

Математический анализ

1. Вычислите определенный интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3 + 1}{\sqrt{1 - x^2} + 1} dx.$$

2. Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте ее график

$$f(x) = \sqrt{x(3 - x^2)}.$$

В задании необходимо:

- 2.1 Определить область существования функции и исследовать ее поведение в граничных точках последней.
- 2.2 Выяснить симметрию графика и периодичность.
- 2.3 Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности.
- 2.4 Определить нули функции и области постоянства знака.
- 2.5 Найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции.
- 2.6 Определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции.
- 2.7 Найти асимптоты в случае их существования.
- 2.8 Указать те или иные особенности графика.

В случае невозможности установить какую-либо из величин аналитически, указать для нее разумные верхние и нижние границы.

Алгебра

3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B , равную $B = A^{2021} - 5A^{2020} + 2A^{2019} + 5A^{2018} - 3A^{2017} + A^2$.

Теория чисел

4. Решить в целых числах уравнение $a^2b = 2000a + b$.

Алгоритмы

5. Дерево, состоящее из n занумерованных различными числами от 1 до n вершин, задано списками смежности. Вам поступают запросы вида «удалите из дерева вершину с номером i » (вершины после таких запросов не перенумеруются). Предложите алгоритм, определяющий число связных компонент графа после m таких запросов. Ваш алгоритм должен работать за $O(n + m)$ операций. Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

6. Дан массив $A[1:n]$, состоящий из строк длины не больше d , представляющих некоторые целые числа в десятичной записи (и не содержащих ведущих нулей).

(a) Предложите алгоритм, находящий максимальное (по величине) число, которое можно было бы составить из этих чисел (числа конкатенируются как строки и интерпретируются в десятичной записи). Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

(b) Оптимизируйте алгоритм так, чтобы он выполнялся за $o(n^2)$ (o -малое!) операций. Обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените число операций, а также количество дополнительной памяти, которое будет использовать алгоритм.

В обоих пунктах нельзя апеллировать к реализациям структур данных и функций, доступных в тех или иных языках программирования. Все используемые алгоритмы должны быть подробно описаны.

Дискретная математика

7. Между пунктами A и B 8 остановок. В день из A и B ходит 6 поездов, каждый из которых может пропускать часть остановок. Сколькими способами можно составить расписание поездов, т.е. какой поезд какие остановки пропускает, если на каждой остановке должны останавливаться хотя бы 4 из них?

Графы

8. Обязательно ли будет связным граф с набором степеней вершин $(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 5, 2, 2, 2)$?

Теория вероятностей

9. Вася подбросил монетку 103 раза, и у него 51 раз выпала решка. Потом Васе надоело это занятие, и он ушел домой. Монетку с земли подобрал Миша, который подбросил её 53 раза. У Миши 25 раз выпал орел. Оцените вероятность выпадения решки для этой монетки с помощью метода максимального правдоподобия.

Математическая статистика

10. Предполагается, что результаты измерений приведенные в таблице ниже

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1.8080	3.2900	3.4050	2.4490	3.1140	1.7600	2.3230	3.3160	3.0820	3.4050

распределены равномерно, с функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

Оцените параметры a и b , используя метод моментов.