Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, Тесты по математике
Переводной тест (на второй курс)

Илья Щуров

Задача 1. Сформулируйте с помощью кванторов утверждение

$$\lim_{x\to 2} x^2 \neq 3$$

и докажите его, пользуясь только алгеброй и преобразованием выражений с кванторами (никакими теоремами о пределах, непрерывностью и т.д. пользоваться нельзя).

Задача 2. Пусть известно, что функция f имеет непрерывную производную на отрезке $[-1, 2]$, причём $f(0) = -2$, $f(1) = 3$, $f'(0) = 3$. Докажите, что существует такая точка $c \in [0, 1]$, что $f'(c) = 4$.

Задача 3. В какой точке функция

$$f(x) = \int_0^x (e^{z^3} - e) dz$$

достигает своего минимального значения?

Задача 4. В трёхмерном пространстве скалярное произведение задано квадратичной формой с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $(1, 1, 1)$ относительно этого скалярного произведения.

Задача 5. Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство $\mathcal{A}_n$ функций, заданных многочленами степени не выше n. На этом пространстве действует оператор дифференцирвания. Он линеен. Найти его матрицу в базисе $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Задача 6. (a) Пусть α — образ отображения $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите линейное отображение $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ядром которого является плоскость α.

(b) Задайте плоскость $x+y=z$ как образ некоторого линейного отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(c) Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+3y+4z=0$ и проходящей через точку $(1,2,1)$.