

УДК 517.925+517.93

## ОБ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДИСКРЕТНОГО АТТРАКТОРА ЛОРЕНЦА В НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ

*А. С. Гонченко<sup>1</sup>, Е. А. Самылина<sup>2,1\*</sup>*

<sup>1</sup> Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

<sup>2</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
г. Нижний Новгород, Россия

В работе рассматривается существование дискретных аттракторов Лоренца в неголономной модели кельтского камня. Для этого в двухпараметрических семействах таких моделей определённых типов изучаются основные локальные и глобальные бифуркации, приводящие к возникновению аттракторов, а также к их разрушению. На плоскости управляющих параметров (угол динамической асимметрии камня — значение полной энергии) построена соответствующая бифуркационная диаграмма, на которой указана область существования дискретного аттрактора Лоренца и описаны её границы. Обнаружено сходство и различие в сценариях возникновения дискретного аттрактора Лоренца в неголономной модели кельтского камня и аттрактора в классической модели Лоренца.

### ВВЕДЕНИЕ

Среди классических неголономных моделей движения твёрдого тела по плоскости неголономная модель кельтского камня [1–3] является одной из наиболее интересных и сложных в смысле разнообразия встречающихся в ней типов динамики. Помимо регулярных движений (состояний равновесия, предельных циклов, инвариантных торов), в ней может наблюдаться и весьма богатая хаотическая динамика. Здесь могут существовать не только странные аттракторы различных типов [4–7], но также и смешанная динамика [6–8] — новый тип динамического хаоса, связанный с тем, что аттрактор системы пересекается с репеллером [9–11]. Вопросы разнообразия и мультистабильности хаотической динамики в модели кельтского камня, в том числе смешанной динамики, были рассмотрены в предыдущей работе авторов [7]. В данной статье мы продолжаем эти исследования, однако делаем акцент на задаче о существовании в модели странных аттракторов лоренцевского типа.

Заметим, что сама неголономная модель кельтского камня представляет собой 6-мерную систему дифференциальных уравнений, обладающую двумя первыми интегралами: интегралом энергии и геометрическим интегралом [4]. С учётом этих интегралов система становится 4-мерной и, таким образом, задача исследования её динамики может быть сведена к исследованию трёхмерного отображения Пуанкаре некоторой глобальной секущей. Поэтому аттракторы, существующие у таких отображений, будем называть дискретными, а наша основная задача будет связана с исследованием дискретных аттракторов Лоренца у отображения Пуанкаре модели кельтского камня.

Напомним, что гомоклиническим аттрактором называется странный аттрактор, который содержит выделенную седловую неподвижную точку [12]. Под дискретными аттракторами Лоренца будем понимать гомоклинические аттракторы многомерных отображений, для которых седловая неподвижная точка имеет одномерное неустойчивое многообразие, в случае, когда конфигурация этого многообразия похожа на «восьмёрку–бабочку» классического аттрактора Лоренца (см. также [12]). На рис. 1а показан пример такой конфигурации в случае трёхмерного

\* samylina\_evgeniya@mail.ru

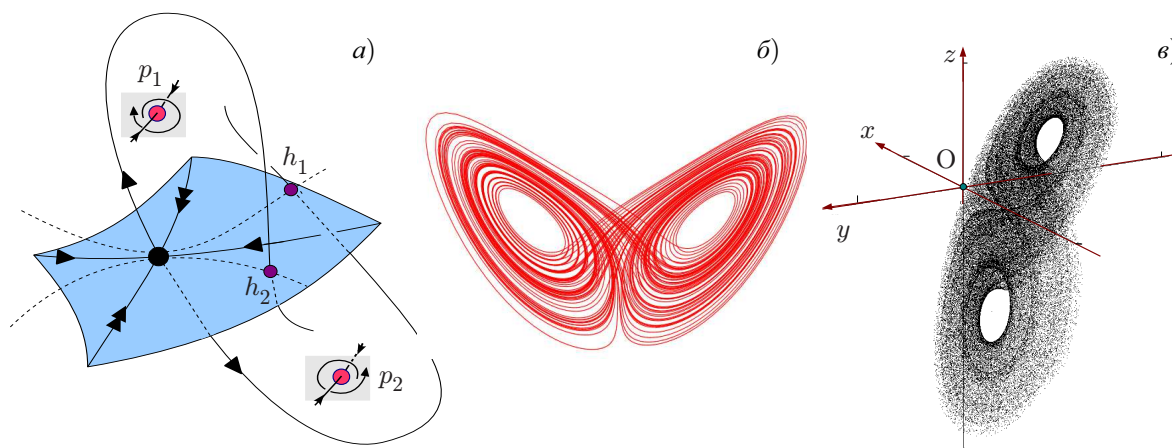


Рис. 1. Конфигурация неустойчивого многообразия седловой неподвижной точки  $O$  в случае дискретного аттрактора Лоренца (а), аттрактор в модели Лоренца (б) и дискретный аттрактор лоренцевского типа в трёхмерном отображении Эно (в) [13, 14]

диффеоморфизма, а на рис. 1б и в приведены, для сравнения, портреты классического аттрактора в модели Лоренца и дискретного аттрактора Лоренца в трёхмерном отображении Эно соответственно (см. также Приложение).

С математической точки зрения дискретные аттракторы Лоренца интересны прежде всего тем, что дают новые примеры настоящих странных аттракторов, т. е. таких аттракторов, у которых каждая траектория имеет положительный максимальный показатель Ляпунова, и это свойство сохраняется для всех близких систем. Для лоренцевских аттракторов (поточковых и дискретных) это условие выполняется, когда они являются псевдогиперболическими [14–16]<sup>1</sup>.

Дискретные аттракторы Лоренца были открыты в работе [13], в которой рассматривались трёхмерные отображения Эно вида  $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = M_1 - Bx + M_2y - z^2$ , где  $M_1, M_2$  и  $B$  – параметры ( $B$  – якобиан отображения). Пример такого аттрактора (при  $B = 0,7; M_1 = 0, M_2 = 0$ ) показан на рис. 1в. Основы теории дискретных аттракторов Лоренца были заложены в работе [22], в которой было показано, что такие аттракторы могут возникать у трёхмерных отображений в результате сравнительно простых универсальных бифуркационных сценариев, реализующихся в однопараметрических семействах (см. также работу [23] и Приложение). Псевдогиперболичность дискретных аттракторов Лоренца в семействах трёхмерных отображений Эно была численно установлена в работе [14].

Эти результаты показывают, что дискретные аттракторы Лоренца могут существовать и в системах, связанных с различными прикладными задачами. На наш взгляд, первой такой системой оказалась как раз неголономная модель кельтского камня: для неё в работах [6, 24] были обнаружены дискретные аттракторы Лоренца<sup>2</sup>, а также численно исследованы основные этапы возникновения и разрушения таких аттракторов в рамках однопараметрических семейств. В данной

<sup>1</sup> Псевдогиперболичность инвариантного множества означает, что в его точках система обладает свойством сильного сжатия в определённых инвариантных направлениях, а трансверсально к ним – свойством экспоненциального растяжения соответствующих объёмов, подробнее см. в работах [14–16]. Проверка условий псевдогиперболичности является, как правило, достаточно трудной задачей, выполнимой только с помощью компьютера. Например, для классического аттрактора Лоренца это было сделано в работе [17] с помощью методов интервальной арифметики (спустя более чем 30 лет после работы [18], в которой эти аттракторы были открыты). Недавно появились новые достаточно эффективные методы проверки условий гиперболичности и псевдогиперболичности для аттракторов различного типа, в том числе и дискретных, см., например, [14, 19–21].

<sup>2</sup> Совсем недавно дискретные аттракторы Лоренца были также найдены в некоторых моделях диффузионной конвекции [25, 26].

работе мы будем рассматривать двухпараметрические семейства модели кельтского камня, для которых изучим основные бифуркации, в том числе и бифуркации коразмерности два, приводящие к возникновению и разрушению дискретных аттракторов Лоренца. Насколько мы знаем, такой подход к изучению динамики и бифуркаций данных аттракторов прежде не использовался.

### 1. НЕГОЛОНОМНАЯ МОДЕЛЬ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ

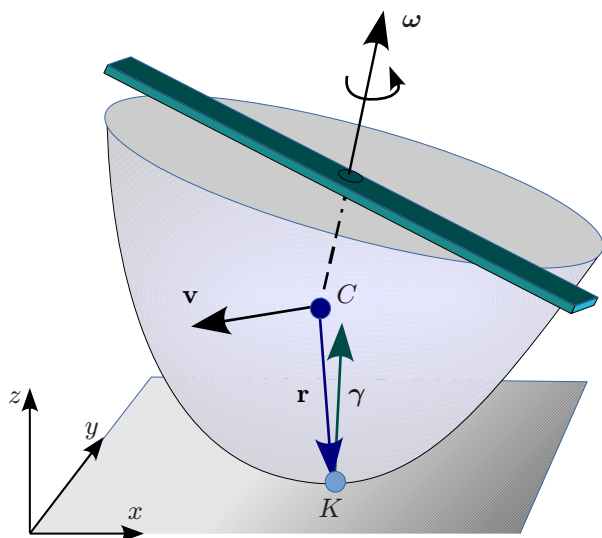


Рис. 2. Кельтский камень на плоскости: основные векторные величины

Кельтским камнем называется округлое твёрдое тело, движущееся по плоской поверхности и обладающее свойством динамической асимметрии. Последнее проявляется уже в простейших экспериментах следующим образом. Если положить такой камень на ровную плоскую поверхность и закрутить его вокруг вертикальной оси в некотором направлении, например против часовой стрелки (при соответствующем распределении масс в теле), то он может устойчиво продолжить своё вращение, как и всякое обычное округлое тело. Однако если попытаться закрутить такой камень по часовой стрелке, то он, без всякой видимой причины, вскоре замедлит своё вращение, начнёт сильно раскачиваться, затем поменяет направление вращения на противоположное и, наконец, продолжит устойчиво вращаться против часовой стрелки.

Для исследования динамических свойств кельтского камня необходимо иметь адекватную математическую модель, описывающую его движение. Наиболее популярной и, в определённом смысле, самой простой является так называемая неголономная модель кельтского камня, основанная на предположении отсутствия проскальзывания при движении. Это условие (скорость точки контакта камня с плоскостью равна нулю) записывается как  $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость камня,  $\mathbf{v}$  — скорость его центра масс,  $\mathbf{r}$  — вектор, соединяющий центр масс камня с точкой его контакта с плоскостью (см. рис. 2). Здесь и далее все векторы вычисляются в подвижной системе координат, которая жёстко связана с телом и имеет начало в центре масс, при этом оси координат совпадают с главными осями инерции тела. В отличие от неё, абсолютная система координат  $Oxyz$  жёстко привязана к опорной плоскости.

Для составления неголономной модели используются хорошо известные законы механики: закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса, а итоговая система состоит из шести дифференциальных уравнений [4]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

характеризующих изменение моментов инерции  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$  и ориентации  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  кельтского камня (см. рис. 2). Здесь и далее точкой обозначается полная производная по времени.

Однако формально система (1) не замкнута: все входящие в правую часть переменные должны быть выражены через  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ . Для кельтского камня это можно сделать, например, следующим образом. Векторы  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  связаны соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \tag{2}$$

где  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — тензор инерции. Вектор  $\mathbf{r}$  зависит от угла динамической симметрии  $\delta$  и формы поверхности камня. Например, в случае кельтского камня в форме усечённого параболоида полагают, что  $\mathbf{r} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{r}}$ , где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица поворота между главными горизонтальными осями инерции и геометрическими осями параболоида, а вектор  $\tilde{\mathbf{r}}$  связан с вектором  $\boldsymbol{\gamma}$  с помощью формул

$$\tilde{r}_1 = -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad \tilde{r}_2 = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad \tilde{r}_3 = -h_c + \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2}, \quad (3)$$

в которых  $a_1$  и  $a_2$  — главные радиусы кривизны параболоида, а  $h_c$  — высота центра масс камня. Величина  $\dot{\mathbf{r}}$  также находится из соотношений (3).

Отметим, что система (1) имеет два интеграла

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (4)$$

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (5)$$

которые называются интегралом энергии и геометрическим интегралом соответственно. Здесь прослеживается определённая связь с гамильтоновыми системами, однако, в отличие от последних, неголономные модели твёрдого тела (и модель кельтского камня в том числе) обычно демонстрируют неконсервативное поведение траекторий на уровнях энергии  $\mathcal{H} = E = \text{const}$  [27]. Во многих случаях такое поведение связано с возникновением в них смешанной динамики [6, 28–30]

Заметим, что система (1) инвариантна относительно замены координат  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$  (или, что то же самое,  $\mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$ ) и обращения времени  $t \rightarrow -t$ . Другими словами, если в уравнениях системы (1) обратить время  $t$  и угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , сохранив ориентацию  $\boldsymbol{\gamma}$ , то уравнения примут прежний вид. Очевидно, замена координат  $h: \boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$  является инволюцией, т. е.  $h \circ h = Id$  и, следовательно, система (1) обратима.

С учётом интегралов (5) система задаётся четырёхмерным потоком. Все численные эксперименты с ней выполнены для соответствующего трёхмерного отображения Пуанкаре некоторой глобальной секущей. Для построения этого отображения используются так называемые переменные Андуайе–Депри,  $(L, H, G, g, l)$ , в которых условие  $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$  выполняется автоматически. Эти переменные задаются следующими соотношениями [4, 5]:

$$\begin{aligned} L &= M_3, & G &= \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, & H &= M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2 + M_3 \gamma_3, \\ l &= \arg(M_2 + iM_1), & g &= \arg[HL/G - G\gamma_3 + i(M_2 \gamma_1 - M_1 \gamma_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Обратный переход определяется выражениями

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & M_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \left( \frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \sin(g) \cos l, \\ \gamma_2 &= \left( \frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \sin(g) \sin l, \end{aligned}$$

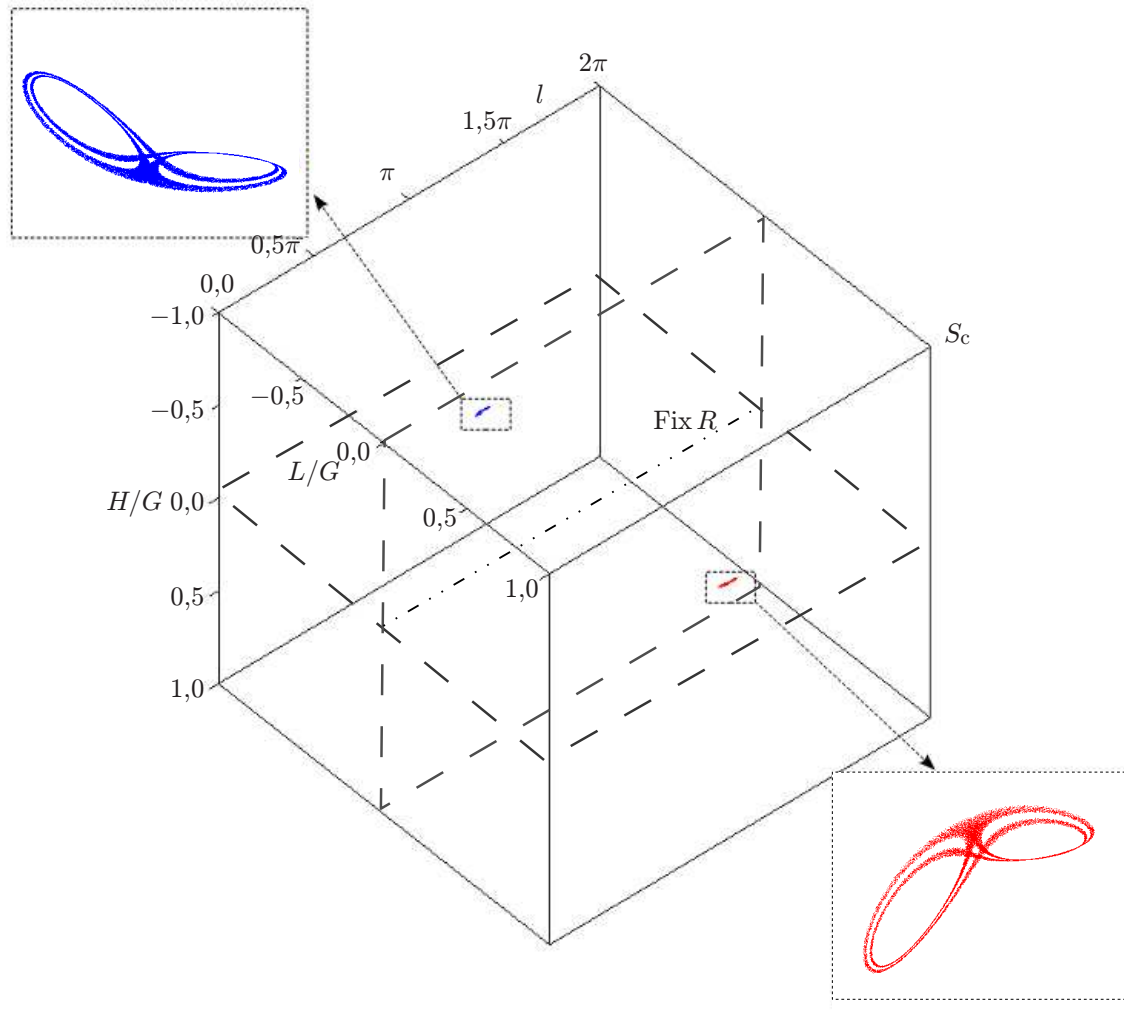


Рис. 3. В силу обратимости системы (1), из существования аттрактора (красный цвет) в фазовом пространстве  $\mathcal{S}$  её отображения Пуанкаре  $\mathcal{T}$  автоматически следует существование репеллера (синий цвет), симметричного аттрактору относительно линии  $\text{Fix } R$  неподвижных точек инволюции  $R$

$$\gamma_3 = \frac{HL}{G^2} - \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g. \tag{7}$$

В качестве секущей выбирается гиперплоскость  $\mathcal{S}: g = 0$  [4], а фазовое пространство отображения Пуанкаре  $\mathcal{T}$  при этом представляется в виде куба  $S_c = \{(H/G, L/G, l) \mid -1 \leq H \leq 1, -1 \leq L \leq 1, 0 \leq l < 2\pi\}$ , у которого грани  $l = 0$  и  $l = 2\pi$  отождествлены. Из обратимости модели кельтского камня следует, что отображение  $\mathcal{T}$  будет также обратимым относительно инволюции  $R: H \rightarrow -H, L \rightarrow -L, l \rightarrow l$ . Тогда, если у отображения  $\mathcal{T}$  существует, например, аттрактор, то у него также будет существовать и репеллер, симметричный аттрактору относительно линии  $\text{Fix } R: \{H = 0, L = 0\}$  (здесь  $\text{Fix } R$  — множество неподвижных точек инволюции  $R$ ). Применительно к нашей задаче можно сказать следующее: если в модели есть дискретный аттрактор Лоренца, то есть и симметричный ему репеллер Лоренца (см. рис. 3).

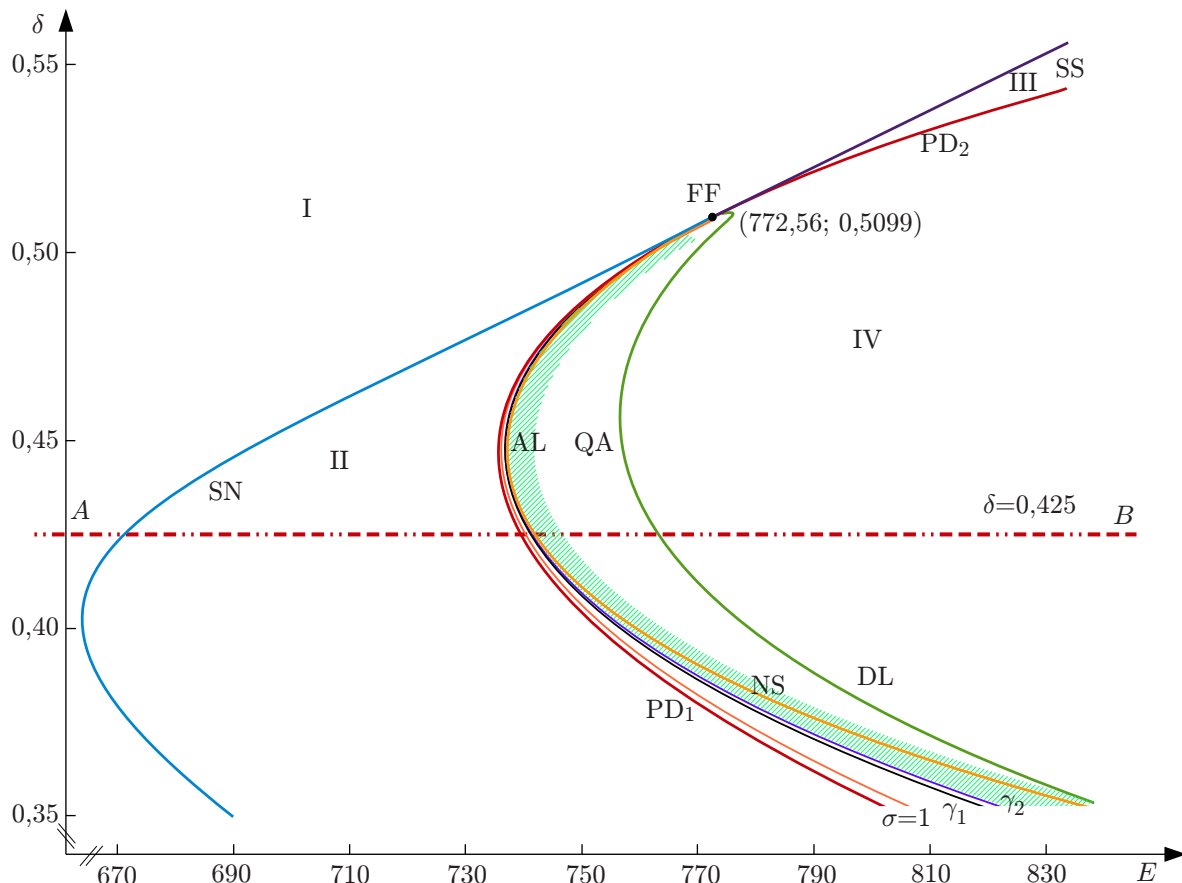


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $\delta$  и  $E$  для неголономной модели кельтского камня

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО И КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе рассматривается неголономная модель кельтского камня со следующими параметрами (такими же, как в работах [5, 6]):

$$I_1 = 2, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 7, \quad m = 1, \quad g = 100, \quad a_1 = 9, \quad a_2 = 4, \quad h = 1. \quad (8)$$

Мы изучаем динамику и бифуркации этой модели с помощью двухпараметрического семейства трёхмерных отображений Пуанкаре  $\mathcal{T}$  глобальной секущей  $\mathcal{S}$ . В качестве параметров рассматриваются значение энергии  $E$  и угол динамической асимметрии  $\delta$ . Как показано в работе [7], характерной особенностью неголономной модели кельтского камня (как и многих других неголономных моделей, см, например [28, 31]) является её мультистабильность. Поэтому мы исследуем динамику не на всём фазовом пространстве отображения Пуанкаре, а только в некоторой его поглощающей области  $D$ .

На рис. 4 изображена построенная численно бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $E$  и  $\delta$ . Она содержит несколько бифуркационных кривых, которые выходят из одной точки FF, отвечающей бифуркации коразмерности 2 неподвижной точки с мультипликаторами  $+1, -1$  и  $\lambda$ , где  $-1 < \lambda < 0$ . Эта бифуркация имеет название «fold-flip», т.к. сочетает в себе свойства двух бифуркаций коразмерности один – седло-узловой (fold) и удвоения периода (flip). В двумерном случае такая бифуркация была изучена в работе [32]: здесь она имеет такой же

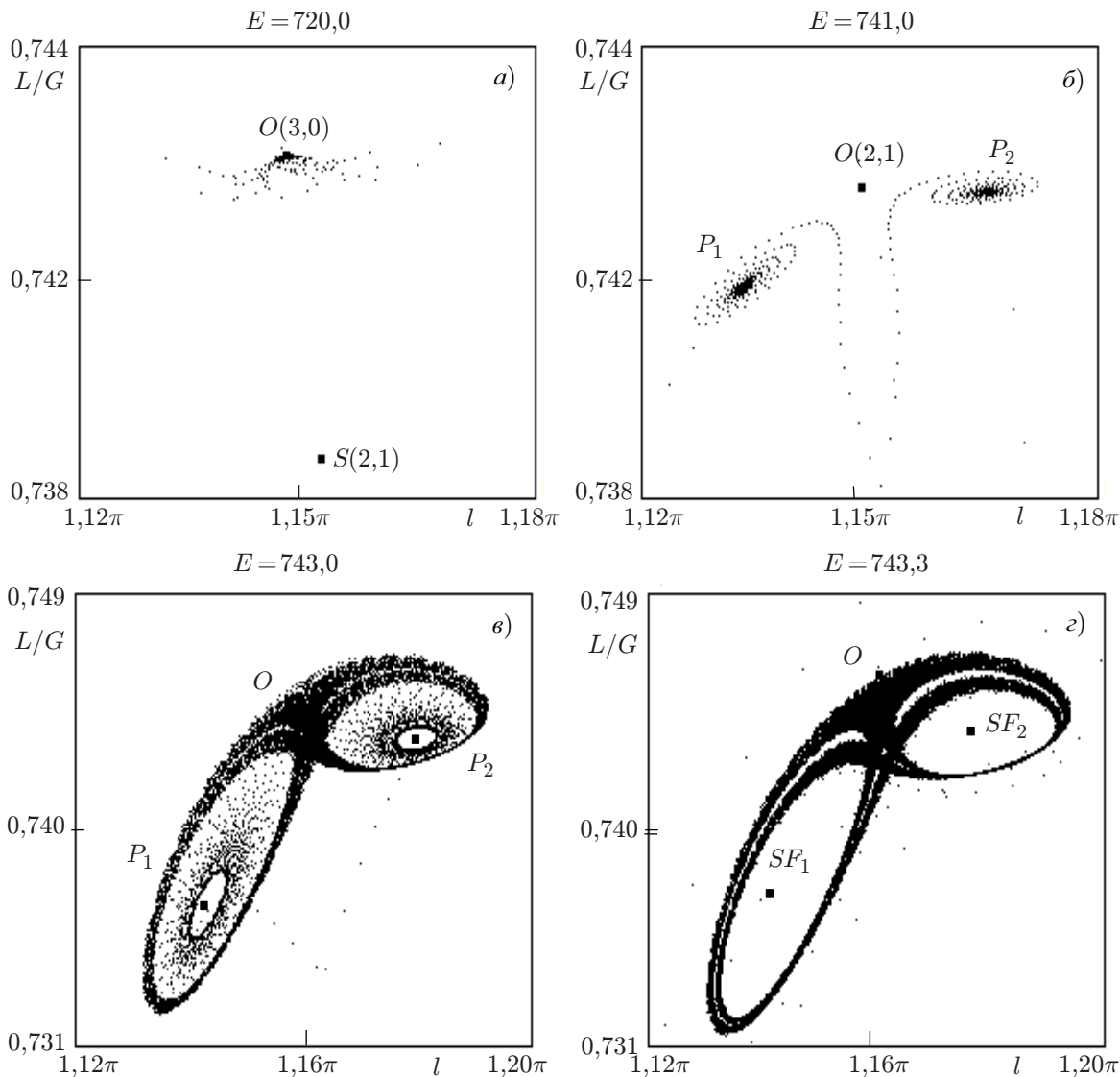


Рис. 5. Фазовые портреты (проекция на плоскость  $(l, L/G)$ ) отображения Пуанкаре  $\mathcal{T}$  при  $\delta = 0,425$  и различных значениях параметра  $E$  (путь  $AB$  рис. 4):  $E = 720,0$ , аттрактором является точка  $O$  (а);  $E = 741,0$ , аттрактором является цикл периода 2 из точек  $P_1$  и  $P_2$  (б);  $E = 743,0$ , мультистабильность: сосуществуют дискретный аттрактор Лоренца и  $(P_1, P_2)$  (в);  $E = 743,3$ , дискретный аттрактор Лоренца является единственным устойчивым инвариантным множеством в области  $D$  — сразу после перехода параметров через кривую  $NS$  (г)

характер, т.к. как центральное многообразие неподвижной точки в бифуркационный момент и близкий к нему является двумерным (см. раздел 2.1).

Кривые  $SN$  и  $SS$  отвечают бифуркациям рождения у  $\mathcal{T}$  неподвижных точек типа седло-узел (с мультипликаторами  $\lambda_1 = +1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$ ) и седло-седло (с мультипликаторами  $\lambda_1 = +1, 0 < \lambda_2 < 1, \lambda_3 < -1$ ) соответственно. При переходе через кривую  $SN$  из области I в область II седло-узел распадается на две точки: устойчивую  $O(3, 0)$  и седловую  $S(2, 1)$  (см. рис. 5а). При переходе через кривую  $SS$  из области I в область III седло-седло распадается на две седловые неподвижные точки с соседними индексами  $O(2, 1)$  и  $S(1, 2)$ . Здесь обозначения  $M(i, j)$  указывают, что точка  $M$  имеет  $i$ -мерное устойчивое и  $j$ -мерное неустойчивое инвариантные мно-

гообразия.

Кривые  $PD_1$  и  $PD_2$  отвечают бифуркациям удвоения периода неподвижных точек. При переходе через кривую  $PD_1$  устойчивая точка  $O(3, 0)$  претерпевает суперкритическую бифуркацию удвоения периода, в результате которой рождается устойчивый цикл  $(P_1, P_2)$  периода 2, т. е.  $P_2 = \mathcal{T}(P_1)$  и  $P_1 = \mathcal{T}(P_2)$ , а сама точка  $O$  становится седловой типа  $(2, 1)$  (см. рис. 5б). При переходе через кривую  $PD_2$  из области III в область IV уже седловая точка  $S(1, 2)$  претерпевает суперкритическую бифуркацию удвоения периода (она становится седлом  $(2, 1)$ , а в её окрестности рождается седловой  $(1, 2)$  цикл периода два). Кривая NS отвечает субкритической бифуркации Неймарка–Сакера, в результате которой устойчивый цикл  $(P_1, P_2)$  теряет устойчивость (так, на рис. 5в цикл  $(P_1, P_2)$  ещё является устойчивым, а на рис. 5г, уже после бифуркации, он является седло-фокусным циклом типа  $(1, 2)$ ).

Заметим, что бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 4, имеет чёткую асимметрию: её левая часть отвечает бифуркациям, способствующим возникновению странных аттракторов, а правая часть — их разрушению. Поглощающая область  $D$  появляется у отображения  $\mathcal{T}$  в результате седло-узловой бифуркации при переходе параметров из области I в область II через кривую SN. Пока параметры находятся в области II, область  $D$  содержит точку  $O(3, 0)$ , а её границей является двумерное устойчивое многообразие точки  $S(2, 1)$ .

После бифуркации удвоения периода (при переходе через кривую  $PD_1$ ) у точки  $O$  появляется отрицательный неустойчивый мультипликатор  $\lambda_3$ ,  $\lambda_3 < -1$ , а два её устойчивых мультипликатора  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют разные знаки,  $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$ . Одномерное неустойчивое многообразие  $W^u$  точки  $O(2, 1)$  делится этой точкой на две сепаратрисы  $W_1^u$  и  $W_2^u$ , такие, что  $W_1^u = \mathcal{T}(W_2^u)$  и  $W_2^u = \mathcal{T}(W_1^u)$ , т. е. точки с одной сепаратрисы «прыгают» на другую при каждой итерации отображения  $\mathcal{T}$ . Сразу после бифуркации удвоения сепаратриса  $W_1^u$  стремится к точке  $P_1$ , а  $W_2^u$  — к точке  $P_2$  (см. рис. 6а). Ещё один важный момент связан с тем, что седловая величина  $\sigma$  точки  $O(2, 1)$ , где  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_3|$ , становится больше 1 при переходе (слева направо) через кривую  $\sigma = 1$ .

Важно также отметить, что из точки FF выходят ещё три бифуркационные кривые  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Эти кривые отвечают уже глобальным бифуркациям.

Кривая  $\gamma_1$  отвечает возникновению тонкой гомоклинической структуры у седловой точки  $O(2, 1)$ , когда одномерные неустойчивые сепаратрисы начинают пересекаться с двумерным устойчивым многообразием этой седловой точки, образуя конфигурацию, напоминающую гомоклиническую восьмёрку-бабочку для классической системы Лоренца [18] (см. рис. 6б). Здесь  $\gamma_1$  является границей очень узкой зоны  $NZ_1$ , отвечающей существованию гомоклинических пересечений  $W^u(O)$  и  $W^s(O)$ . Сразу справа от  $NZ_1$  сепаратрисы  $W_1^u$  и  $W_2^u$  перестраиваются: теперь сепаратриса  $W_1^u$  «наматывается» на точку  $P_2$ , а  $W_2^u$  — на точку  $P_1$  (рис. 6в).

Кривая  $\gamma_2$  на диаграмме рис. 4 образует левую границу области существования дискретного аттрактора Лоренца. Сразу после перехода параметров через кривую  $\gamma_2$ , как показывают расчёты, неустойчивые сепаратрисы  $W_1^u$  и  $W_2^u$  уже не стремятся к точкам  $P_1$  и  $P_2$ , а блуждают по только что возникшему гомоклиническому аттрактору. Кривая  $\gamma_2$  является также границей зоны  $NZ_2$ , где сепаратрисы  $W_1^u$  и  $W_2^u$  пересекаются с устойчивыми многообразиями седловых замкнутых инвариантных кривых  $L_1$  и  $L_2$  периода 2, ранее возникших в результате гомоклинической бифуркации на кривой  $\gamma_1$ . В тот момент, когда сепаратрисы сходят с этих многообразий (и больше не стремятся к точкам  $P_1$  и  $P_2$ ), рождается дискретный аттрактор Лоренца<sup>3</sup>. В обла-

<sup>3</sup> Динамика отображения Пуанкаре  $\mathcal{T}$  при значениях параметров в области между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  очень сильно похожа на ту, что наблюдается в модели Лоренца, см. рис. III. В модели Лоренца аналогу кривой  $\gamma_1$  отвечает бифуркация ( $r = r_1$ ) образования гомоклинической восьмёрки седла, из которой затем рождаются два седловых предельных цикла (полные аналоги инвариантных кривых  $L_1$  и  $L_2$ ), а аналогу кривой  $\gamma_2$  соответствует бифур-



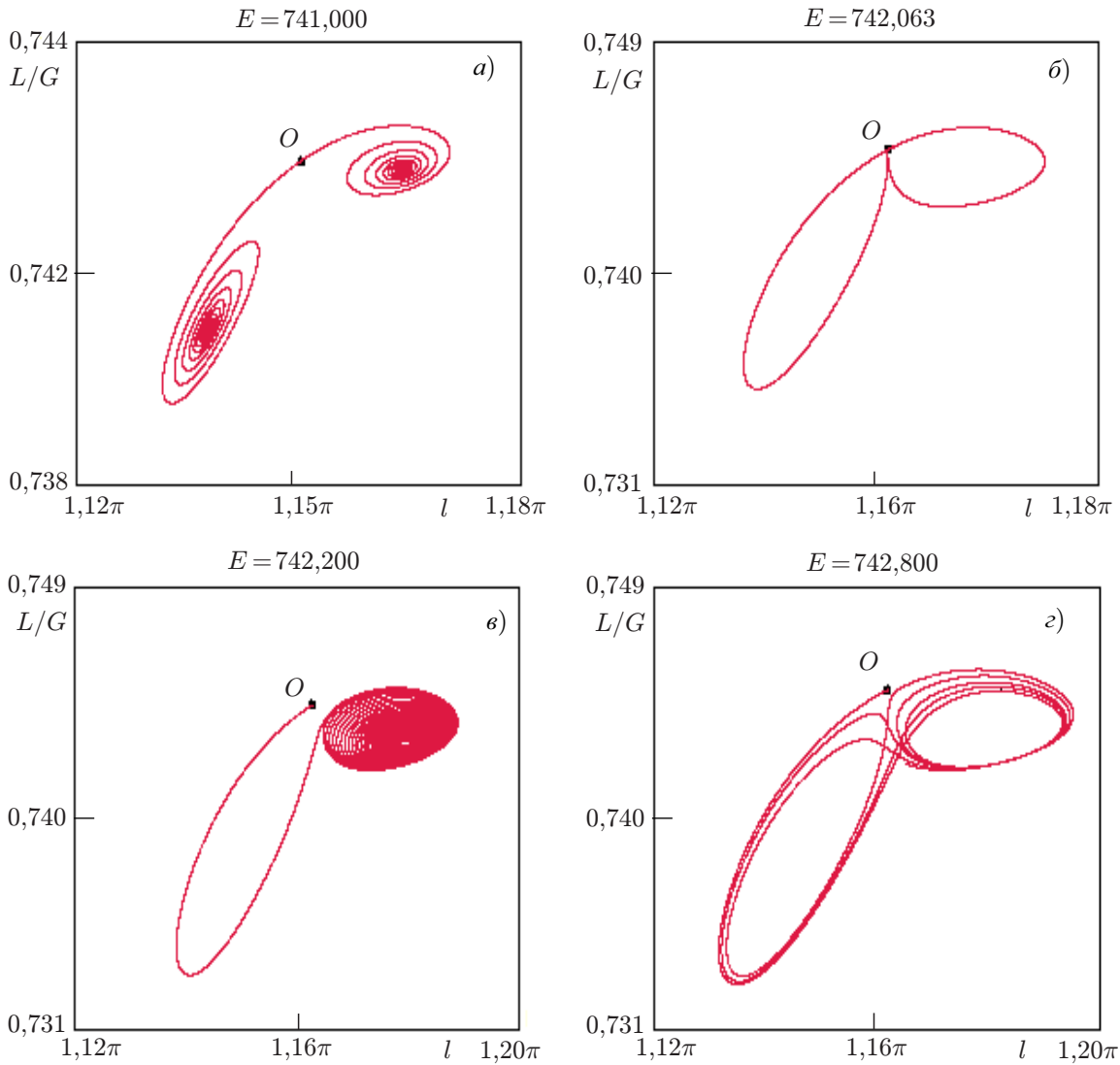


Рис. 6. Изменение поведения сепаратрис седла  $O(2, 1)$  при  $\delta = 0.425$  и увеличении  $E$  (путь  $AB$  на рис. 4). На панелях  $в$  и  $г$  показана только одна неустойчивая сепаратриса седла  $O$ , т. к. поведение другой будет симметричным

сти между кривыми  $\gamma_2$  и  $NS$  система мультистабильна: здесь аттракторами являются аттрактор Лоренца и устойчивый цикл  $(P_1, P_2)$  (см. рис. 5б). Этот цикл теряет устойчивость жёстким образом на кривой  $NS$  в результате субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. При  $(E, \delta) \in NS$  инвариантные кривые  $L_1$  и  $L_2$  «влипают» в устойчивый цикл  $(P_1, P_2)$ . Таким образом, справа от кривой  $NS$  дискретный аттрактор лоренцевского типа при таких параметрах является единственным аттрактором в рассматриваемой нами поглощающей области  $D$  (см. рис. 5з).

Кривая  $\gamma_3$  на диаграмме рис. 4 отвечает правой границе области существования дискретного аттрактора лоренцевского типа. На этой кривой неустойчивое многообразие седловой точки  $O$ , входящей в аттрактор, начинает пересекаться с двумерным устойчивым многообразием точки  $S(2, 1)$ . Это означает, что на кривой  $\gamma_3$  аттрактор лоренцевского типа (и вообще все гомоклини-

кация ( $r = r_2$ ) рождения аттрактора Лоренца, когда неустойчивые сепаратрисы седла ложатся на устойчивые многообразия циклов (в нашем случае пересекаются с ними).

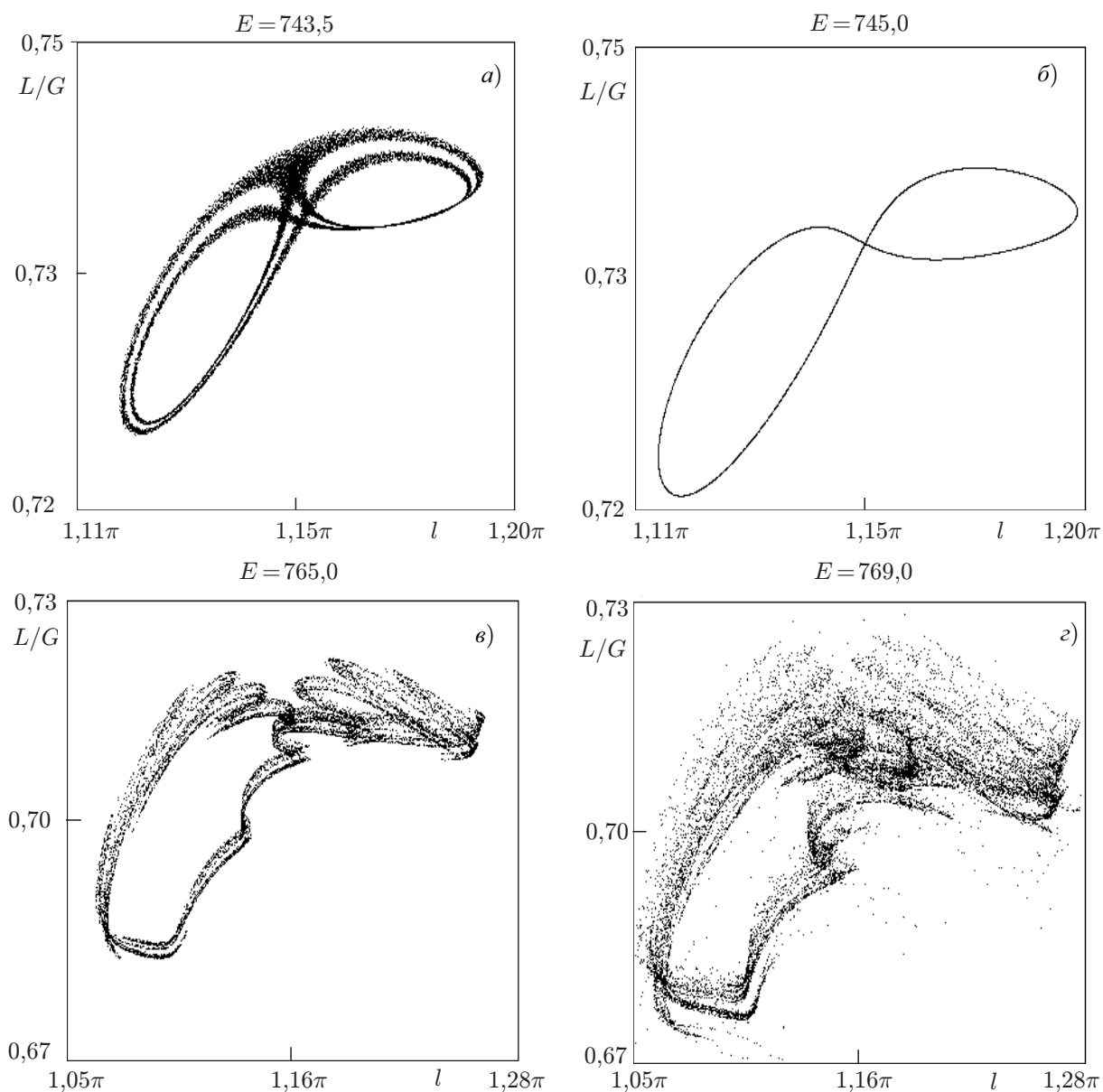


Рис. 7. Разрушение аттрактора при увеличении энергии  $E$  (путь  $AB$ ): дискретный аттрактор Лоренца ( $a$ ), устойчивая инвариантная кривая в окне устойчивости ( $б$ ), образование странных аттракторов типа «тор-хаос» ( $в, г$ )

ческие аттракторы, содержащие точку  $O$ ) заведомо претерпевает кризис: точки сепаратрис  $W_1^u$  и  $W_2^u$ , а вместе с ними и другие точки аттрактора начинают «убегать» из области  $D$ . Как показывают численные расчёты, в области  $D$  при этом могут ещё оставаться аттракторы, например типа тор–хаос, см. рис. 7в-г, но все они уже отделены от точки  $O$ .

### 2.1. Бифуркации около точки FF

На бифуркационной диаграмме рис. 4 штриховкой отмечена область существования дискретного аттрактора Лоренца. Эта область отделена от точки FF, поскольку при близких к ней значениях параметров динамика отображения существенно двумерная. Однако роль самой би-

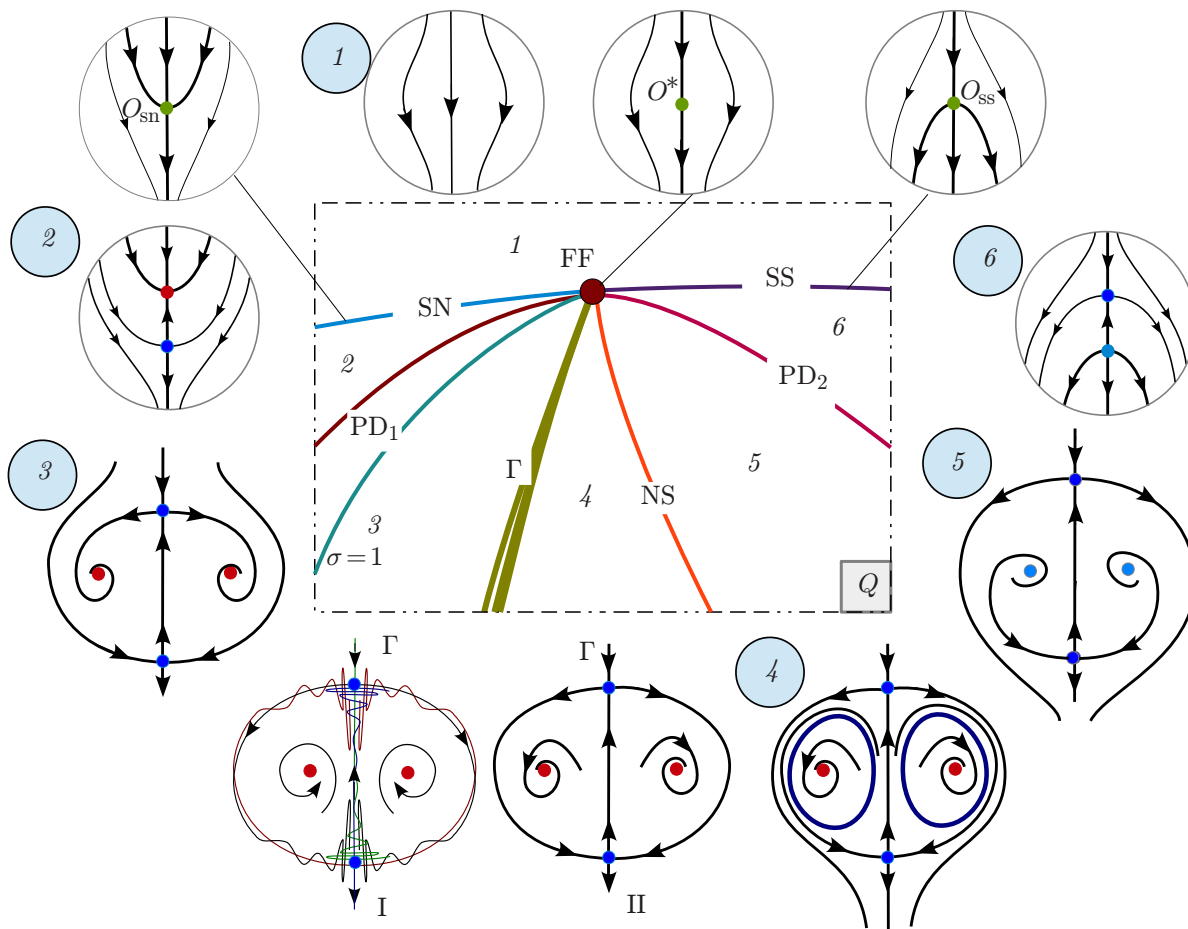


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма в малой окрестности  $Q$  точки FF

фуркации «fold-flip» в процессе образования дискретного аттрактора Лоренца весьма существенна, т. к. она и сопутствующие ей бифуркации коразмерности один формируют и поглощающую область  $D$ , и лоренцевские структуры периодических точек и их многообразий в этой области. Опишем окрестности точки FF.

При значениях параметров, близких к точке FF, у отображения Пуанкаре  $\mathcal{T}$  существует двумерное центральное многообразие  $W_c$ , на котором лежат все неподвижные точки и замкнутые инвариантные кривые. Если взять очень маленькую окрестность  $Q$  точки FF на плоскости параметров  $E$  и  $\delta$  (где существует многообразие  $W_c$ ), то можно построить на ней бифуркационную диаграмму для отображения  $\mathcal{T}|_{W_c}$  (см. рис. 8).

В случае двумерных отображений бифуркации неподвижных точек, имеющих мультипликаторы  $+1$  и  $-1$ , были изучены в работе [32] в рамках двухпараметрических семейств. Там было показано, что бифуркационные диаграммы могут быть самыми разными в зависимости от знаков коэффициентов нормальных форм. Один из таких случаев имеет место для отображения  $\mathcal{T}|_{W_c}$ .

Здесь бифуркационные кривые делят окрестность точки FF на 6 областей с разным поведением траекторий (см. рис. 8). Кривые SN и SS отвечают седло-узловым бифуркациям разных типов: в области 2 появляются устойчивая и седловая неподвижные точки, а в области 6 — седловая и вполне неустойчивая. При переходе из области 2 в область 3 устойчивая точка в результате бифуркации удвоения периода становится седловой, и в её окрестности рождается устойчивая точка периода 2. Для значений параметров из очень узкой зоны  $\Gamma$  инвариантные многообразия

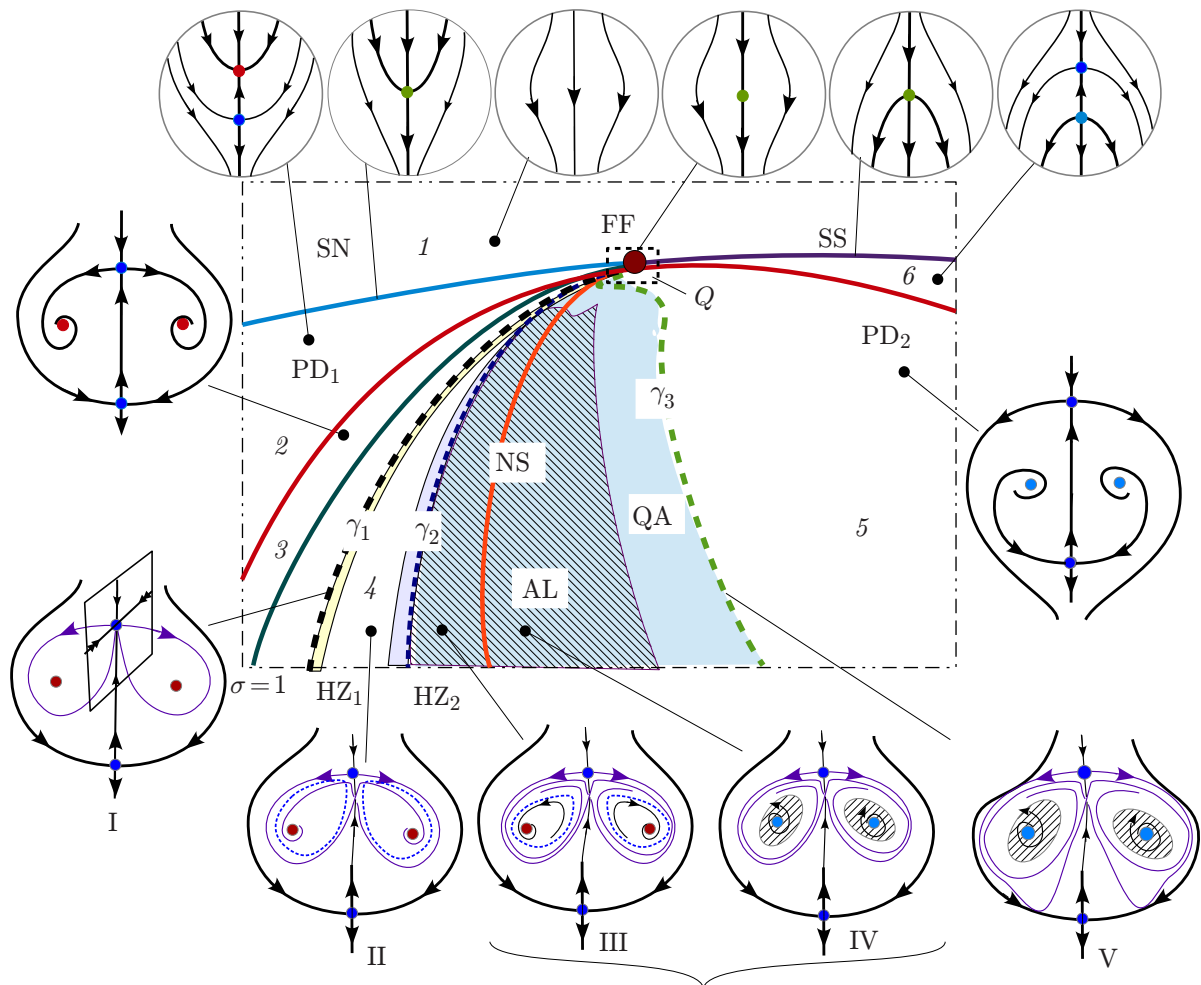


Рис. 9. Основные элементы бифуркационной диаграммы вне малой окрестности точки FF

всех седловых неподвижных точек пересекаются<sup>4</sup>. Из этой конфигурации в области 4 отражается неустойчивая инвариантная кривая периода 2, которая на кривой NS влипаёт в устойчивую точку периода 2. В результате этой субкритической бифуркации Неймарка—Сакера точка периода 2 становится неустойчивой в области 5. На кривой PD<sub>2</sub> она сливается с седловой неподвижной точкой, и последняя в результате этой бифуркации удвоения периода становится вполне неустойчивой в области 6. На кривой SS эта точка сливается с седловой, и в области 1 обе они исчезают.

Мы видим, что аттрактор Лоренца не может возникнуть. Однако вне окрестности Q ситуация резко меняется. Здесь центральное многообразие разрушается, и задача становится существенно трёхмерной. С гомоклинической зоной Г происходит резкая трансформация. В случае модели кельтского камня она разделяется на разные уже непересекающиеся зоны, из которых мы выделяем зоны около кривых  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  (см. рис. 9).

Как видно из рис. 9, указанные кривые расходятся достаточно далеко друг от друга при удалении от точки FF. И как только образуется видимый зазор между ними, структура бифуркаций у отображения  $\mathcal{T}$  резко меняется и появляется возможность для возникновения дискретного аттрактора Лоренца. На рис. 9 схематически показаны основные этапы его образования и раз-

<sup>4</sup> Для потоковой нормальной формы вместо зоны Г будет одна кривая, отвечающая образованию гетероклинических связей между седлами. На рис. 8 также показано различие в поведении неустойчивых сепаратрис седел на Г в случае отображений (I) и потоков (II).

рушения (I–V). Заметим, что этапы I–IV очень похожи на сценарий возникновения аттрактора Лоренца в модели Лоренца (см. работу [33] и Приложение). Однако аналога границы  $\gamma_3$  в модели Лоренца нет, т. к. в ней нет состояния равновесия  $S$ , дивергенция системы отрицательная и большая поглощающая область существует всегда.

В связи с этим заметим, что показанная на рис. 9 штриховкой область AL существования дискретного аттрактора Лоренца отделена от кривой  $\gamma_3$ , т. к. аттрактор начинает терять лоренцевскую структуру ещё до подхода к кривой  $\gamma_3$ : он становится квазиаттрактором (область QA на рис. 9), т. е. в нём появляются устойчивые инвариантные подмножества (периодические траектории, инвариантные кривые и т. п.), которые имеют, вообще говоря, очень узкие области притяжения [34, 35]. Иногда они могут проявляться в расчётах при значениях параметров из так называемых окон устойчивости.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдена область существования дискретного аттрактора Лоренца на плоскости параметров  $E$  и  $\delta$  неголономной модели кельтского камня с физическими параметрами (8). Было установлено, какие бифуркационные кривые образуют естественные границы этой области. На основе этого были изучены сценарии, приводящие к возникновению и разрушению аттрактора. Удивительным образом оказалось, что эти сценарии вплоть до мельчайших деталей совпадают с теми, которые наблюдаются в классической модели Лоренца (см. [33] и Приложение).

Дискретные аттракторы Лоренца были открыты в работе [13], а феноменологические сценарии их возникновения были описаны в работах [12, 22, 23], в которых также были даны примеры их реализации в конкретных моделях. Эти сценарии оказались в некотором смысле более простыми и грубыми по сравнению с теми, которые наблюдаются в модели кельтского камня. Хотя её динамика может быть изучена с помощью трёхмерного отображения Пуанкаре  $\mathcal{T}$ , последнее оказалось весьма необычным. В той области параметров, где существует дискретный аттрактор Лоренца, отображение  $\mathcal{T}$  выглядит как малое возмущение дискретизации по времени некоторого трехмерного потока, обладающего аттрактором Лоренца. Однако когда дискретный аттрактор Лоренца начинает разрушаться, эта аналогия сразу пропадает, и хаотическая динамика отображения  $\mathcal{T}$  выглядит вполне обычной и типичной для трёхмерных отображений. В частности, бифуркационные явления при разрушении аттрактора Лоренца в модели кельтского камня были численно исследованы в работе [6] (см. рис. 9 и П1 и комментарии к ним).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### ОБ АТТРАКТОРАХ ЛОРЕНЦА И СЦЕНАРИЯХ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Аттрактор Лоренца впервые был обнаружен в работе [18], опубликованной Э. Лоренцем в 1963 году. Наиболее полное его исследование было проведено в работах Афраймовича, Быкова и Шильникова [33, 36, 37], после которых стало ясно, что аттрактор Лоренца является примером настоящего странного аттрактора, без равномерной гиперболической структуры.

Классический аттрактор Лоренца существует в модели Лоренца

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (\text{П1})$$

при  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  и  $b = 8/3$  [18]. В работе [33] были прослежены бифуркации, приводящие к его возникновению, в семействе с параметром  $r$  при фиксированных  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . Результаты этих исследований проиллюстрированы на рис. П1.

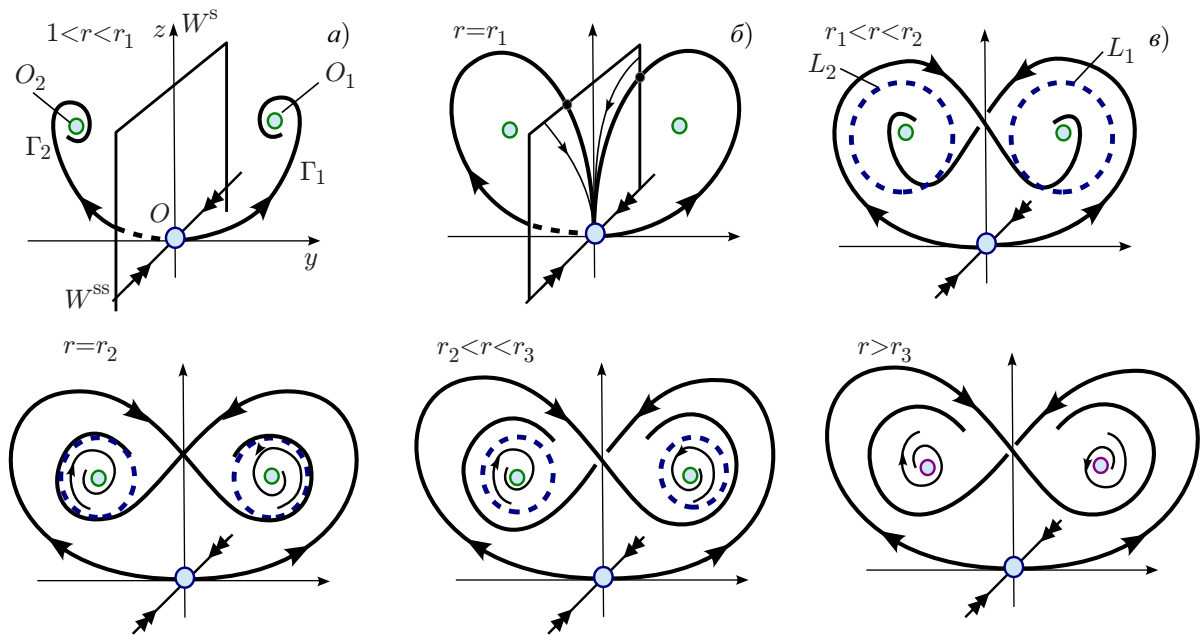


Рис. П1. Сценарий возникновения аттрактора Лоренца в модели Лоренца по работе [33]

Заметим, что система (П1) допускает замену вида  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$  и всегда имеет состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$ . При  $r < 1$  это равновесие устойчиво, при  $r = 1$  оно претерпевает бифуркацию вилки, которая из-за симметрии имеет коразмерность 1. В результате при  $r > 1$  состояние равновесия  $O$  становится седлом типа  $(2, 1)$ , а в его окрестности рождаются два симметричных устойчивых состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  (рис. П1а). При этом одномерные неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  состояния равновесия  $O$  стремятся к точкам  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.

При  $r = r_1 \approx 13,92$  сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  образуют конфигурацию гомоклинической восьмёрки-бабочки (рис. П1б). При  $r > r_1$  они перестраиваются, и сепаратриса  $\Gamma_1$  стремится к точке  $O_2$ , а  $\Gamma_2$  — к  $O_1$ . Кроме того, поскольку седловая величина седла  $O$  положительна, из гомоклинической восьмёрки при  $r > r_1$  рождаются два симметричных друг другу седловых предельных цикла  $L_1$  и  $L_2$  (рис. П1в). Эти циклы играют важную роль в образовании аттрактора Лоренца. В частности, при  $r = r_2 \approx 24,06$  сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ложатся на устойчивые многообразия циклов  $L_1$  и  $L_2$ , и при  $r > r_2$  они больше не стремятся к равновесиям  $O_1$  и  $O_2$ . Момент  $r = r_2$  соответствует образованию аттрактора Лоренца. Наконец, при  $r = r_3 \approx 24,04$  седловые предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$  влипают в устойчивые фокусы  $O_1$  и  $O_2$ , которые при  $r > r_3$  становятся седло-фокусами типа  $(1, 2)$ . С момента  $r > r_3$  аттрактор Лоренца является единственным аттрактором в системе (П1)<sup>5</sup>.

Дискретные аттракторы Лоренца были открыты сравнительно недавно у трёхмерных отображений Эно [13] (см. также [12, 23, 38]). В работе [22] был предложен весьма простой универсальный феноменологический сценарий возникновения таких аттракторов у многомерных отображений. Этот сценарий может наблюдаться в однопараметрических семействах, и в нём можно выделить несколько основных этапов. Опишем эти этапы на примере семейства  $T_\mu$  ориентируе-

<sup>5</sup> Несколько другой сценарий наблюдается, например, в модели Шимицу—Мориока [39, 40]. Здесь равновесия  $O_1$  и  $O_2$  сначала теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова—Хопфа, из них рождается пара устойчивых предельных циклов, которые затем сливаются с седловыми циклами  $L_1$  и  $L_2$  и исчезают. Сразу после этого аттрактор Лоренца становится единственным аттрактором в этой модели.

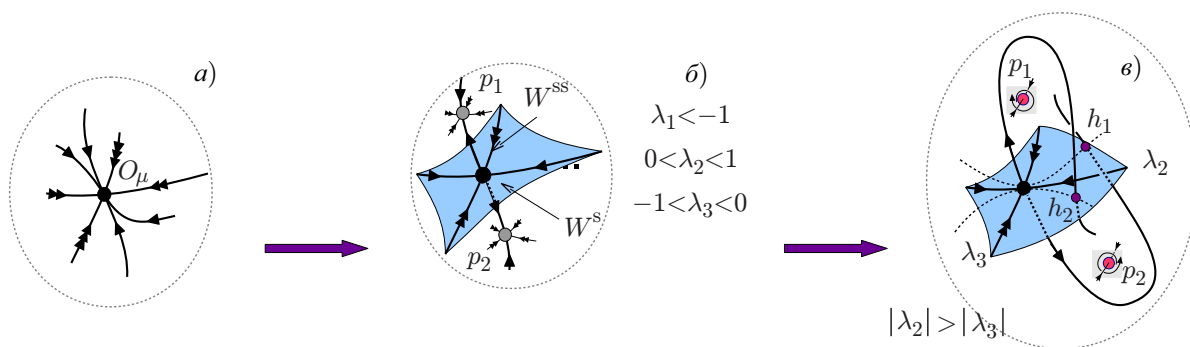


Рис. П2. К сценарию возникновения дискретного аттрактора Лоренца

мых трёхмерных отображений, имеющих при  $\mu_0 < \mu < \mu_1$  устойчивую неподвижную точку  $O_\mu$  (см. рис. П1а), которая появляется при  $\mu = \mu_0$  (например, в результате седло-узловой бифуркации) и теряет устойчивость при  $\mu = \mu_1$ .

В рассматриваемом сценарии эта потеря устойчивости происходит в результате бифуркации удвоения периода: сама точка  $O_\mu$  становится седловой типа (2,1), а в её окрестности рождается устойчивый цикл периода 2 из точек  $p_1$  и  $p_2$ , т.е.  $T_\mu(p_1) = p_2$  и  $T_\mu(p_2) = p_1$  (см. рис. П1б). При этом у точки  $O_\mu$  появляется отрицательный неустойчивый мультипликатор  $\gamma < -1$ . В силу ориентируемости отображения, его устойчивые мультипликаторы должны быть действительными и разных знаков. При малых  $\mu - \mu_1 > 0$  аттрактором отображения  $T_\mu$  является цикл  $(p_1, p_2)$ , а неустойчивые сепаратрисы седла стремятся к нему: одна из сепаратрис,  $\Gamma_1$ , стремится к точке  $p_1$ , а другая,  $\Gamma_2$ , — к  $p_2$ . При увеличении  $\mu$  точки  $p_1$  и  $p_2$  становятся фокусами, сепаратрисы наматываются на них, размах этого «наматывания» увеличивается и, наконец, неустойчивые сепаратрисы седла при некотором  $\mu = \mu_2$  начинают пересекаться с его устойчивым двумерным многообразием  $W^s(O)$ . При условии, что мультипликаторы  $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$  седла такие, что  $\gamma < -1$ ,  $-1 < \lambda_1 < 0$ ,  $0 < \lambda_2 < 1$  и  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ ,  $\sigma > 1$ , конфигурация сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будет похожа на лоренцевскую (см. рис. П2в). Дискретный аттрактор Лоренца возникает тогда, когда точки  $p_1$  и  $p_2$  теряют устойчивость. Это может происходить разными способами, например таким же, как и в модели Лоренца, когда в цикл  $(p_1, p_2)$  влипают седловые замкнутые инвариантные кривые периода 2, отродившиеся от гомоклинической восьмёрки при  $\mu > \mu_2$  (см. также [23, 38]).

Представленный сценарий выглядит даже проще, чем в модели Лоренца, т.к. этап, аналогичный тому, который наблюдается при  $r_1 < r < r_3$ , когда перестраиваются неустойчивые сепаратрисы, здесь, как правило, отсутствует. Модель кельтского камня составляет в этом смысле исключение. В ней, как было замечено в работе [6], гомоклинические и гетероклинические структуры оказываются очень тонкими (см. рис. П1 и 6, на которых показано поведение неустойчивых сепаратрис в случае потока и в случае отображения Пуанкаре в модели кельтского камня соответственно). В результате этого динамика отображения Пуанкаре и его бифуркации становятся очень похожими на то, что наблюдается в системе Лоренца.

Авторы благодарят С. В. Гонченко за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 18-71-00127), РФФИ (проекты 19-01-00607, 18-31-20052, 18-31-00431 и 18-29-10081) и Министерства образования и науки РФ (проект 1.3287.2017, проектная часть). Е. А. Самылина также благодарит программу фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астапов И. С. // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1980. № 2. С. 97.
2. Карапетян А. В. // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, № 5. С. 808.
3. Маркеев А. П. // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, № 4. С. 575.
4. Борисов А. В., Мамаев И. С. // Успехи физ. наук. 2003. Т. 173, № 4. С. 407.
5. Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 735.
6. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18, No. 5. P. 521.
7. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Самылина Е. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 10. С. 867.
8. Gonchenko S. V. // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. V. 5, No. 4. P. 365.
9. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 76.
10. Гонченко С. В., Тураев Д. В. // Труды МИАН. 2017. Т. 297. С. 133.
11. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017. V. 350. P. 45.
12. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 337. P. 43.
13. Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D. // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2005. V. 15, No. 11. P. 3493
14. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D. // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2018. V. 28, No. 11. Art. no. 1830036.
15. Тураев Д. В., Шильников Л. П. // Математический сб. 1998. Т. 189, № 2. С. 137.
16. Тураев Д. В., Шильников Л. П. // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 1. С. 23.
17. Tucker W. // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. V. 328, No. 12. P. 1197.
18. Lorenz E. N. // J. Atmospheric Sciences. 1963. V. 20, No. 2. P. 130.
19. Kuznetsov S. P., Kuptsov P. V. // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. V. 23, No. 7–8. P. 908.
20. Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. // 2018. arXiv:1809.07250. [math DS].
21. Kuptsov P. V., Parlitz U. // J. Nonlinear Science. 2012. V. 22, No. 5. P. 727.
22. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 1. С. 3.
23. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Turaev D. // Math. Model. Nat. Phenom. 2013. V. 8, No. 5. P. 32.
24. Гонченко А. С. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 2. С. 3.
25. Eilertsen J., Magnan J. // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2018. Т. 28, № 8. Art. no. 1850094.
26. Eilertsen J. S., Magnan J. F. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2018. V. 382. P. 1.
27. Козлов В. В. // Успехи механики. 1985. Т. 8, № 3. С. 85.
28. Kazakov A. O. // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Т. 18, № 5. С. 508.
29. Kuznetsov S. P. // Europhysics Lett. 2017. V. 118, No. 1. P. 10007.
30. Казаков А. О. // Изв. вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 8–9. С. 729.
31. Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 19, No. 6. С. 718.
32. Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E., van Veen L. // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2004. V. 14, No. 7. P. 2253.
33. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца. Дополнение I к книге: Дж. Марсден,



- М. Мак-Кракен «Бифуркация рождения цикла и её приложения». М.: Мир, 1980. 19 с.
34. Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. // *Nonlinear Dynamics and Turbulence* / Eds G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitmen, 1983. P. 1.
35. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. // *Computers & Mathematics with Applications*. 1997. Т. 34, № 2–4. С. 195.
36. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. // *ДАН СССР*. 1977. Т. 234, № 2. С. 336.
37. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. // *Труды Московского математ. общества*. 1982. Т. 44. С. 150.
38. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. // *Intern. J. Bifurcation and Chaos*. 2014. V. 24, No. 8. Art. no. 1440005.
39. Shimizu T., Morioka N. // *Physics Lett*. 1978. V. 66A, No. 3. P. 182.
40. Shilnikov A. L. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. V. 62. P. 338.

Поступила в редакцию 13 мая 2019 г.; принята в печать 28 июня 2019 г.

### ON THE REGION OF EXISTENCE OF A DISCRETE LORENZ ATTRACTOR IN A NONHOLONOMIC MODEL OF CELTIC STONE

*A. S. Gonchenko and E. A. Samylina*

In this work, we consider the problem of existence of discrete Lorenz attractors in a nonholonomic model of Celtic stone. To this end, the main local and global bifurcations leading to appearance and destruction of the attractors are studied in the two-parameter families of such models of certain types. The corresponding bifurcation diagram, in which the region of existence of the discrete Lorenz attractor is shown and its boundaries are explained, is developed on the plane of the governing parameters (the angle of dynamic asymmetry of the stone—the total-energy value). The similarities and the differences in the scenarios of appearance of the discrete Lorenz attractor in the nonholonomic model of Celtic stone and the attractor in the classical Lorenz model are found.