Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»
Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2019 г.
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

Время выполнения задания — 240 мин.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min.
Solutions should be written in English or Russian language. Solution of each problem costs 10 points, the maximum sum equals to 100 points.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ / GENERAL SECTION

1. Докажите сходимость последовательности и найдите её предел

1. Prove convergence of the sequence and calculate its limit

$$a_1 = 7,\ a_2 = 7 + \frac{1}{7},\ a_3 = 7 + \frac{1}{7 + \frac{1}{7}}, \ldots$$

Решение. Решение задачи состоит из двух частей: для начала докажем сходимость последовательности, а затем найдём её предел.

Члены последовательности удовлетворяют рекуррентной формуле

$$a_n = 7 + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Если ввести функцию $f(x) = 7 + 1/x$, то $a_n = f(a_{n-1})$.

По формуле конечных приращений Лагранжа:

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - f(a_{n-1}) = f'(\xi_n)(a_n - a_{n-1}) = \frac{-1}{\xi_n^2}(a_n - a_{n-1}),$$

где ξ_n — некоторая точка строго между a_n и a_{n-1}. Учитывая, что $a_n \geq 7$ и $a_{n-1} \geq 7$, получаем оценку

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{\xi_n^2}|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{49}|a_n - a_{n-1}|.$$

Следовательно,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{49^{n-1}}|a_2 - a_1| = \frac{7}{49^n}.$$

Очевидно равенство

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k).$$

Заметим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{k+1} - a_k)$$

абсолютно сходится по признаку сравнения, т.к. $|a_{k+1} - a_k| \leq 7 \cdot 49^{-n}$. Следовательно, сходится и последовательность a_n:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_{k+1} - a_k).$$

Пусть x — предел рассматриваемой последовательности. Тогда, переходя к пределу при $n \to +\infty$ в рекуррентной формуле, получаем, что

$$x = 7 + \frac{1}{x}$$

Решая квадратное уравнение $x^2 - 7x - 1 = 0$, получаем:

$$x = \frac{7 + \sqrt{53}}{2}.$$

Отрицательный корень квадратного уравнения может быть отброшен по условию $x > 0$.

Таким образом, последовательность a_n сходится и

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{7 + \sqrt{53}}{2}.$$

Критерии:
0-3 Неверное решение.

4-6 Получен верный ответ, но без должного обоснования. Например, отсутствует обоснование сходимости.
7-9 Верное решение с незначительными неточностями в формулировках и обосновании.
10 Верное решение.

2. Пусть $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ - множество всех натуральных чисел, в разложении которых на простые множители встречаются только простые числа p_1, p_2 и p_3. Найдите

2. A set $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ comprises all natural numbers such that their factorizations include prime numbers p_1, p_2 and p_3 only. Calculate

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}.$$

Решение. Каждое $a_i = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$, где $n_j \geq 0$. Таким образом:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{n_1}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{n_2}} \sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{1}{p_3^{n_3}} = \frac{1}{1-p_1^{-1}} \frac{1}{1-p_2^{-1}} \frac{1}{1-p_3^{-1}} = \frac{p_1 p_2 p_3}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}$$

Критерии:
1-3 балла. Различные попытки решения.
4-5 баллов. Высказана идея, что каждое a_i должно быть вида $a_i = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$, где $n_j \geq 0$.
6-7 баллов. Обоснованное решение с ответом в виде $\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{n_1}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{n_2}} \sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{1}{p_3^{n_3}}$.
8-9 баллов. Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании.
10 баллов. Полностью обоснованное решение с правильным ответом.

3. Случайная величина x распределена нормально с параметрами $(0, \sigma)$, где σ- среднеквадратическое отклонение. Найдите дисперсию случайной величины $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

3.A random variable x is normally distributed with a mean 0 and a standard deviation σ. Find a variance of a random $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение. Прежде всего, найдем математическое ожидание исходной величины. Оно равно
$E[y] = \int_{-\infty}^{-\infty} \phi(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} xe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$
Заметим, что подынтегральная функция – нечётная. Следовательно $E[y] = 0$
Найдём математическое ожидание величины y^2. Эта величина равна
$E[y^2] = \int_{-\infty}^{-\infty} \phi^2(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2\left(\frac{1+2\sigma^2}{2\sigma^2}\right)} dx$
$E[y^2] = \frac{\sqrt{1+2\sigma^2}}{\sigma} \frac{\sigma}{\sqrt{1+2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2\left(\frac{1+2\sigma^2}{2\sigma^2}\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{1+2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma/\sqrt{1+2\sigma^2}\sqrt{2\pi}} e^{-x^2\left(\frac{1+2\sigma^2}{2\sigma^2}\right)} dx.$

Заметим, что интеграл в правой части соответствует дисперсии случайной величины случайной величины с нормальным распределением и параметрами $\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{1+2\sigma^2}}\right)$. Следовательно
$E[y^2] = \frac{\sqrt{1+2\sigma^2}}{\sigma} \frac{\sigma}{\sqrt{1+2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2\left(\frac{1+2\sigma^2}{2\sigma^2}\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{1+2\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{1+2\sigma^2} = \sigma^2\left(1+2\sigma^2\right)^{-\frac{3}{2}}$. Дисперсия случайной величины равна
$Var[y] = E[y^2] - (E[y])^2 = \sigma^2\left(1+2\sigma^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

Критерии:
0-4 балла. Предприняты попытки найти решение, не приведшие к успеху, или допущены ошибки в формулах, повлиявшие на ход решения (например, неверно записана формула для мат. ожидания функции).
5- 6 баллов. Правильный ответ без достаточных пояснений, позволяющих понять, как именно получен ответ.
7-9 баллов. Верные рассуждения, допущены ошибки в переходах, ответ неверный.
10 баллов. Верные рассуждения и правильный ответ.

4. Полином Жегалкина логической функции от 5 переменных содержит 32 слагаемых. Сколько нулей может быть в таблице истинности этой функции? Определение: полином Жегалкина представляет собой сумму по модулю два попарно различных произведений булевских переменных (инверсия переменных не допускается), а также (если необходимо) логической константы 1; предполагается, что ни в одном произведении ни одна переменная не встречается больше одного раза.

4. Zhegalkin polynomial for Boolean function of 5 variables involves 32 terms. How many zeroes may contain a truth table for this function? According to the definition, Zhegalk in polynomial is exclusive disjunction of products over non-negated Boolean variables such that each variable ente rs a product one time or does not enter altogether; a logical constant 1 may be a summand if necessary.

Решение. Обозначим искомую функцию через f. Всего возможных слагаемых в полиноме Жегалкина функции от 5 переменных как раз 32, поэтому f однозначна определена и содержит все возможные слагаемые. Заметим, что функция $(1 \oplus x_1) \cdot (1 \oplus x_2) \cdot (1 \oplus x_3) \cdot (1 \oplus x_4) \cdot (1 \oplus x_5)$ имеет тот же полином Жегалкина (достаточно раскрыть

скобки) и поэтому совпадает с f. Поэтому f истинна тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Т.е. в её таблице истинности ровно одна единица (и 31 ноль).
Критерии:

0–3 Попытки найти ответ, не приведшие к успеху.
4–5 Замечено, что условия однозначно определяют f.
6–8 Пропущено обоснование части шагов правильного решения.
9-10 Правильное доказательство и верный ответ.

5. Выясните, эквивалентны ли формулы A и B:

5. Are formulae A and B equivalent?:

$$A = x \to ((y \to z) \to y\&z)\,, B = (\bar{x} \vee (y \to z))\,\&\,(x \oplus y)\,,$$

где $\to$, & и $\oplus$ означают импликацию, логическое И и сложение по модулю два соответственно.

where $\to$, &, and $\oplus$ denotes implication, logical conjunction, and exclusive disjunction, respectively.

Решение.
Построим таблицы истинности для
$$A = x \to ((y \to z) \to y\&z),$$
получаем

x	y	z	$y \to z$	$y\&z$	$(y \to z) \to y\&z$	A
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

для
$$B = (\overline{x} \vee (y \to z))\&(x \oplus y)$$
получаем

x	y	z	$\overline{x}$	$y \to z$	$\overline{x} \vee (y \to z)$	$x \oplus y$	B
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

Следовательно, формулы A и B неэквивалентны.
Критерии:

0-3 балла. Различные попытки решения.
4-7 баллов. Правильный ответ, полученный из неверных вычислений значений форм при некоторых наборах значений переменных.
8-9 баллов. Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании.
10 баллов. Полностью обоснованное решение с правильным ответом.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL SECTION

6. Рассмотрим следующую матрицу размера 2019×2019:

6. Consider the following 2019×2019 matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2019 \\ 2020 & 2021 & \dots & 2*2019 \\ 4039 & 4040 & \dots & 3*2019 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1+2018*2019 & \dots & \dots & 2019^2 \end{pmatrix}$$

Выберем 2019 элементов матрицы так, чтобы из каждого столбца и из каждой строки было взято ровно по одному элементу. Чему может быть равна сумма выбранных таким образом элементов матрицы? Найдите все возможные значения суммы выбранных таким образом элементов матрицы.

One selects 2019 elements of the matrix in the way that one choses a single element from each row and each column. Find all possible values of the sum of elements thus chosen.

Решение. Заметим, что нами выбраны элементы матрицы с номерами $(j, \sigma(j))|_{j=1}^{2019}$, где $\sigma \in S_{2019}$ некоторая перестановка чисел $1, \ldots 2019$. Далее $a_{j,\sigma(j)} = 2019 * (j-1) + \sigma(j)$. Таким образом, искомая сумма равна

$$\sum_{j=1}^{2019} (2019 * (j-1) + \sigma(j)) = 2019\frac{2018 \times 2019}{2} + \frac{2019 \times 2020}{2} = \frac{2019(2019^2+1)}{2}.$$

Критерии:
0-3 балла. Различные попытки решения.
4-5 баллов. Высказана идея, что выбраны элементы матрицы с номерами $(j, \sigma(j))|_{j=1}^{2019}$, где $\sigma \in S_{2019}$ некоторая перестановка чисел 1..2019, и что $a_{j,\sigma(j)} = 2019 * (j-1) + \sigma(j$.
6-7 баллов. Обоснованное решение, но с арифметическими ошибками при подсчёте суммы

$$\sum_{j=1}^{2019} (2019 * (j-1) + \sigma(j)) = 2019\frac{2018 \times 2019}{2} + \frac{2019 \times 2020}{2} = \frac{2019(2019^2+1)}{2}.$$

.
8-9 баллов. Правильный ответ с несущественными погрешностями в его обосновании.
10 баллов. Полностью обоснованное решение с правильным ответом.

7. Четверо играют в карточную игру: все четыре игрока рассаживаются за игровым столом, так, что у каждого из игроков есть игрок, сидящий напротив (таким образом, играющие разбиваются на две пары). Каждый раунд играется следующим образом: один из игроков перетасовывает колоду из 36 игральных карт и раздает каждому (включая себя) по одной карте. Если за столом есть только одна пара игроков, которым достались карты одинакового достоинства (например, семёрки или валеты) эта пара объявляется выигравшей. В противном случае (т.е. если карты одного достоинства выпали сразу обеим парам игроков, например, одна пара получила пару тузов, а другая пару девяток, или ни одна из пар не получила карт одного достоинства) считается, что все участники проиграли. В конце раунда карты возвращаются в колоду и новый раунд играется вновь перетасованной полной колодой. Какова вероятность того, что до первого выигрыша придётся сыграть 20 раундов (включительно), если считать, что колода каждый раз перемешивается таким образом, что вероятность вытащить из колоды каждую из оставшихся в ней карт одинакова?

7. Four people play cards. They seat around a table in the manner that each gamer has a partner (which seats opposite to him), thus making up pairs. At the beginning of each round one of the players shuffles all 36 cards and gives a single card to each gamer, including himself. If it appears that only one pair has received cards of the same value (say, both gamers have received sevens or jacks) than the pair wins the round. Otherwise, if both or none pairs have received cards of the same values, all gamers lose the round. At the end of the round all cards are returned to the pack and the next round strarts with a newly shuffled pack. What is the probability to play 20 rounds before the first won round, if the probabilities to pick up different cards are the same?

Решение. Рассмотрим варианты раздач, ведущие к выигрышу. Будем обозначать карты различного достоинства заглавными буквами латинского алфавита, введем также обозначение $\neg X$для обозначения всех карт колоды, кроме тех, которые имеют достоинство X. Для определённости будем считать, что карты раздаются игрокам по часовой стрелке. Рассмотрим сначала случаи, когда первым двум игрокам розданы разные карты. Таких случая два

$A\ B\ A\ \neg B$
$A\ B\ \neg A\ B$

Рассмотрим случай $A\ B\ A\ \neg B$. Вероятность того, что после карты достоинством A будет роздана карта другого достоинства B равна $\frac{32}{35}$. Вероятность того, что после этого вновь будет роздана карта A равна $\frac{3}{34}$. Последняя карта может быть любой, кроме карт достоинством B и двух уже розданных достоинством A. Следовательно, вероятность того, что последний игрок вытащит ее составляет $\frac{36-2-4}{33} = \frac{30}{33}$ Таким образом, вероятность этого варианта составляет

$p_1 = \frac{32}{35}\frac{3}{34}\frac{30}{33}$

Сходным образом можно вычислить вероятность случая $A\ B\ \neg A\ B$ Вероятность того, что после карты достоинством A будет роздана карта другого достоинства B, равна $\frac{32}{35}$. Следующая карта может быть любой, кроме карт достоинством A и уже розданной карты достоинством B. Вероятность того, что последней будет роздана карта B равна $\frac{3}{33}$

$p_2 = \frac{32}{35}\frac{36-4-1}{34}\frac{3}{33} = \frac{32}{35}\frac{31}{34}\frac{3}{33}$

Рассмотрим теперь случаи, когда два первых игрока получили одинаковые карты

$A\ A\ A\ \neg A$
$A\ A\ \neg A\ A$ Соотвествующие вероятности равны

$p_{31} = \frac{3}{35}\frac{2}{34}\frac{36-4}{33} = \frac{3}{35}\frac{2}{34}\frac{30}{33}$

$p_{32} = \frac{3}{35}\frac{36-4}{34}\frac{2}{33} = \frac{3}{35}\frac{30}{34}\frac{2}{33}$

Таким образом, вероятность того, что реализуется один из этих вариантов, равна

$p_3 = 2\frac{3}{35}\frac{2}{34}\frac{30}{33}$, а вероятность успешного исхода

$p = p_1 + p_2 + p_3 \approx 0.158$

Переформулируем теперь задачу. Нужно найти вероятность того, что в серии независимых испытаний, с вероятностью успеха p и вероятностью неуспеха $1-p$ первый успех будет зафиксирован только в результате двадцатого испытания. Искомая вероятность равна

$$P = (1-p)^{19}\, p \approx 0.158\,(1-0.158)^{19} \approx 0.00599$$

Критерии:

0-4 балла. Предприняты попытки найти решение, не приведшие к успеху или неверно интерпретированы условия задачи или допущены ошибки в рассуждениях, повлиявшие на корректность решения (например, рассматривается модель выбора с возвращением).

5-6 баллов. Правильный ответ без необходимых пояснений.

7-9 баллов. Верные рассуждения, допущены ошибки в переходах, ответ неверный.

10 баллов. Верные рассуждения и правильный ответ.

8. В неориентированном графе на 100 вершинах любой подграф из 40 вершин связен. Верно ли, что в этом графе обязательно существует а) эйлеров цикл; б) гамильтонов цикл?

8. For an undirected graph of 100 vertices, each subgraph of 40 vertices is connected. Whether it is true or not that this graph contains (a) an Euler cycle; (b) a Hamiltonian cycle?

Решение.

а) Нет. Рассмотрим полный граф на 100 вершинах. Он удотворяет условию (в нём вообще любой подграф связен), но степень каждой из его вершин нечетна (99), поэтому Эйлерова цикла нет.

б) Да. Заметим, что степень каждой вершны не менее 61. Если степень вершины a меньше, то a не соединена как минимум с 39 вершинами, и подграф, состоящий их a и 39 не соединённых с ней вершин не связен (в нем есть изолированная вершина a). То есть, степень всех вершин больше, чем половина от их числа (100). В таком графе гамильтонов цикл есть по критерию Дирака.

Критерии:

0-4 Предприняты попытки найти решение, не приведшие к успеху.

5-6 Правильный ответ без необходимых пояснений.

7-9 Один из пунктов задания выполнен верно. Для второго пункта задания приведены верные рассуждения, но допущены ошибки, ответ неверный.

10 Верные рассуждения и правильный ответ.

9. Квадратная матрица $n \times n$ заполнена натуральными числами. (а) Предложите алгоритм, находящий два элемента этой матрицы, не лежащих ни в одной строке, ни в одном столбце, с максимально возможным произведением. Оцените число производимых операций, а также объём дополнительной памяти, требуемой для работы алгоритма. (b) Оптимизируйте алгоритм так, чтобы он удовлетворял ограничениям: по числу операций — $O(n^2)$, по объёму дополнительной памяти — $O(n)$.

9. Square $n \times n$ matrix is filled with natural numbers. (a) Propose an algorithm that finds two elements of the maximum product, provided the elements do not belong to the same row or column. What are the estimated number of arithmetical operations and estimated required memory? (b) Improve the algorithm in such a manner that the estimated number of arithmetical operations is about $O(n^2)$ and estimated memory is about $O(n)$.

Решение.

За $O(n^2)$ операций находим максимумы и вторые максимумы по строкам и столбцам, записываем их вместе с индексами в массив длины n. Для каждого из них выбираем из массива максимальное число, не лежащее с ним ни в одной строке, ни в одном столбце, и перемножаем их. Из полученных произведений выбираем максимальное.

Критерии:

- описан неверный алгоритм — **0** баллов за всю задачу вне зависимости от остального;

- придуман верный алгоритм, не удовлетворяющий ограничениям по числу операций или объёму дополнительной памяти — плюс **1** балл;
- придуман верный алгоритм, удовлетворяющий ограничениям по числу операций, но не по объёму дополнительной памяти — плюс **3** балла;
- придуман верный алгоритм, удовлетворяющий ограничениям по объёму дополнительной памяти, но не по числу операций — плюс **3** балла;
- придуман верный алгоритм, удовлетворяющий ограничениям как по числу операций, так и по объёму дополнительной памяти — плюс **6** баллов;
- оценка числа операций — плюс **1** балл;
- то же с оценкой асимптотики с помощью о-символики — плюс **2** балла;
- оценка объёма дополнительной памяти — плюс **1** балл;
- то же с оценкой асимптотики с помощью о-символики — плюс **2** балла;

10. На потоке учится 120 студентов. Каждый студент может выбрать любого из 10 семинаристов по анализу изображений. Оказалось, что 20 человек выбрали семинариста Алексея. Проверьте, верно ли, что студенты в самом деле выделяют Алексея среди всех семинаристов, то есть выбирают его со статистически значимо большей вероятностью, чем случайно, на уровне значимости 5%. Придумайте статистический критерий для проверки этой гипотезы, воспользуйтесь им и сделайте выводы.

10. A stream of study includes 120 students. Each student may chose any of 10 instructors to study *Image processing* with him/ her. It appears that 20 students have choosen Alex. Test the hypothesis that students prefer Alex to all other instructors for the significance level of 5%; this implies that they choose him significantly frequently than other instructors. Develop a statistical test for this hypothesis, test it, and make conclusions.

Решение. Рассмотрим случайную величину X, равную единице, если студенты выбирает Алексея, и нулю, если он выбирает какого-либо другого семинариста. Мы будем считать, что X имеет распределение Бернулли с неизвестной вероятностью p. В задаче требуется проверить гипотезу “$p = \frac{1}{10}$” против альтернативы “$p > \frac{1}{10}$”.

Есть два возможных подхода.

Пусть $x_1, \ldots, x_{120}$ — реализации нашей случайной величины для каждого из 120 студентов. Тогда $y = x_1 + \ldots + x_{120}$ имеет биномиальное распределение с параметрами 120 и p. В этом случае

$$P\{y \geqslant 20\} = \sum_{k=20}^{120} C_{120}^k p^k (1-p)^{120-k}$$

Если выполняется нулевая гипотеза, то $P\{y \geqslant 20\} \approx 0.016 < 0.05$, то есть гипотеза отвергается, и мы можем сделать вывод о том, что в отношении Алексея действительно имеется предпочтение.

Второй подход такой. Мы можем считать, что наблюдений достаточно много, чтобы считать, что величина

$$z = \frac{x_1 + \ldots + x_{120} - 120p}{\sqrt{120p(1-p)}}$$

имеет стандартное нормальное распределение. Если верна нулевая гипотеза, то

$$z = \frac{20 - 12}{\sqrt{120 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}}} = \frac{8}{\sqrt{\frac{54}{5}}} \approx 2.44,$$

что больше квантиля уровня 0.95 для стандартного нормального распределения. Таким образом, гипотеза отвергается.

Критерии:

- просто ответ без объяснений — **0** баллов;
- сравниваются эмпирические вероятности, но нет попыток проверить статистическую значимость — **0** баллов;
- автор выдвигает некорректную гипотезу или иным способом демонстрирует непонимание того, как работает инструментарий проверки гипотез — **0** баллов;
- выбран критерий или статистика, не подходящая для рассматриваемой ситуации — **0** баллов;
- выбран критерий или статистика, подходящая для рассматриваемой ситуации, проведены правильные вычисления, сделан верный вывод — **10** баллов;
- выбран критерий или статистика, подходящая для рассматриваемой ситуации, в вычислениях есть ошибки, после чего сделан некорректный вывод исходя из полученных чисел — **7** баллов;
- выбран критерий или статистика, использование которой в рассматриваемой ситуации недостаточно обосновано в работе, при этом остальное сделано верно — **7** баллов;
- выбран не подходящий в данной ситуации критерий или статистика или же делаются некорректные выводы, однако из решения можно заключить, что автор в целом понимает, как работает инструментарий проверки гипотез — **2** балла.