Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2019 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Пусть n-натуральное число. Для всех целых чисел a вычислить сумму

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi iak/n}.$$

2. Пусть r, s, c_0, c_1 действительные числа, а последовательность $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана следующим образом

$$V_0 = c_0,\, V_1 = c_1,\, V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} \quad \text{для} \quad n > 1.$$

Для всех $n > 0$ вычислить

$$\left|\begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ V_n & V_{n-1} \end{pmatrix}\right| \times \left|\begin{pmatrix} V_2 & V_1 \\ V_1 & V_0 \end{pmatrix}\right|^{-1}$$

3. Найти все не квадратные матрицы $A_{mn} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ с действительными элементами такие, что для любого $j = 1, \dots n$ выполнено $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} = 1$ и для любого $i = 1, \dots m$ верно $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

4. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x) \in C^2(R)$ удовлетворяет соотношению $f(x^2) = f(x) + x^2$. Найти $f'(1), f''(1)$.

5. Вычислить $\int\int_{\Omega} e^{-y^2} dxdy$, где Ω-треугольник с вершинами в точках $(0,0), (0,1)$ и $(1,1)$.

6. Решите дифференциальное уравнение $e^{-y}dy + dx + 2xdy = 0$.

7. Найти все возможные значения величины S_n, определенной для натуральных n следующим образом $S_n = \sum_{k=1}^{n} k! \cdot k - (n+1)!$.

8. Из чисел $1, 2, 3, \dots, 9$ случайным образом составляется матрица размера 3×3 (при этом используются все числа). Какова вероятность того, что в каждой строке и в каждом столбце сумма элементов будет нечетной?

9. Рассмотрим уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = m$ относительно неотрицательных целых x_i. Выберем N его решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных нами решений ни одна переменная x_i не принимала одного и того же значения. Найти наибольшее возможное значение N, если

1. $m = 6$
2. m- произвольное число кратное 3.

10. Проезд в автобусе стоит 50 рублей. Если же безбилетника поймает кондуктор, то безбилетник обязан не только оплатить проезд в 50 рублей, но и заплатить штраф в 950 рублей. Известно, что кондуктор в среднем проверяет один автобус из двадцати. С какой вероятностью студент будет оплачивать проезд в автобусе, если его цель-минимизировать математическое ожидание своих расходов на проезд.

11. Алёна Ивановна, коллежская секретарша, каждый день выдаёт один кредит. Суммы кредитов независимы и экспоненциально распределены с параметром λ. За прошедшие 100 дней процентщица выдала кредитов на общую сумму 200 рублей. (Функция плотности экспоненциального распределения: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$)

1. Постройте примерный 95% доверительный интервал для параметра λ.
2. Постройте примерный 95% доверительный интервал для вероятности выдать кредит размером больше, чем в два рубля.

12. В группе 20 студентов и каждый из них написал три контрольных по эконометрике. Средние по контрольным равны 20, 30 и 40 баллов, а несмещённые выборочные дисперсии — 25, 50 и 40 квадратных баллов, соответственно. Если все 60 результатов свалить в общую выборку, то несмещённая выборочная дисперсия окажется равной 60. Предположим, что результаты студентов за i-ую контрольную независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$.

1. Какие две регрессии достаточно построить, чтобы, зная суммы квадратов ошибок в этих регрессиях, суметь проверить гипотезу H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ с помощью F-теста?

2. Проверьте гипотезу H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ против альтернативной о нарушении хотя бы одного равенства на уровне значимости 1%.

13. Рассмотрим три модели, оцениваемые с помощью МНК: $y = \alpha x + u$, $y = \beta z + u$, $y = \gamma_1 x + \gamma_2 z + u$. Известно, что векторы x и z ортогональны.

1. Как связаны между собой оценки коэффициентов этих моделей? Докажите.

2. Как связаны между собой ESS, RSS, TSS и R^2 этих моделей? Докажите.

14. У вас есть бидон, полный молока на продажу, и 4 банки. Какого объема должны быть эти банки, чтобы вы смогли отмерить любой объем молока от 1 до 40 литров, при том что каждая банка может быть использована только 1 раз?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2019 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Пусть n-натуральное число. Для всех целых чисел a вычислить сумму

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi iak/n}.$$

2. Пусть r, s, c_0, c_1 действительные числа, а последовательность $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана следующим образом

$$V_0 = c_0,\ V_1 = c_1,\ V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} \quad \text{для} \quad n > 1.$$

Для всех $n > 0$ вычислить

$$\left|\begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ V_n & V_{n-1} \end{pmatrix}\right| \times \left|\begin{pmatrix} V_2 & V_1 \\ V_1 & V_0 \end{pmatrix}\right|^{-1}$$

3. Найти все не квадратные матрицы $A_{mn} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ с действительными элементами такие, что для любого $j = 1, \dots n$ выполнено $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} = 1$ и для любого $i = 1, \dots m$ верно $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

4. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x) \in C^2(R)$ удовлетворяет соотношению $f(x^2) = f(x) + x^2$. Найти $f'(1), f''(1)$.

5. Вычислить $\int\int_\Omega e^{-y^2} dxdy$, где Ω-треугольник с вершинами в точках $(0,0), (0,1)$ и $(1,1)$.

6. Решите дифференциальное уравнение $e^{-y}dy + dx + 2xdy = 0$.

7. Найти все возможные значения величины S_n, определенной для натуральных n следующим образом $S_n = \sum_{k=1}^{n} k! \cdot k - (n+1)!$.

8. Из чисел $1, 2, 3, \dots, 9$ случайным образом составляется матрица размера 3×3 (при этом используются все числа). Какова вероятность того, что в каждой строке и в каждом столбце сумма элементов будет нечетной?

9. Рассмотрим уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = m$ относительно неотрицательных целых x_i. Выберем N его решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных нами решений ни одна переменная x_i не принимала одного и того же значения. Найти наибольшее возможное значение N, если

1. $m = 6$
2. m- произвольное число кратное 3.

10. Проезд в автобусе стоит 50 рублей. Если же безбилетника поймает кондуктор, то безбилетник обязан не только оплатить проезд в 50 рублей, но и заплатить штраф в 950 рублей. Известно, что кондуктор в среднем проверяет один автобус из двадцати. С какой вероятностью студент будет оплачивать проезд в автобусе, если его цель-минимизировать математическое ожидание своих расходов на проезд.

11. Алёна Ивановна, коллежская секретарша, каждый день выдаёт один кредит. Суммы кредитов независимы и экспоненциально распределены с параметром λ. За прошедшие 100 дней процентщица выдала кредитов на общую сумму 200 рублей. (Функция плотности экспоненциального распределения: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$)

1. Постройте примерный 95% доверительный интервал для параметра λ.
2. Постройте примерный 95% доверительный интервал для вероятности выдать кредит размером больше, чем в два рубля.

12. В группе 20 студентов и каждый из них написал три контрольных по эконометрике. Средние по контрольным равны 20, 30 и 40 баллов, а несмещённые выборочные дисперсии — 25, 50 и 40 квадратных баллов, соответственно. Если все 60 результатов свалить в общую выборку, то несмещённая выборочная дисперсия окажется равной 60. Предположим, что результаты студентов за i-ую контрольную независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$.

1. Какие две регрессии достаточно построить, чтобы, зная суммы квадратов ошибок в этих регрессиях, суметь проверить гипотезу H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ с помощью F-теста?

2. Проверьте гипотезу H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ против альтернативной о нарушении хотя бы одного равенства на уровне значимости 1%.

13. Рассмотрим три модели, оцениваемые с помощью МНК: $y = \alpha x + u$, $y = \beta z + u$, $y = \gamma_1 x + \gamma_2 z + u$. Известно, что векторы x и z ортогональны.

1. Как связаны между собой оценки коэффициентов этих моделей? Докажите.

2. Как связаны между собой ESS, RSS, TSS и R^2 этих моделей? Докажите.

14. У вас есть бидон, полный молока на продажу, и 4 банки. Какого объема должны быть эти банки, чтобы вы смогли отмерить любой объем молока от 1 до 40 литров, при том что каждая банка может быть использована только 1 раз?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2019 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Пусть функция $f : N \longrightarrow C$, действующая на натуральных числах, такова, что для любых взаимно простых m и n выполнено $f(mn) = f(m)f(n)$. Положим $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, где сумма берется по всем делителям числа n. Для взаимно простых m_1 и m_2 вычислить $F(m_1m_2) - F(m_1)F(m_2)$.

2. Пусть a, b, c действительные числа такие, что $abc = 1$. Для целых ν, μ определим

$$A(\nu, \mu) = \left| \begin{pmatrix} a^{\nu+\mu+2} & b^{\nu+\mu+2} & c^{\nu+\mu+2} \\ a^{\mu+1} & b^{\mu+1} & c^{\mu+1} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \times \left| \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^{\nu+\mu+2} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|^{-1}$$

Вычислить $A(0, 1)$.

3. Пусть P_n-пространство многочленов с действительными коэффициентами степени меньшей или равной n. Определить скалярное произведение в P_n так, чтобы базис

$$1,\ t,\ \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}$$

оказался ортонормированным.

4. Сходится ли ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, где $a_1 = 1$, а при $k > 0$ $a_{k+1} = S_k^{-1}$, где $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

6. Решите дифференциальное уравнение $y' + xy = xy^3$.

7. Пусть $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Найти

$$\left(z^{1^2} + z^{2^2} + z^{3^2} + \ldots + z^{12^2}\right)\left(z^{-1^2} + z^{-2^2} + z^{-3^2} + \ldots + z^{-12^2}\right)$$

8. Даны две монеты (монета-1 и монета-2). С каждой из них независимо проводится цикл следующих испытаний для определения двух независимых величин x_1 и x_2. Монета-i подбрасывается. Если выпал орел, то $x_i = 0$, если выпала решка, то $x_i = 1$. Если же при первом подбрасывании монеты-i выпала решка, то x_i выбирается случайным образом из отрезка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что $|x_1 - x_2| > 1/2$?

9. Даны однотонные шары с номерами $1, 2, \ldots N$. Шары покрашены в два цвета белый и черный. За одну операцию Миша может выбрать произвольное число $k \leq N$ и перекрасить шар с номер k и шары с номерами n, такими что n и k не взаимно просты, в противоположный цвет. Сможет ли Миша перекрасить (за конечное число операций) все шары в белый цвет, если изначально все они были черными?

10. На экзамен пришло n студентов. Преподаватель ставит студенту неуд (двойку) с вероятностью $0 < p < 1$. Однако, поставив неуд, преподаватель ставит неуд и всем последующим студентам. Найти вероятность того что неуд получит ровно k студентов. Найти математическое ожидание числа студентов, получивших неуд.

11.Каждый день Старик закидывает невод до тех пор, пока не поймает Золотую рыбку, но не более трёх раз. Вероятность поймать Золотую рыбку с одного броска невода постоянна и равна p. Результаты бросков невода независимы. За 50 дней Старик пообщался с Золотой рыбкой 30 раз.

1. Постройте примерный 95% доверительный интервал для параметра p.

2. Постройте примерный 95% доверительный интервал для вероятности поймать Золотую рыбку со второго броска невода.

12. Крёстный Отец принимает решение, удовлетворить ли просьбу просителя, $y_i = 1$, или сбросить его в Гудзон, $y_i = 0$. Решение принимается по правилу

$$\begin{cases} y_i^* = \beta \ln x_i + u_i, \\ y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } y_i* > 0, \\ 0, \text{ если } y_i* \le 0 \end{cases} \end{cases}$$

Здесь $x_i \in [0;1]$ — уважительность просьбы. Настроение Крёстного Отца, u_i, имеет экспоненциальное распределение с $\lambda = 1$. Величина y_i^* — не наблюдаема, известны только x_i и y_i.

1. Выпишите функцию правдоподобия для оценки данной модели.
2. Известно, что $\hat{\beta} = 2$, а оценка информации Фишера равна 4. Постройте 95%-ый интервал для β.

13. Отличница Машенька оценивает парную регрессию по 30 наблюдениям. Коварный Вовочка случайным образом переставляет значения y_i в данных Машеньки перед построением регрессии. Чему равно ожидаемое значение R^2 в регрессии Машеньки?

14. Ранним утром бакалейщик выставил 100 килограмм огурцов на улицу перед своим магазином. Огурцы на 99% состоят из воды. День был жарким и часть воды из огурцов испарилась. В конце дня огурцы состояли из воды на 98%. Сколько килограммов эти огурцы весили в конце дня (если бакалейщик не продал ни одного огурца)?