Статистические свойства распространения лазерного луча через турбулентную среду

Рома Гайдаров

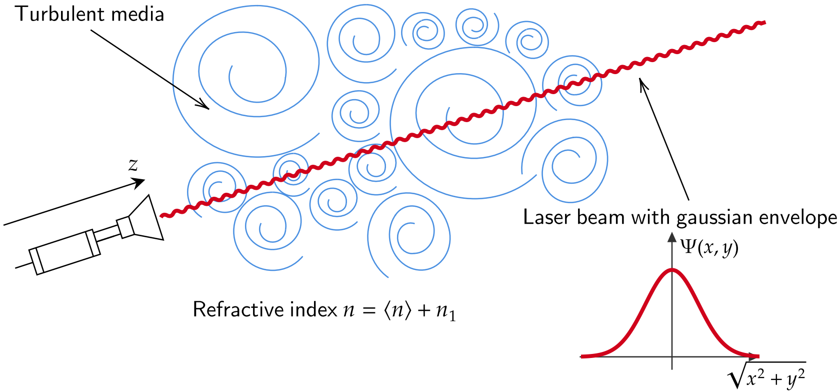
кафедра теоретической физики,
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау

Рецензент:
д. ф.-м. н., директор ИТФ им. Ландау
Колоколов Игорь Валентинович

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., член-корр. РАН
Лебедев Владимир Валентинович

Физическая система

Основы заложены в [Kolokolov, Lebedev and Lushnikov, 2020]



Здесь флуктуация коэффициента преломления n_1 имеет стохастическую природу в силу стохастического поведения турбулентной среды.

Уравнение динамики

Стартуем с волнового уравнения в среде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{n^2}\nabla^2\right) E = 0$$

Мы полагаем, что коэффициент преломления $n = \langle n \rangle + n_1$, где n_1 - стохастическая вариация. В случае лазерного луча E локализовано вблизи $\mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{e_z}$, потому используем анзац:

$$E(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t - ik_0 Z)\Psi(\mathbf{r}, t)$$

Получим линейное уравнение Шрёдингера (Леонтовича):

$$i\frac{\partial}{\partial z}\Psi + \nabla^2\Psi + \xi(\mathbf{r}, z)\Psi = 0, \quad \Psi_{\mathsf{in}}\left(\mathbf{r}\right) = \exp\left(-r^2\right)$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$x = X/w_0, \quad y = Y/w_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_\perp/w_0, \quad z = Z/(2k_0 w_0^2), \quad \xi = 2k_0^2 w_0^2 n_1$$

Кто такая турбулентность?

Посмотрим на уравнения Навье-Стокса с стохастической накачкой:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla P + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

Внутри некой области k-пространства состояние задается через

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle$$

Из результатов нам важен закон Колмогорова-Обухова:

$$S_2(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle (v_i(\mathbf{0}) - v_i(\mathbf{r}))^2 \right\rangle \sim (\epsilon r)^{\mu}, \quad \mu = \frac{2}{3}$$

Средние от коэффициента преломления ведут себя схожим образом:

$$\left\langle [n_1(\boldsymbol{R}_\perp, Z) - n_1(\mathbf{0}, 0)]^2 \right\rangle = C_n^2 \rho^{\mu}, \quad \rho = \sqrt{R_\perp^2 + Z^2}$$

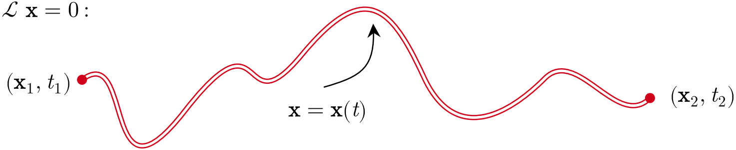
С помощью всего этого можно посчитать коррелятор для $\xi = 2k_0^2 w_0^2 n_1$:

$$\langle \xi(\mathbf{r}_1, z_1) \xi(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{z}_2) \rangle = \left(\text{ const } - D r_{12}^{\mu+1} \right) \delta(z_1 - z_2)$$

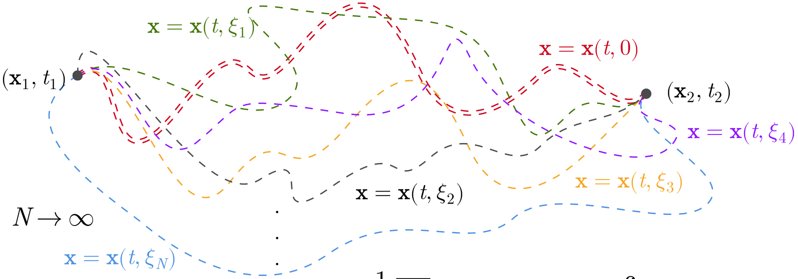
Здесь $D > 0$ отвечает за амплитуду турбулентного шума.

Стохастика как «квантовая теория поля»

$\hat{\mathcal{L}}\;\mathbf{x} = 0:$



$\hat{\mathcal{L}}\;\mathbf{x} = \xi(t)$, e.g. $\langle \xi(t') \cdot \xi(t) \rangle = \delta(t' - t):$



$$\langle \mathbf{x} \rangle_\xi = \frac{1}{N} \sum_{\xi_i} \mathbf{x}(t, \xi_i) P(\xi_i) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{D}\xi \; x(t, \xi) \; \mathcal{P}(\xi)$$

Построение формализма

Чтобы считать различные средние, нам нужна статистическая сумма, определяемая как континуальный интеграл с эффективным действием:

$$Z = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\Psi^*\mathcal{D}P\mathcal{D}P^* \ \exp[-\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_{int}]$$

Здесь P и P^* - вспомогательные поля, возникающие при построении эффективного действия. Само действие выглядит так:

$$\mathcal{S}_{(2)} = \int \mathrm{d}^2 r \mathrm{d}z P^\star \left(i\partial_z \Psi + \nabla^2 \Psi\right) - \int \mathrm{d}^2 r \mathrm{d}z P \left(i\partial_z \Psi^\star - \nabla^2 \Psi^\star\right)$$

$$\mathcal{S}_{\mathsf{int}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^2 r_1 \mathrm{d}^2 r_2 \mathrm{d}z \left(P_1^\star \Psi_1 + P_1 \Psi_1^\star\right) D|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{\mu+1} \left(P_2^\star \Psi_2 + P_2 \Psi_2^\star\right)$$

С помощью этой статсуммы мы будем развивать теорию возмущений вида

$$\int \mathcal{D}\ldots e^{-(\mathcal{S}_{(2)}+\mathcal{S}_{int})} = \int \mathcal{D}\ldots e^{-\mathcal{S}_{(2)}} \left[1 + \mathcal{S}_{int} + \frac{(\mathcal{S}_{int})^2}{2!} + \ldots\right]$$

Статистические свойства

Изучение статистики начинается с парного коррелятора

$$F_2\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z\right) = \left\langle \Psi\left(\mathbf{r}_1, z\right) \Psi^\star\left(\mathbf{r}_2, z\right)\right\rangle$$

Заметим, что $\langle I \rangle = \left\langle |\Psi|^2 \right\rangle = F_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z)$. В терминах функции Грина:

$$F_2\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z\right) = \int \mathrm{d}^2 x_1 \mathrm{d}^2 x_2 \, \mathcal{G}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, z\right) \Psi_{in}\left(\mathbf{x}_1\right) \Psi_{in}\left(\mathbf{x}_2\right)$$

В рамках теории возмущений можно посчитать

$$\mathcal{G} = \frac{\Theta(z)}{16\pi^2 z^2} \exp\left[\frac{i}{2z}(\mathbf{r}-\mathbf{x})(\mathbf{R}-\mathbf{X}) \; - Dz \int_0^1 \mathrm{d}\chi \left|\chi\mathbf{x} + (1-\chi)\mathbf{r}\right|^{\mu+1}\right]$$

здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, аналогично для $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$.
Турбулентный член доминирует на $z \gg z^*$, поэтому мы интересуемся именно этим масштабом.

Яркие пятна

Яркие пятна характеризуются неравенством $I \gg \left\langle |\Psi(\mathbf{y})|^2 \right\rangle$. PDF:

$$P(I,\mathbf{y}) = \mathcal{N} \int D\Psi D\Psi^\star e^{-\mathcal{S}} \delta\left[\Psi^\star(\mathbf{y})\Psi(\mathbf{y}) - I\right], \quad \mathcal{S} = \int \mathrm{d}^2 r\, \Psi^\star \hat{K} \Psi$$

Здесь $\hat{K} F_2\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right) = \delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right)$. Это считается:

$$P(I,\mathbf{y}) \sim \exp\left[-\frac{I}{F_2(\mathbf{y},\mathbf{y})}\right] = \exp\left[-\frac{I}{\langle|\Psi(\mathbf{y})|^2\rangle}\right]$$

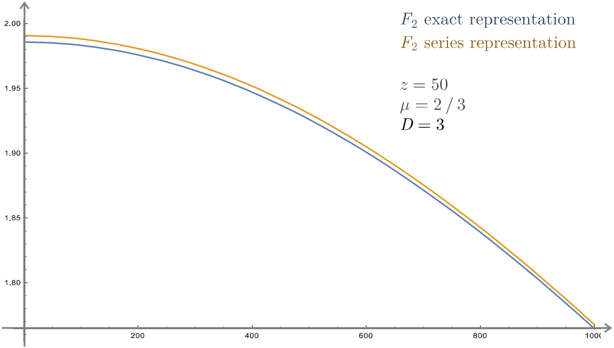
что соответствует Пуассоновой статистике. Геометрия распределения ярких пятен полностью определяется $F_2(\mathbf{y},\mathbf{y})$.

$$F_2\left(\mathbf{y},\mathbf{y},z\right) = \int \frac{\mathrm{d}^2 x\, \mathrm{d}^2 X}{16\pi^2 z^2} \exp\left[\frac{i}{2z}\mathbf{x}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{y}) - Dz\frac{x^{\mu+1}}{\mu+2}\right] \times$$
$$\times \Psi_{in}(\mathbf{X}+\mathbf{x}/2)\Psi_{in}(\mathbf{X}-\mathbf{x}/2)$$

Коррелятор гауссова пучка

Для гауссова пучка $\Psi_{in}(\mathbf{r}) = e^{-r^2}$. Коррелятор:

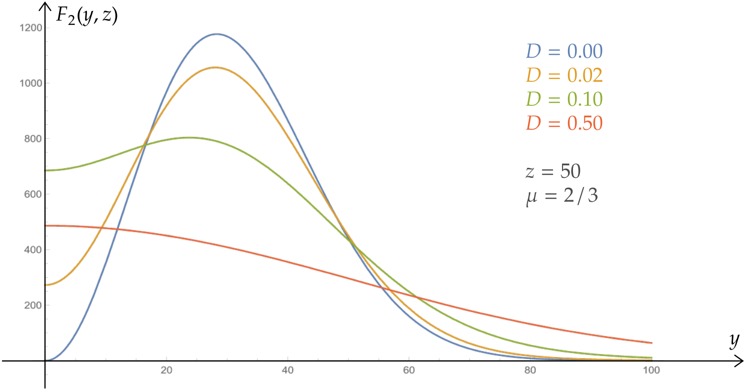
$$F_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left[\frac{1+2n}{\mu+1}\right] \left(\frac{D}{2+\mu}\right)^{-\frac{2n+1}{\mu+1}}}{(n!)^2 2^{4(n+1)} (\mu+1)} \cdot y^{2n} \cdot z^{-\frac{3+2\mu+2n(\mu+2)}{\mu+1}}$$



Коррелятор закрученного пучка

Для гауссова пучка $\Psi_{in}(\mathbf{r}) = (x+iy)\cdot e^{-r^2}$. Коррелятор:

$$F_2(\mathbf{y},\mathbf{y},z) = \frac{1}{2^{10}z^4}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\, x \exp\left[-Dz\frac{x^{\mu+1}}{\mu+2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{32z^2}\right](32z^2 - x^2(1+16z^2))J_0\left(\frac{xy}{2z}\right)$$



Функция распределения нуля

Огибающая должна сохранять свой нуль. PDF:

$$P(\boldsymbol{\rho}) = N \int \mathcal{D}\Psi^* \mathcal{D}\Psi \; e^{-S} \; |\partial_1 \Psi^* \partial_2 \Psi - \partial_1 \Psi \partial_2 \Psi^*| \; \delta\left(\frac{\Psi + \Psi^*}{2}\right) \delta\left(\frac{\Psi - \Psi^*}{2i}\right)$$

Далее следует месяц вычислений и ответ:

$$P(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{16\pi F_2} \frac{2\,\mathrm{Im}^2\, a + c^2 - a^* a}{\sqrt{\mathrm{Im}^2\, a + c^2 - a^* a}}$$

$$a = \partial_x \partial'_y F_2 - \frac{\partial_x F_2 \partial'_y F_2}{F_2}; \quad c = \partial_x \partial'_x F_2 - \frac{\partial_x F_2 \partial'_x F_2}{F_2}$$

В приближении больших z выражение значительно упрощается:

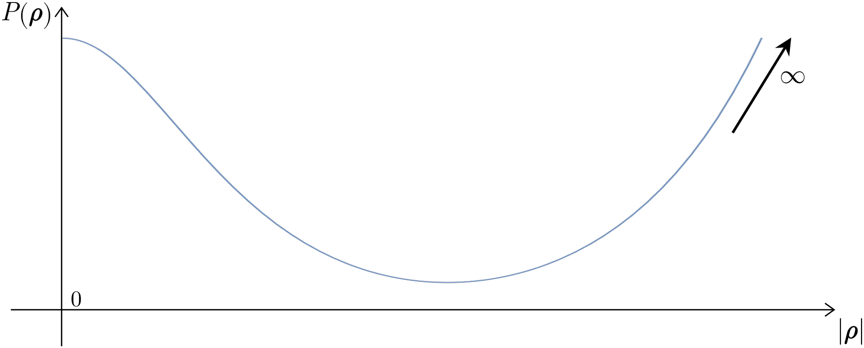
$$P(\boldsymbol{\rho}) \sim \frac{1}{F_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho})}$$

Картинка. Ненормируемость.

В приближении больших z PDF выглядит как:

$$P(\boldsymbol{\rho}) \sim \frac{1}{F_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho})}$$

Визуально это выглядит следующим образом:



Результаты

Полученные

- Полностью воспроизведён и осмыслен развитый в [Kolokolov, Lebedev and Lushnikov, 2020] формализм для данной системы.
- Найдены корреляционные функции для гауссова и закрученного пучков в точном и аналитически приближенном виде.
- Опровергнута гипотеза о топологически защищенном нуле поля интенсивности закрученного пучка
- Решена задача о функции распределения нуля огибающей закрученного пучка в целевой плоскости

Грядущие

- Анализ поправок, порожденных производными коррелятора, к PDF нуля
- Вычисление PDF для условной вероятности распределения нуля огибающей
- Анализ теоретико-информационных метрик в рамках системы

Внимание!

Спасибо за внимание!

Литература

- V. I. Tatarskii, Wave Propagation in a Turbulent Medium (McGraw-Hill Series in Electrical Engineering, New York, 1961).
- V. I. Tatarskii, The Effects of the Turbulence Atmosphere on Wave Propagation (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971).
- R. J. Sasiela, «Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence», Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1994
- L. C. Andrews, R. L. Phillips, (2005). Laser beam propagation through random media. Bellingham, Wash: SPIE Press.
- I. Kolokolov, V. Lebedev, P.M. Lushnikov, Statistical properties of a laser beam propagating in a turbulent medium, Phys. Rev. E 101, 042137 (2020)
- H. W. Wyld, Jr., Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. Ann. of Physics 14, 143-165 (1961).
- G. Falkovich, A. Fouxon, Entropy production and extraction in dynamical systems and turbulence, New J. Phys. 6 50,2004