

Демонстрационный вариант

В большинстве задач ответом является число. Если число не целое, запишите его в виде десятичной дроби, округлив её до **двух** знаков после точки. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте **точку**.

Если формат ответа в задаче иной, в условии даются инструкции по вводу ответа. Будьте внимательны!

Задача 1. Найдите значение предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)(n + 1) + 2^{\sin 3n}}{n^2}.$$

Ответ: 2.

Задача 2. Вычислите определённый интеграл:

$$\int_{\frac{1-e^6}{3}}^0 \frac{dx}{1-3x}.$$

Ответ: 2.

Задача 3. Найдите собственный вектор матрицы A , соответствующий её наименьшему собственному значению, такой, что его первая координата равна 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -14 & 7 \end{pmatrix}.$$

В ответ запишите компоненты вектора через запятую, без скобок и других символов. Например, если у Вас получился вектор $(1, -5, 6)$, в ответ нужно записать «1, -5, 6» (без кавычек).

Ответ: 1, 1, 2.

Задача 4. Вектор x в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $(4, 2, 3)$. Найдите координаты вектора x в базисе g_1, g_2, g_3 , где

$$g_1 = 5e_1 + e_2 + e_3,$$

$$g_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3,$$

$$g_3 = e_1 + e_2 + 2e_3.$$

В ответ запишите компоненты вектора через запятую, без скобок и других символов. Например, если у Вас получился вектор $(1, -5, 6)$, в ответ нужно записать «1, -5, 6» (без кавычек).

Ответ: 1, −2, 3.

Задача 5. Трое людей в чёрном, четверо людей в синем и пятеро людей в жёлтом пришли обедать в секретную столовую. Сколькими способами они могут встать в очередь так, чтобы и первым, и последним был человек в жёлтом? (Мы отождествляем очереди с одинаковым порядком цветов).

Ответ: 4200.

Задача 6. На вступление в Братство Кольца претендует некоторое количество хоббитов. Анкетирование показало, что 30 из них умеют стрелять из лука, 25 умеют лазать по деревьям, а 31 — печь пироги. При этом 19 хоббитов умеют и стрелять из лука, и лазать по деревьям, 17 — и стрелять из лука, и печь пироги, а 18 — и лазать по деревьям, и печь пироги. Известно также, что 14 хоббитов умеют и то, и другое, и третье. Каково наименьшее возможное число претендентов?

Ответ: 46.

Задача 7. Каждую осень слонопотамы собираются в стаю и отправляются в тёплые края. Вожаком стаи выбирается случайным образом среди всех слонопотамов из двух племён: западного и восточного. Каждый слонопотам либо отважен, либо благоразумен. В западном племени четыре отважных слонопотама и шесть благоразумных. В восточном племени восемь отважных и двое благоразумных.

Известно, что вожаком стаи в 2020 году выбран благоразумный слонопотам. Найдите вероятность того, что это представитель восточного племени.

Ответ: 0.25.

Задача 8. Двадцать человек уселись в круг и играют в следующую игру. Каждый из них подбрасывает честную монетку. Победителями объявляются те, у кого результат подбрасывания отличается и от результата соседа слева, и от результата соседа справа. Найдите математическое ожидание числа победителей в этой игре.

Ответ: 5.

Задача 9. Перед Вами три программы. Определите, какая из них является корректной реализацией алгоритма бинарного поиска. Считайте, что:

1. Команда $x \leftarrow expr$ записывает в переменную x значение выражения $expr$.
2. Элементы массива нумеруются с 1.

```
1. Input: sorted array  $A$ , size of array  $n$ , number to be searched  $x$   
   lowerBound  $\leftarrow 1$   
   upperBound  $\leftarrow n$   
   while 1 = 1 do  
     if upperBound < lowerBound then  
       Output:  $x$  does not exists in  $A$   
       exit  
     end if  
     midPoint  $\leftarrow$  lowerBound + (upperBound − lowerBound)/2
```

```
if  $A[\text{midPoint}] < x$  then  
     $\text{lowerBound} \leftarrow \text{midPoint} + 1$   
end if  
if  $A[\text{midPoint}] > x$  then  
     $\text{upperBound} \leftarrow \text{midPoint} - 1$   
end if  
if  $A[\text{midPoint}] = x$  then  
    Output:  $x$  found at position  $\text{midPoint}$  in  $A$   
    exit  
end if  
end while
```

2. **Input:** sorted array A , size of array n , number to be searched x
- ```
 $\text{lowerBound} \leftarrow 1$
 $\text{upperBound} \leftarrow n$
while $1 = 1$ do
 if $\text{upperBound} < \text{lowerBound}$ then
 Output: x does not exists in A
 exit
 end if
 $\text{midPoint} \leftarrow \text{lowerBound} + (\text{upperBound} - \text{lowerBound})/2$
 if $A[\text{midPoint}] < x$ then
 $\text{upperBound} \leftarrow \text{midPoint} - 1$
 end if
 if $A[\text{midPoint}] > x$ then
 $\text{lowerBound} \leftarrow \text{midPoint} + 1$
 end if
 if $A[\text{midPoint}] = x$ then
 Output: x found at position midPoint in A
 exit
 end if
end while
```

3. **Input:** sorted array  $A$ , size of array  $n$ , number to be searched  $x$
- ```
for  $i := 1$  to  $n$  do  
    if  $x = A[i]$  then  
        Output:  $x$  found at position  $i$  in  $A$   
    end if  
end for  
Output:  $x$  does not exists in  $A$ 
```

Ответ: 1.

Задача 10. Что выведет следующая программа? Считайте, что:

1. Команда $x \leftarrow \text{expr}$ записывает в переменную x значение выражения expr .

2. Команда $stack \leftarrow CreateStack()$ записывает в переменную $stack$ пустой стек. После этого можно использовать операции:
- (a) $stack.push(x)$, которая добавляет элемент x на вершину стека,
 - (b) $stack.pop()$, которая удаляет элемент с вершины стека,
 - (c) $x \leftarrow stack.top()$, которая записывает в переменную x элемент, в данный момент находящийся на вершине стека.
3. Команда $n \leftarrow \text{length of } string$ записывает в переменную n длину строки $string$.
4. Элементы строки нумеруются с 1.
5. Символы '0', '1', ..., '9' представляются последовательными целыми числами.

```

stack ← CreateStack()
string ← "73 - 57 + *91 + *35 + 61 + *12 - * + 23 + -1 + 1 + "
n ← length of string
for i := 1 to n do
  c ← string[i]
  if c ≥ '0' and c ≤ '9' then
    stack.push(c - '0')
  else
    arg2 ← stack.top()
    stack.pop()
    arg1 ← stack.top()
    stack.pop()
    if c = '+' then
      stack.push(arg1 + arg2)
    else if c = '-' then
      stack.push(arg1 - arg2)
    else
      stack.push(arg1 * arg2)
    end if
  end if
end for
answer ← stack.top()
print answer

```

Ответ: 421.