НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет физики
Базовая кафедра: ИТФ им. Л.Д. Ландау

УГЛОВАЯ АНИЗОТРОПИЯ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

Выполнил студент: Скоба Алена Олеговна, гр. МФ3191

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Лебедев Владимир Валентинович

Москва, 2021 г.

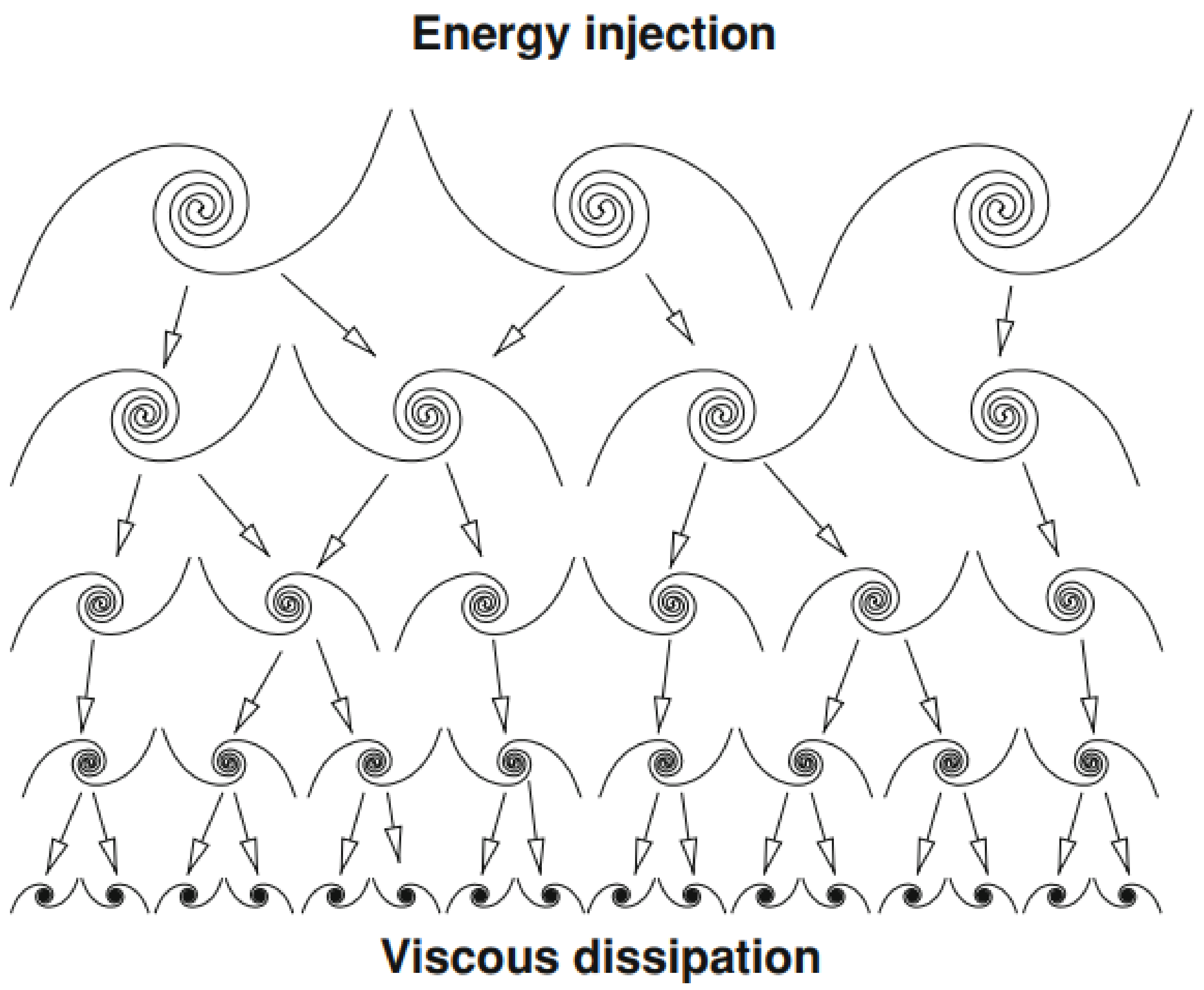
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Волновая турбулентность — *неравновесная статистическая механика случайных волн**.

Модель энергетического каскада основана на предположении локальности, которое означает, что эффективно взаимодействуют друг с другом лишь те моды, масштабы которых по порядку величины соизмеримы.

Проблема: свойство локальности взаимодействия присуще только Колмогоровскому спектру или оно может иметь место также и в других системах?

Цель работы: численно исследовать свойства сильно анизотропного спектра капиллярных волн на поверхности неглубокой жидкости.



Схематическое представление каскадного переноса энергии

* S. Nazarenko, Wave Turbulence, Berlin: Springer-Verlag, 2011

СИСТЕМА КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

Возмущения на поверхности жидкости могут быть описаны двумя скалярными переменными: величиной подъема жидкости $\eta(x, y, t)$ и потенциалом скорости $\psi(x, y, t)$. В пределе тонкого слоя $\eta < h < \lambda$, где h – глубина слоя, λ – характерная длина волны, гамильтониан системы имеет форму

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int dxdy\,(\sigma|\boldsymbol{\nabla}\eta|^2 + \rho(h+\eta)|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2),$$

где ρ – плотность жидкости, а σ – коэффициент поверхностного натяжения. Пара динамических уравнений в безразмерных переменных η/h, $\psi\sqrt{\rho/\sigma h}$ и $t\sqrt{\sigma/\rho h^3}$ имеет вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\mathrm{div}\big((1+\eta)\boldsymbol{\nabla}\psi\big), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\eta - \frac{|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2}{2}.$$

Комплексные амплитуды: $a_{\boldsymbol{k}} = (\eta_{\boldsymbol{k}} + i\psi_{\boldsymbol{k}})/\sqrt{2}$,

Закон дисперсии: $\omega_{\boldsymbol{k}} = k^2$,

Коэффициенты трехволнового взаимодействия: $V_{123} = k_2^2 + k_3^2 + (\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3)$.

В терминах парной корреляционной функции $n_{\boldsymbol{k}}(t)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') = \langle a_{\boldsymbol{k}}(t)a^*_{\boldsymbol{k}'}(t)\rangle$ система имеет два универсальных стационарных решения:

- $n_{\boldsymbol{k}} \sim \omega_{\boldsymbol{k}}^{-1}$ — тепловое равновесие (поток энергии равен нулю),
- $n_{\boldsymbol{k}} \sim k^{-4}$ — спектр Колмогорова-Захарова (положительный поток энергии).

УСТОЙЧИВОСТЬ СПЕКТРА КОЛМОГОРОВА-ЗАХАРОВА ПО ОТНОШЕНИЮ К МАЛЫМ АНИЗОТРОПНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Предположим, что в момент времени $t = 0$ на стационарный изотропный спектра капиллярных волн $n_k \sim k^{-4}$ было наложено малое возмущение произвольной формы $\delta n_{\boldsymbol{k}} \ll n_k$. Линейная эволюция возмущений определяется линеаризованным кинетическим уравнением

$$\frac{\partial \delta n_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} = \int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2\, U_{123}^2[(k^{-4} - k_2^{-4})\delta n_1 + (k^{-4} - k_1^{-4})\delta n_2 - (k_1^{-4} + k_2^{-4})\delta n_{\boldsymbol{k}}]$$

$$-2U_{123}^2[(k_1^{-4} - k_2^{-4})\delta n_{\boldsymbol{k}} + (k_1^{-4} - k^{-4})\delta n_2 - (k^{-4} + k_2^{-4})\delta n_1],$$

где $U_{123} = |V_{123}|^2 \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\delta(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_1 - \omega_2)$.

Удобно разложить произвольное возмущение $\delta n_{\boldsymbol{k}}$ на элементарные

$$\delta n(\boldsymbol{k}) \xrightarrow{\text{angle Fourier}} \delta n_l(k) \xrightarrow{\text{Mellin}} \delta n_{ls} \sim k^{-s}$$

Тогда для нечетных гармоник

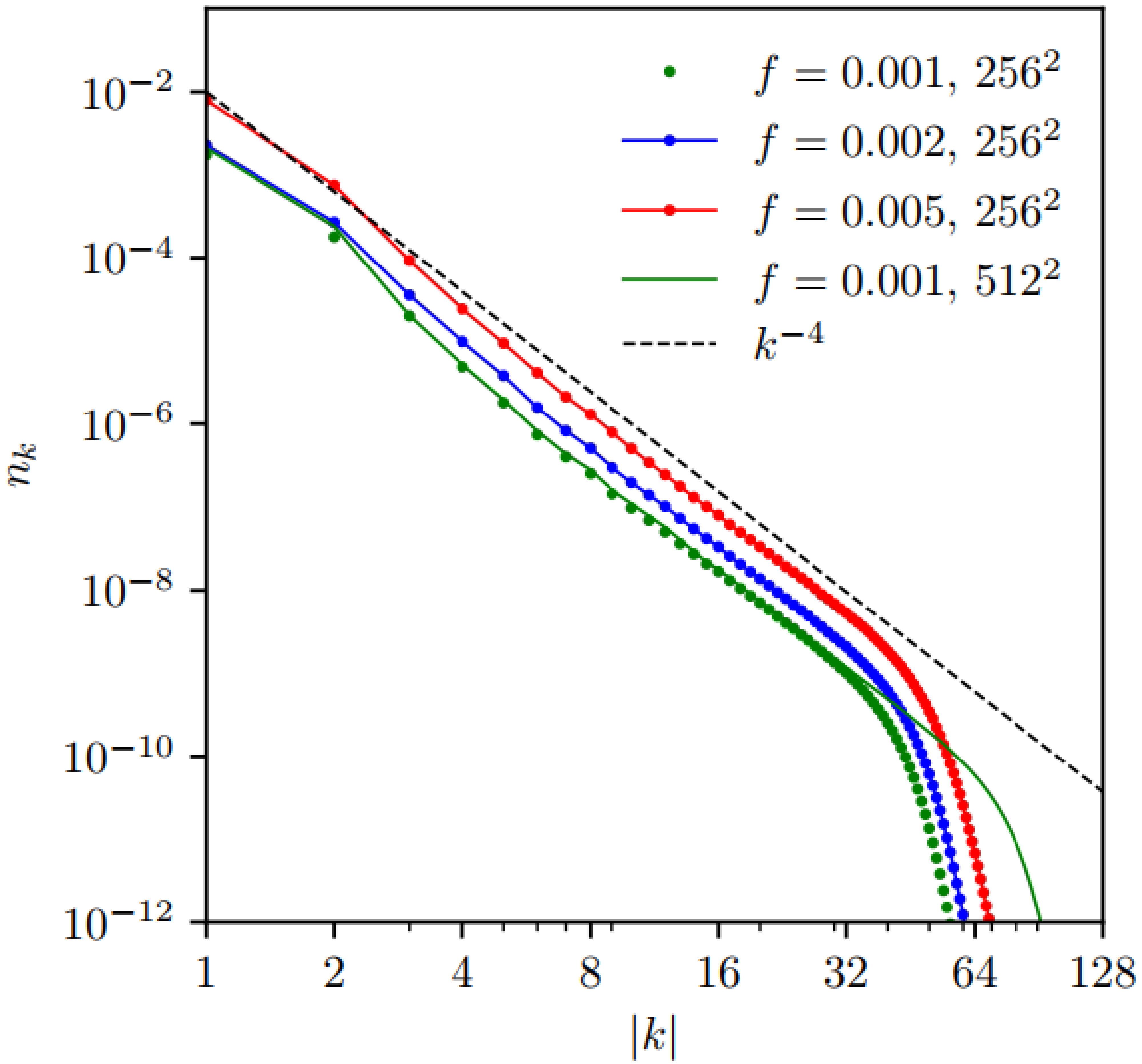
$$\frac{\partial \delta n_{ls}}{\partial t} \sim (-1)^j l k^{-4} \left(\int\limits_{\text{к}}^{\infty} dk_1 k_1^{3-s} + \int\limits_{0}^{\text{К}} dk_1 k_1^{3-s} \right), l = 2j + 1, j = 1,2, \ldots$$

ПОДГОТОВКА К ЧИСЛЕННОМУ СЧЕТУ

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\mathrm{div}\big((1+\eta)\boldsymbol{\nabla}\psi\big), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\eta - \frac{|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2}{2}.$$

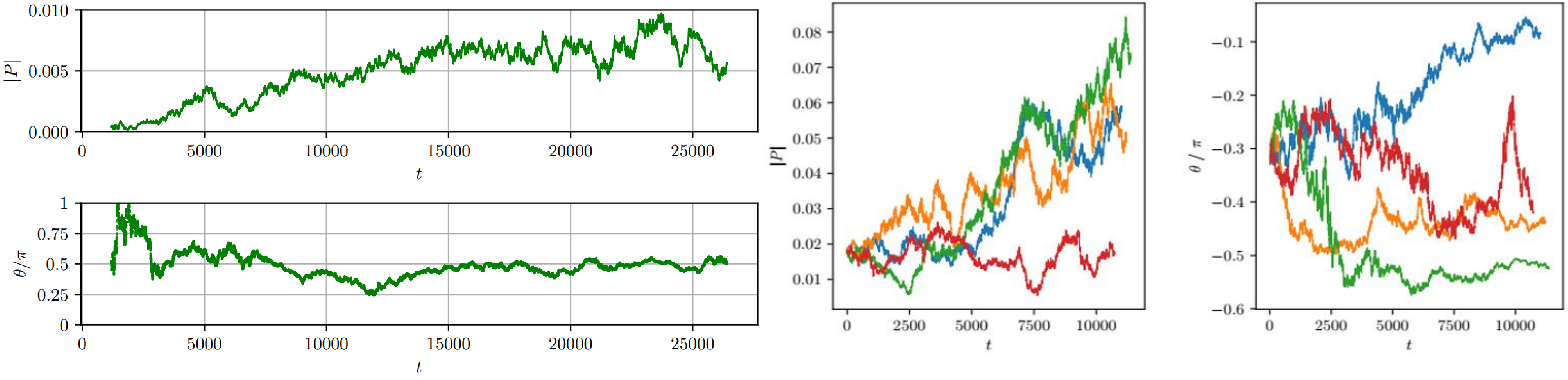
Геометрия системы представляла собой двумерный квадратный ящик в Фурье-пространстве раазмера 256×256. Частные пространственные производные вычислялись в пространстве Фурье методом FFTW, производная по времени была аппроксимирована методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Моделирование мелкомасштабной диссипации производилось с помощью принудительного зануления амплитуд одной трети наибольших волновых мод. Система приводится в турбулентное состояния с помощью внешней случайной силы $f\zeta\, k^{-2}\sqrt{\Delta t}$ на 44 модах с $0 < |\boldsymbol{k}| < 4$, f — постоянная во времени величина, характеризующая амплитуду накачки (варьировалась в различных реализациях), а ζ — белый во времени шум, равномерно распределенный в интервале $[-1, 1]$. Внешняя сила существенно анизотропна, однако статистически инвариантна к преобразованиям отражения $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$.

АНИЗОТРОПНЫЙ СПЕКТР КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН



Спектр капиллярных волн $n_{\boldsymbol{k}} = \langle a_{\boldsymbol{k}} a^*_{\boldsymbol{k}} \rangle$, усредненный по углам вектора $\boldsymbol{k}$, при различных значениях амплитуды внешней накачки. Пунктирной линией обозначен спектр Колмогорова-Захарова k^{-4}. Усредненный спектр в целом близок к теоретическому предсказанию и заметно отклоняется от него лишь вблизи границы инерционного интервала.

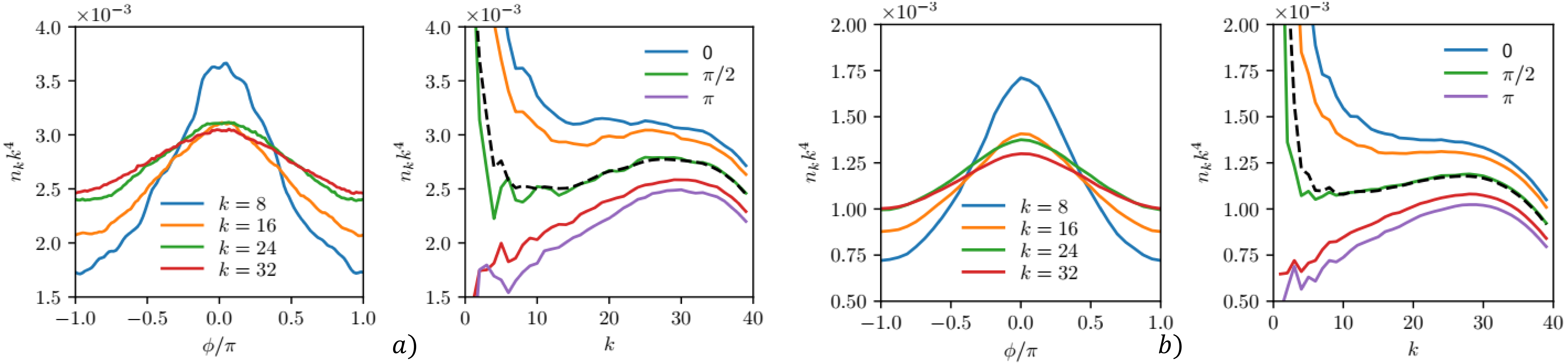
АНИЗОТРОПНЫЙ СПЕКТР КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН



Временная зависимость модуля и угла вектора импульса $\boldsymbol{P}(t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} n_{\boldsymbol{k}}(t)$. Слева — одна длинная реализация, $f = 0.005$, справа — четыре коротких реализаций, характеризуемые одинаковым начальным условием, но различными реализациями силы, $f = 0.002$.

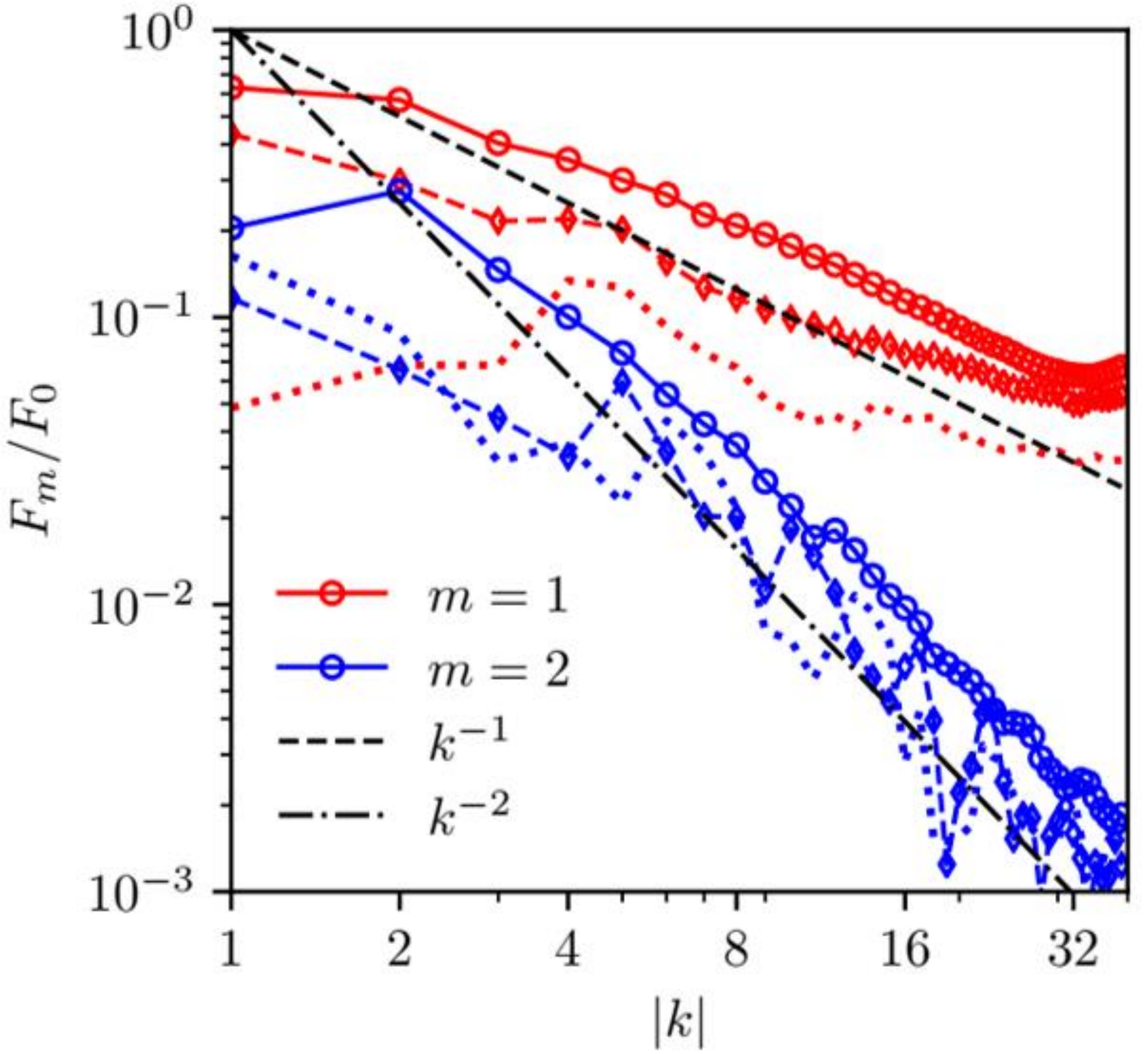
АНИЗОТРОПНЫЙ СПЕКТР КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

Для описания степени анизотропии спектра в целом вводится вектор анизотропии $\boldsymbol{q} = \sum_k k^4 n_{\boldsymbol{k}}(t)\, \boldsymbol{k}/k$ компенсированного спектра $k^4 n_{\boldsymbol{k}}$.



Угловой (слева) и радиальный (справа) срезы компенсированного спектра $k^4 n_{\boldsymbol{k}}$, усредненного по времени и по 10 различными реализациям в локальной системе отчета, связанной с вектором анизотропии, $a)$ $f = 0.002$, $b)$ $f = 0.005$.

АНИЗОТРОПНЫЙ СПЕКТР КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН



Линии с круговыми маркерами соответствуют спектру, полученному путем усреднения 10 коротких реализаций в локальной системе отчета вектора анизотропии. Линия с ромбообразными маркерами соответствуют одной длинной реализации, усредненной в локальной системе отчета вектора анизотропии; пунктирная линия соответствует одной длинной реализации, усредненной в неподвижной системе отчета. $f=0.002$

Угловые гармоники спектра

$$F_m = \int_0^{2\pi} d\theta \, n_{\boldsymbol{k}} \cos m\theta \,.$$

Аналитическая теория устойчивости малых возмущений предсказывает

$$\frac{F_m(k)}{F_0(k)} \sim k.$$

Однако наблюдаемая зависимость лучше аппроксимируется соотношением

$$\frac{F_m(k)}{F_0(k)} \sim k^{-m},$$

возникающем в случае системы в состоянии теплового равновесия.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Классическая теория слабой турбулентности предсказывает изотропный спектр, характеризуемый локальностью взаимодействия волновых мод, однако изотропный спектр неустойчив по отношению к анизотропным возмущениям. Эта неустойчивость приводит к спонтанному нарушению зеркальной симметрии спектра и возникновению ненулевого импульса.

Прямые численные симуляции подтверждают теорию и демонстрируют развитие существенно анизотропного спектра. Степень анизотропии спектра убывает вдоль энергетического каскада и претерпевает насыщение внутри инерционного интервала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] L. F. Richardson, Proc. R. Soc. Lond., vol. 110, 1926.

[2] A. M. Obukhov, "On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow," Dokl. Akad. Nauk SSSR , vol. 32, pp. 22-24, 1941.

[3] A. N. Kolmogorov, "Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence," Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 32, 1941 (English translation in: American Mathematical Society Translations 1958, Series 2, 8, 87, Providence, RI).

[4] A. N. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers," Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 30, 1941.

[5] V. E. Zakharov, «Weak turbulence in media with decay spectrum,» Zh. Priklad. Tech. Fiz, т. 4, 1965.

[6] S. Nazarenko, Wave Turbulence, Berlin: Springer-Verlag, 2011.

[7] Y. Choi , Y. V. Lvov and S. Nazarenko, "Wave Turbulence," Springer, Lectures Notes in Phisics, 2005.

[8] V. E. Zakharov, V. S. Lvov and G. E. Falkovich, Kolmogorov Spectra of Turbulence 1: Wave Turbulence, Berlin: Springer, 1992.

[9] U. Frisch , Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[10] G. E. Falkovich and . M. D. Spector, "Nonlocal angular instability of a Kolmogorov-like wave turbulence spectrum," Physics Letters A, vol. 168, 1992.

[11] A. O. Korotkevich, A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, "Numerical simulation of surface waves instability on a homogeneous grid," Phys. D Nonlinear Phenom., 2016.

[12] A. N. Pushkarev и V. E. Zakharov, «Turbulence of capillary waves–theory and numerical simulation,» Phys. D Nonlinear Phenom., 2000.

[13] V. S. Lvov, "Introduction to Nonlinear Wave Dynamics," in Wave Turbulence Under Parametric Excitation , Berlin, Springer-Verlag, 1994.

[14] Л. Д. Ландау , Е. М. Лифшиц, В. Б. Берестецкий и Л. П. Питаевский, Квантовая электродинамика. Теоретическая физика, т. 4, Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

[15] М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Москва: Наука, 1972.

[16] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика. Часть I. Теоретическая физика, т. 5, Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.

[17] Г. Фалькович, Современная гидродинамика. Краткий курс, М.–Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2014.

[18] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Гидродинамика. Теоретическая физика, т. 6, Москва: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.

[19] N. Vladimirova, I. Vointsev, A. Skoba and G. Falkovich, "Turbulence of Capillary Waves on Shallow Water," Fluids, vol. 6, no. 5, 2021.

[20] H. Bateman, Higher Transcendental Functions, vol. 1, New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.

[21] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, Handbook of Integral Equations, Boca Raton, London, New York, Washington: CRC Press, 1998.

[22] A. V. Kats and V. M. Kontorovich, Zh. PriN. Mekh. Tekh. Fiz. , vol. 6, p. 97, 1974.

[23] Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков и Г. М. Кобельков, Численные методы, Бином, 2011.

[24] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Москва: Издательствово МГУ, 1999.

[25] N. Vladimirova, S. Derevyanko and G. Falkovich, arXiv preprint arXiv:1108.1541, 2011.

[26] N. Vladimirova и G. Falkovich, arXiv preprint arXiv:1411.3060v3, 2018.

[27] A. Kats and V. Kontorovich, "Symmetry properties of the collision integral and non isotropic stationary solutions in weak turbulence theory," Sov. Phys. JETP , 1973.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

www.itp.ac.ru

Телефон: +7 (495) 702-93-17

Адрес: 142432, МО., г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1А