

Совместный бакалавриат
Тесты по математике
Переводной тест (на второй семестр третьего курса)

(Илья Щуров)

Задача 1. Сформулируйте с помощью кванторов утверждение

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 5} = 3$$

и докажите его, пользуясь только алгеброй и преобразованием выражений с кванторами (никакими теоремами о пределах, непрерывностью и т.д. пользоваться нельзя).

Задача 2. В какой точке функция

$$f(x) = \int_0^x (e^{z^3} - e) dz$$

достигает своего минимального значения?

Задача 3. В трёхмерном пространстве скалярное произведение задано квадратичной формой с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $(1, 1, 1)$ относительно этого скалярного произведения и проходящей через точку $(-1, 0, 2)$.

Задача 4. На плоскости \mathbb{R}^2 задана декартова система координат (x, y) , стандартный базис $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ и стандартное скалярное произведение (в котором этот базис ортонормирован). Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ортогонально проектирующий плоскость на прямую $y = x$ (то есть для всякого вектора $u \in \mathbb{R}^2$ находится его разложение в виде $u = v + w$, где v параллелен указанной прямой, а w ей перпендикулярен; в этом случае $\mathcal{A}u = v$). Найти матрицу оператора \mathcal{A} в стандартном базисе.

Задача 5. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \max(|x|, |2y|)$.

(а) Построить несколько (хотя бы три разных) линии уровня этой функции.

(b) Найти её градиент в точке (x_0, y_0) .

(c) Найти её минимум при ограничении $x + y \geq 3$.

Задача 6. Цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ пересекает плоскость $x + 2y + 3z = 0$ по некоторой кривой. Что это за кривая? Задать её параметрически, то есть найти такую вектор-функцию $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, что эта кривая является образом найденной функции.