{r}) - \frac{2\alpha}{|\bar{r}|}$
5. $(\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}}) - \frac{2\alpha}{|\bar{r}|}$
6. $|(\dot{\bar{r}} \times \bar{r})| - \frac{2\alpha}{|\bar{r}|}$

Центр системы координат помещен в центр масс абсолютно твердого тела, а оси Ox, Oy и Oz совпадают с главными осями инерции. Главные моменты инерции равны A, B и C, соответственно, причем $A = B \neq C$. Вокруг каких осей возможно стационарное вращение в случае Эйлера?

1. Ox
2. Oy
3. Oz

4. Любой оси, лежащей в плоскости Oxy и проходящей через центр системы координат
5. Любой оси, лежащей в плоскости Oyz и проходящей через центр системы координат
6. Любой оси, лежащей в плоскости Oxz и проходящей через центр системы координат
7. Любой оси, проходящей через центр системы координат
8. Любой оси, лежащей в плоскости Oxy
9. Любой оси, лежащей в плоскости Oyz
10. Любой оси, лежащей в плоскости Oxz

Какой из приведенных ниже Лагранжианов описывает математический маятник?

1. $L = ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos(\varphi)$
2. $L = ml\dot{\varphi}^2 + mgl\cos(\varphi)$
3. $L = ml\dot{\varphi}^2 + mgl\sin(\varphi)$
4. $L = ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\sin(\varphi)$
5. $L = ml^2\dot{\varphi} + mgl\cos(\varphi)$
6. $L = ml\dot{\varphi} + mgl\cos(\varphi)$
7. $L = ml\dot{\varphi} + mgl\sin(\varphi)$
8. $L = ml^2\dot{\varphi} + mgl\sin(\varphi)$

Какое из приведенных ниже соотношений является формулой Эйлера для распределения скоростей абсолютно твердого тела

1. $\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{A} = \overline{\mathrm{v}}_\mathrm{B} + (\overline{\omega}, \overline{\mathrm{v}}_\mathrm{B})$
2. $\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{A} = \overline{\mathrm{v}}_\mathrm{B} - (\overline{\omega}, \overline{\mathrm{v}}_\mathrm{B})$
3. $\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{A} = \overline{\mathrm{v}}_\mathrm{B} - (\overline{\omega}, \overline{\mathrm{BA}})$
4. $\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{A} = \dot{\overline{\mathrm{r}}}_\mathrm{A}$
5. $\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{A} = \overline{\mathrm{v}}_\mathrm{B} + (\overline{\omega} \times \overline{\mathrm{BA}})$
6. $\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{A} = \overline{\mathrm{v}}_\mathrm{B} + (\overline{\omega}, \overline{\mathrm{BA}})$

Найдите Лагранжиан системы, Гамильтониан которой приведен ниже

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + mgy$$

1. $\mathrm{L} = \frac{\mathrm{m}}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$
2. $\mathrm{L} = m\left(p_x^2 + p_y^2\right) - mgy$
3. $\mathrm{L} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + mgy$
4. $\mathrm{L} = \frac{\mathrm{m}}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$
5. $\mathrm{L} = \frac{1}{2\mathrm{m}}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - mgy$
6. $\mathrm{L} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - mgy$

Найдите, как связаны обобщенный импульс и обобщенная скорость в системе, Гамильтониан которой приведен ниже

$$H = \frac{1}{2}p^2 + npq - \lambda q$$

1. $p = \dot{q} - nq$
2. $p = \frac{1}{2}\dot{q} + nq$
3. $p = \dot{q} + nq$
4. $p = \frac{1}{2}\dot{q} - nq$
5. $p = \dot{q} - \lambda$
6. $p = \dot{q} + \lambda$

Выберете из перечисленных ниже соотношений уравнения Гамильтона.

1. $\begin{cases} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$
2. $\begin{cases} p_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ q_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \end{cases}$

Какое из нижеперечисленных утверждений выражает принцип виртуальных перемещений?

1. Механическая система с идеальными связями находится в равновесии тогда и только тогда, когда работа всех активных сил на всех виртуальных перемещениях равна нолю.

2. Механическая система с идеальными связями находится в равновесии тогда и только тогда, когда работа всех реакций связей на всех виртуальных перемещениях равна нолю.
3. Механическая система с идеальными связями находится в равновесии тогда и только тогда, когда работа всех внутренних сил на всех виртуальных перемещениях равна нолю.
4. Механическая система с идеальными связями находится в равновесии тогда и только тогда, когда работа всех внешних сил на всех виртуальных перемещениях равна нолю.
5. Механическая система с идеальными связями находится в равновесии тогда и только тогда, когда равнодействующая всех внешних сил, приложенных к системе равна нолю.
6. Механическая система с идеальными связями находится в равновесии тогда и только тогда, когда сумма всех активных сил, приложенных к системе равна нолю.

Теория вероятностей и математическая статистика

Вариант 0.

Операции над событиями.

Из таблицы случайных чисел наудачу взято число. Событие А – взятое число четное, событие В – число оканчивается нулем. Что означают события: AB, $\overline{B}A$, $\overline{A}B$, $A+B$?

Классическое определение вероятности.

Из 15 билетов выигрышными являются 3. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых 5 билетов 2 выигрышных.

Дискретные случайные величины.

Дискретная случайная величина X задана законом распределения, представленным в таблице:

x_i	-2	-1	1	2	4
p_i	5/16	c^2	3/8	c/16	c/16

1.Найти константу с. Ответ обосновать.

2.Найти математическое ожидание случайной величины X.

Предельные теоремы теории вероятностей.

Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Математическая статистика

Дана выборка из 10 наблюдений (3,1,5,1,1,3,1,1,3,5). Построить гистограмму. Построить эмпирическую функцию распределения графически и аналитически (привести формулу). Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Теория массового обслуживания

Вариант 0.

Система M|M|2|2. Интенсивность входящего потока $\lambda=2$ час$^{-1}$, интенсивность обслуживания $\mu=1$ час$^{-1}$.

1. Составить математическую модель данной системы. Для этого ввести в рассмотрение случайный процесс $\xi(t)$ – число заявок в системе в момент времени t. Выписать для этого процесса переходные вероятности $Pij\ (t, h)$. Показать, что это процесс гибели и размножения.
2. Выписать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса $\xi(t)$. Вычислить предельное распределение.
3. Вычислить вероятность потери заявки q и среднюю стационарную длину очереди.
4. Найти функцию распределения времени ожидания начала обслуживания при условии, что заявка принята в систему.

Уравнения математической физики

Вариант 0

Задание 1. Решите задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$$

Задание 2. Вычислите производную обобщенной функции $2\theta(x-5)$, где θ- функция Хевисайда.

Задание 3. Найдите такие функцию T=T(t) и значение параметра μ, при которых функция $u(t,x) = T(t)\sin\mu x$ является решением начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности на отрезке $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} , \\ u|_{t=0} = 2\sin 3x . \end{cases}$$

Задача 4. Решите задачу Коши для одномерного волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = x^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Функциональный анализ

Вариант №0

1. Найти норму линейного функционала f, заданного как

$$f(x) = \int_0^{\pi} x(t)\cos t dt - \int_{\pi}^{2\pi} x(t)dt$$

на пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

2. Мера Лебега-Стилтьеса задана обобщённой функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1; \\ x+2, & \text{если } -1 < x \le 0; \\ 3 + \ln(1+x^2), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти меру промежутков $[-1, 0]$, $(-1, 0]$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $[0, 2]$; а также меру множества рациональных чисел.

3. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что уравнение $2x(t) + \int_0^t s\sin(x(s))ds = t$ имеет единственное решение в пространстве $C[0, 1]$. Указать алгоритм поиска решения. Вычислить первое приближение к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) \equiv 0$. Оцените точность найденного приближенного решения. Сколько итераций нужно сделать, чтобы получить решение с точностью $0,001$?

4. Найти линейную комбинацию $\alpha\sin(4t) + \beta\cos(2t)$, наилучшим образом приближающую функцию $x(t) = t$ в $L_2[0, 2\pi]$. Как связать эту задачу с нахождением проекции $x(t)$ на подпространство в $L_2[0, 2\pi]$, натянутое на функции $\sin(4t)$ и $\cos(2t)$?

Численные методы

Контрольная работа выполняется в компьютерном классе, оснащенном системой Anaconda Python. При выполнении работы позволятся использовать библиотечные функции библиотек `NumPy` и `SciPy`.

1 Вариант 1.

1. Найти решение системы линейных уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Матрица левой части имеет размер $n = 5$, и элементы матрицы $\mathbf{A}$ заданы соотношением
$$a_{ij} = \frac{3}{1 + c_{ij}} \ ,$$
где $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, и
$$c_{ij} = 0.3\, i\, j \ .$$
Вектор правой части системы $b = (1, 1, 1, 1, 1)^T$.

2. Найти все решения уравнения
$$x = 1 + \operatorname{arctg} x$$
с точностью $\epsilon = 10^{-5}$

3. Вычислить значение определенного интеграла
$$\int_0^1 x^3\, dx$$
методом средних прямоугольников с точностью $\epsilon = 10^{-5}$.