

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ,**Тесты по математике****Переводной тест (на третий курс)***Илья Щуров*

Задача 1. Сформулируйте с помощью кванторов утверждение

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \neq 3$$

и докажите его, пользуясь только алгеброй и преобразованием выражений с кванторами (никакими теоремами о пределах, непрерывностью и т.д. пользоваться нельзя).

Задача 2. В какой точке функция

$$f(x) = \int_0^x (e^{z^3} - e) dz$$

достигает своего минимального значения?

Задача 3. В трёхмерном пространстве скалярное произведение задано квадратичной формой с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $(1, 1, 1)$ относительно этого скалярного произведения.

Задача 4. Рассмотрим $(n + 1)$ -мерное пространство \mathcal{A}_n функций, заданных многочленами степени не выше n . На этом пространстве действует оператор дифференцирования. Он линеен. Найти его матрицу в базисе $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Задача 5. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x, y) = \sin(x^2) - \cos x + \alpha xy$$

имеет локальный минимум в точке $(0, 0)$?

Задача 6. Цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ пересекает плоскость $x + 2y + 3z = 0$ по некоторой кривой. Что это за кривая? Задать её параметрически, то есть найти такую вектор-функцию $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, что эта кривая является образом найденной функции.

Задача 7. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти функцию плотности случайной величины $Y = X^2$. Является ли она (функция плотности) ограниченной?

Задача 8. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Случайная величина ε независима от X , имеет нормальное распределение с нулевым матожиданием и дисперсией 4. Случайная величина Y определяется как

$$Y = 1 + 2X + \varepsilon.$$

Найти матрицу ковариаций вектора (X, Y) . Каково его распределение?