

УДК 517.925+517.93

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ

А. С. Гонченко¹, С. В. Гонченко¹, А. О. Казаков^{2,1*}, Е. А. Самылина^{2,1}

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

² Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород, Россия

Изучаются динамические свойства кельтского камня, движущегося по плоскости. Рассматриваются двухпараметрические семейства соответствующих неголономных моделей, в которых исследуются бифуркации, приводящие к смене типов устойчивых режимов движения камня, а также к возникновению хаотической динамики. Показано, что в таких моделях наблюдаются явления мультистабильности, когда устойчивые режимы различных типов (регулярные и хаотические) могут сосуществовать в фазовом пространстве системы. Показано также, что хаотическая динамика неголономной модели кельтского камня может быть весьма разнообразной. В этой модели в соответствующих областях параметров наблюдаются как спиральные странные аттракторы различных типов, в том числе так называемые дискретные аттракторы Шильникова, так и смешанная динамика, когда аттрактор и репеллер пересекаются и почти совпадают. Найден новый сценарий мгновенного перехода к смешанной динамике в результате обратимой бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

ВВЕДЕНИЕ

Кельтским камнем называется твёрдое тело с округлой симметричной поверхностью, но обладающее динамической асимметрией. Последнее свойство проявляется уже в простейших экспериментах следующим образом. Если положить такой камень на ровную плоскую поверхность и закрутить его вокруг вертикальной оси в некотором направлении, например, против часовой стрелки, то он может устойчиво продолжить своё вращение, как и всякое обычное округлое тело. Однако, если попытаться закрутить такой камень по часовой стрелке, то он, без всякой видимой причины, вскоре замедляет своё вращение, начинает сильно раскачиваться, затем меняет направление вращения на противоположное и, наконец, продолжает устойчиво вращаться против часовой стрелки ¹.

Очень долго не удавалось понять причины столь странного поведения кельтских камней и возникновения реверса. Существовали различные ошибочные объяснения этого эффекта, связанные с особенностью внутреннего устройства кельтского камня, со специфическими свойствами сил трения, возникающих при вращении камня, с вращением Земли вокруг своей оси и т. д.

С научной точки зрения исследованием кельтских камней одним из первых (в конце XIX века) начал заниматься английский физик Гильберт Томас Уолкер, давший в работе [2] некоторое физическое объяснение наблюдаемых эффектов. В 1979 году в работе [3] американский физик Джерл Уолкер привёл несколько типов кельтских камней (некоторые из них представлены на рис. 1), а также подробно описал возможные движения для каждого из типов.

* kazakovdz@yandex.ru

¹ Камни с такими динамическими свойствами известны очень давно. Ещё древние кельты использовали их, по-видимому, в культовых целях для демонстрации божественной силы. У кельтского камня («Celtic stone»), существует много других названий: «Anagyre», «Celt», «Rebellious celt», «Rattleback», «Rattlerock», «Spin bar», «Wobble stone» и т. д. Подробнее см. в работе [1].

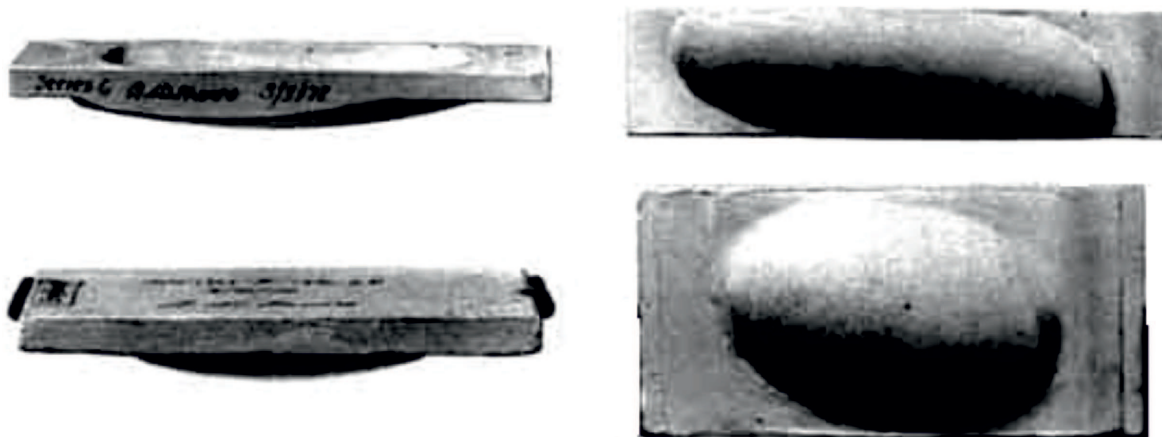


Рис. 1. Кельтские камни из статьи Дж. Уолкера [3]

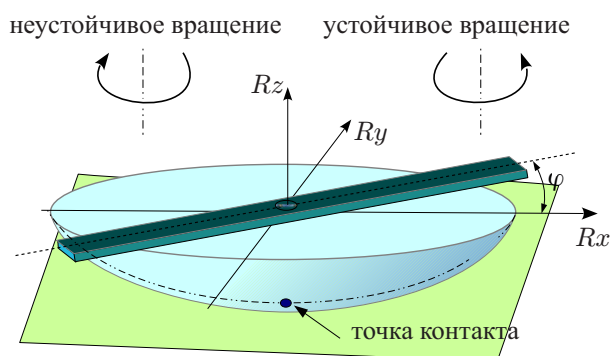


Рис. 2. Геометрическая модель кельтского камня. Основное тело — усечённый параболоид, вытянутый вдоль одной из горизонтальных геометрических осей (ось Rx) и сжатый вдоль другой (ось Ry). Тело имеет горизонтальную площадку, на которой в геометрическом центре закреплён достаточно массивный стержень. Этот стержень можно поворачивать в плоскости площадки, создавая тем самым определённую динамическую асимметрию

В качестве геометрической модели кельтского камня удобно рассматривать усечённый параболоид с массивным стержнем, закреплённым в геометрическом центре сечения (см. рис. 2). Если в таком камне есть полная симметрия расположения масс, когда, например, ось стержня сонаправлена с осью Rx или Ry (т. е. $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$), то эффект реверса отсутствует. Однако он сразу же проявляется, если $0 < \varphi < \pi/2$ и вращение достаточно быстрое.

Согласно Дж. Уолкеру «настоящий» кельтский камень должен обладать следующими свойствами.

1) Динамическая асимметрия. Одна из главных осей инерции камня вертикальна, а две горизонтальные оси инерции должны быть повернуты на некоторый угол относительно геометрических осей симметрии его поверхности. При этом главные горизонтальные моменты инерции камня должны быть разными.

2) Геометрическая асимметрия. Поверхность камня должна иметь форму лодочки, т. е. радиусы кривизны его поверхности в точке контакта с опорной плоскостью должны быть различными.

В данной работе мы изучаем неголономные модели движения кельтского камня по плоскости. Такие модели исследовались во многих работах. Так, одними из первых вопросами устойчивости их динамики занимались Астапов [4], Карапетян [5] и Маркеев [6], после работ которых стало ясно, что основной причиной реверса кельтского камня является его динамическая асимметрия². Существование хаотической динамики в неголономной модели кельтского камня было открыто сравнительно недавно в работе Борисова и Мамаева [7], где было показано, что в ней могут возник-

² Геометрическая асимметрия тоже важна. Она, например, отличает «кельтский камень» от «волчка Чаплыгина», который имеет форму шара, но обладает динамической асимметрией за счёт неравномерного распределения масс. В этой модели совсем недавно также было обнаружено явление реверса [15].

катель странные аттракторы (см. также на эту тему работы [8–10]). В наших работах [11, 12] было показано, что в этой модели могут возникать не только странные аттракторы, но и смешанная динамика, а в некоторых моделях кельтского камня также могут существовать дискретные аттракторы Лоренца [13, 14]. Напомним, что смешанной динамикой называется недавно открытый новый, третий тип, динамического хаоса (наряду со странными аттракторами и консервативным хаосом), характеризующийся тем, что аттрактор и репеллер пересекаются и почти совпадают [16]. Такой тип хаоса характерен, в частности, для неконсервативных обратимых по времени систем [17–19]. Большинство неголономных моделей движения твёрдого тела принадлежат этому классу, и поэтому неудивительно, что в них часто обнаруживается смешанная динамика, см., например, работы [12, 20–22].

Статья построена следующим образом. Представление неголономной модели кельтского камня с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений даётся в разделе 1. Основные результаты статьи содержатся в разделе 2, в котором проводится бифуркационный анализ в случае двухпараметрических семейств. В качестве естественных управляющих параметров рассматриваются значение полной энергии камня \mathcal{H} (этот параметр будем обозначать E) и угол динамической асимметрии δ ³. Из физических соображений очевидно, что достаточно рассматривать угол δ в диапазоне от 0 до $\pi/2$. Основное внимание в данной работе уделяется вопросам устойчивости динамики неголономной модели кельтского камня. Мы прослеживаем основные бифуркации, связанные как с возникновением устойчивых (стационарных, периодических и хаотических) режимов, так и с их разрушением.

В разделе 3 эти бифуркации объясняются в контексте однопараметрических семейств с параметром E при фиксированном δ . Мы рассматриваем три случая: $\delta = 0,2$, $\delta = 0,6$ и $\delta = 1$. В разделе 4 обсуждается явление мультистабильности динамики кельтского камня, т. е. явление, при котором устойчивые режимы разных типов (регулярные—регулярные, регулярные—хаотические, хаотические—хаотические) сосуществуют в фазовом пространстве системы.

1. НЕГОЛОНОМНАЯ МОДЕЛЬ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ

Для исследования динамических свойств кельтского камня необходимо иметь адекватную математическую модель, описывающую его движения. Наиболее популярной и, в определённом смысле, самой простой является так называемая, неголономная модель, основанная на предположении отсутствия проскальзывания при движении (вращении и качении) камня по плоскости. Если обозначить векторы угловой скорости и скорости центра масс камня через ω и v соответственно, а вектор, соединяющий центр масс камня с точкой контакта, через r (см. рис. 3), то условие отсутствия проскальзывания при движении камня примет вид

$$v + \omega \times r = 0.$$

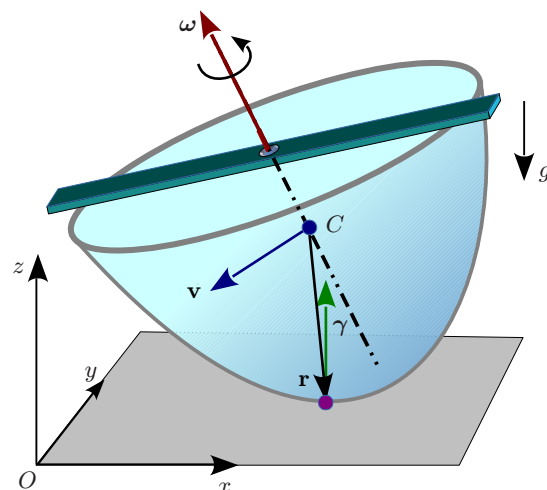


Рис. 3. Кельтский камень на плоскости: основные векторы

³ Заметим, что углы δ и φ (см. рис. 2), в общем случае отличаются: φ — угол между осью Ox и осью стержня, δ — угол между осью Ox и соответствующей горизонтальной осью инерции. Они совпадают, когда $\varphi = 0$; $\pi/2$ или в «нефизическом» случае, когда масса основного тела равна нулю, т. е. вся его масса сосредоточена в стержне.

Здесь и далее все векторы записываются в подвижной системе координат, которая жёстко связана с телом и имеет начало в центре масс, при этом оси координат совпадают с главными осями инерции тела. В отличие от неё, абсолютная система координат $Oxyz$ жёстко привязана к опорной плоскости.

1.1. Уравнения движения

Для составления неголономной модели используются хорошо известные законы механики: закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Итоговая система состоит из шести дифференциальных уравнений [7]:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}; \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

характеризующих изменение моментов инерции $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ и ориентации $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ кельтского камня (см. рис. 3). Здесь вектор \mathbf{M} и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (2)$$

где $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции, а вектор \mathbf{r} зависит от угла δ и формы поверхности камня. Например, в случае кельтского камня в форме усечённого параболоида полагают, что $\mathbf{r} = \mathbf{Q}\mathbf{r}^*$, где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица поворота между главными горизонтальными осями инерции и геометрическими осями параболоида, а компоненты вектора \mathbf{r}^* связаны с компонентами вектора $\boldsymbol{\gamma}$ формулами

$$r_1^* = -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2^* = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3^* = -\tilde{h} + \frac{a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2}{2\gamma_3^2}, \quad (3)$$

в которых a_1 и a_2 — главные радиусы кривизны параболоида, а \tilde{h} — высота центра масс камня.

Заметим, что используя соотношения (2) и (3), мы можем переписать систему (1) в замкнутой форме. Действительно, т.к. $\mathbf{r} = \mathbf{Q}\mathbf{r}^*$, то, в силу (3), вектор \mathbf{r} выражается через $\boldsymbol{\gamma}$. Также из (1) и (3) получаем, что $\dot{\mathbf{r}}$ можно выразить через $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\omega}$ как $\dot{\mathbf{r}} = f(\boldsymbol{\gamma}, a_1, a_2)\dot{\boldsymbol{\gamma}} = f(\boldsymbol{\gamma}, a_1, a_2)(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega})$, где $f(\boldsymbol{\gamma}, a_1, a_2)$ — некоторая матрица с размером 3×3 . Учитывая также соотношение (2), мы можем переписать систему (1) в форме автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка относительно переменных \mathbf{M} и $\boldsymbol{\gamma}$.

Отметим, что система (1) имеет два интеграла

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (4)$$

которые называются интегралом энергии и геометрическим интегралом соответственно. Условие $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ означает, что система (1) является фактически пятимерной: её фазовое пространство — это $R^3 \times S^2$, т.к. $\mathbf{M} \in R^3$ и $\boldsymbol{\gamma} \in S^2 = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) | \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\}$. Существование интеграла энергии \mathcal{H} означает, что фазовое пространство расслаивается на инвариантные относительно потока поверхности $\mathcal{H} = \text{const}$. Соответственно система в ограничении на каждую такую поверхность является четырёхмерной с фазовым пространством, гомеоморфным $S^2 \times S^2$.

Здесь прослеживается определённая связь с гамильтоновыми системами, однако, в отличие от последних, неголономные модели твёрдого тела (и модель кельтского камня в том числе) обычно

демонстрируют неконсервативное поведение траекторий на уровнях энергии [23]. В частности, в модели кельтского камня (1)–(3) на любом уровне энергии существуют состояния равновесия O_1 и O_2 , отвечающие так называемым перманентным вертикальным вращениям, у которых дивергенции отличны от нуля и противоположны по знаку при $0 < \delta < \pi/2$.

Заметим, что система (1) инвариантна относительно замены координат $\omega \rightarrow -\omega, \gamma \rightarrow \gamma$ (или, что то же самое, $\mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{M}, \gamma \rightarrow \gamma$) и обращения времени $t \rightarrow -t$. Другими словами, если в уравнениях системы (1) обратить время t и угловые скорости ω , сохранив ориентацию γ , то уравнения примут прежний вид. Очевидно, замена координат $h : \omega \rightarrow -\omega, \gamma \rightarrow \gamma$ является инволюцией, т. е. $h \circ h = \text{id}$ и, следовательно, система (1) обратима. Это означает, что если в системе есть какое-либо асимптотически устойчивое движение Λ , то обязательно существует симметричное ему вполне неустойчивое движение $h(\Lambda)$.

Во многих моделях кельтского камня при больших значениях энергии вертикальному вращению в одну сторону, например против часовой стрелки, отвечает, на соответствующем уровне $\mathcal{H} = E$, асимптотически устойчивое состояние равновесия динамической системы $O_1 : (\omega_1 = \omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, \omega_3 = \omega_0)$, где $\omega_0 = \sqrt{(E - mgh)/I_3}$. Тогда вертикальному вращению по часовой стрелке будет отвечать вполне неустойчивое состояние равновесия $O_2 : (\omega_1 = \omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, \omega_3 = -\omega_0)$. Если других устойчивых предельных режимов в системе (1) нет, то траектории любой начальной точки, в том числе заданной вблизи неустойчивого состояния равновесия, будут стремиться к устойчивому равновесию. Это как раз и означает, что начальное вращение камня по часовой стрелке должно смениться на устойчивое вращение против часовой стрелки.

1.2. Переменные Андуайе—Депри и отображение Пуанкаре

В рассматриваемой задаче, как и во многих других задачах динамики твёрдого тела, весьма удобны для исследования переменные Андуайе—Депри (L, H, G, g, l) , в которых условие $(\gamma, \gamma) = 1$ (геометрический интеграл) выполняется автоматически. Эти переменные задаются следующими соотношениями [7, 9]:

$$\begin{aligned} L &= M_3, & G &= \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, & H &= M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3, \\ l &= \arg(M_2 + iM_1), & g &= \arg[HL/G - G\gamma_3 + i(M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Обратный переход определяется выражениями

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & M_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \sin(g) \cos l, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \sin(g) \sin l, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\gamma_3 = \frac{HL}{G^2} - \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g. \quad (7)$$

Все графические иллюстрации численных расчётов в работе приведены для отображения Пуанкаре некоторой глобальной секущей $\mathcal{S} = \{g = 0\}$, на которой введены координаты $l, L/G$ и H/G . В этих координатах секущая \mathcal{S} может быть представлена как куб $\{0 \leq l < 2\pi, -1 \leq L/G \leq 1, -1 \leq H/G \leq 1\}$, у которого грани $l = 0$ и $l = 2\pi$ отождествлены.

2. БИФУРКАЦИИ В ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ

В данной статье мы рассматриваем неголономную модель кельтского камня в форме усечённого параболоида со следующими параметрами⁴:

$$I_1 = 5, I_2 = 6, I_3 = 7, m = 1, g = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, \tilde{h} = 1. \quad (8)$$

В работах [11, 12] были исследованы основные бифуркации в однопараметрических семействах с параметром E при фиксированном $\delta = 0,2$. В данной работе мы проводим двухпараметрический анализ, где в качестве параметров рассматриваются значение полной энергии $\mathcal{H}(E)$ и угол динамической асимметрии δ .

С помощью таких двухпараметрических семейств мы исследуем прежде всего бифуркации потери устойчивости основных регулярных режимов – состояний равновесия и предельных циклов, а также изучаем бифуркационные механизмы (сценарии) перехода к хаотической динамике. Основные элементы полученной при этом бифуркационной диаграммы на плоскости параметров δ и E представлены на рис. 4.

На этой диаграмме показаны основные бифуркационные кривые – границы областей устойчивости регулярных режимов (кривые B_1, B_2, B_3 и B_4). При этом только кривая B_2 является безопасной границей области устойчивости [24, 25] соответствующего режима, а остальные кривые – опасными. Кроме того, только для бифуркационной кривой B_2 удаётся получить её точное уравнение: в неголономной модели (1)–(3) с характеристиками камня (8) кривая B_2 имеет очень простое уравнение $E = 1300$. Для остальных кривых, уравнения которых можно записать в форме $E = B_i(\delta)$, где функции $B_i(\delta)$ являются однозначными и гладкими по δ , их графики на плоскости параметров δ и E построены численно (с помощью метода продолжения по параметрам соответствующих устойчивых режимов).

Изучение устойчивых режимов в модели удобно начинать с самого простого из них – состояния равновесия O_1 , которое является асимптотически устойчивым при достаточно больших E . При уменьшении E равновесие O_1 теряет устойчивость на бифуркационной кривой B_2 в результате мягкой (суперкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. При этом из O_1 рождается устойчивый предельный цикл (цикл Карапетяна), который существует в области между кривыми B_2 и B_3 . На кривой B_3 этот цикл сливается с седловым предельным циклом того же периода и исчезает.⁵

Однако тут сразу же проявляется другой регулярный устойчивый режим, впервые обнаруженный в работе Мамаева и Борисова [7] при $\delta = 0,2$ (так называемый ВМ-цикл). Область устойчивости этого предельного цикла – это область между кривыми B_1 и B_4 . Граница B_1 отвечает жёсткой (субкритической) бифуркации рождения тора (бифуркации Неймарка–Сакера): при $E > B_1(\delta)$ предельный цикл становится седловым типа (1,2), а при $E < B_1(\delta)$ – он асимптотически устойчивый, но от него отражается двумерный седловой тор.

Отметим, что кривая B_4 – нижняя граница области устойчивости ВМ-цикла – имеет составную структуру: она содержит участок B_4^{-1} с $0 < \delta < \delta_1^* \approx 0,52$, когда у цикла появляется

⁴ Следуя традиции работ [7, 8], при введении безразмерных параметров мы используем не совсем обычные единицы измерений. Так, линейные размеры здесь выражаются в сантиметрах, время – в единицах $c/\sqrt{10}$, масса – в килограммах (в частности, ускорение свободного падения g берётся здесь равным 100, т. к. стандартное 10 м/с^2 преобразуется в $100 \text{ см}/(c/\sqrt{10})^2$).

⁵ Симметрично по инволюции то же самое происходит и с вполне неустойчивым равновесием O_2 , т. е. из него на кривой B_2 рождается вполне неустойчивый предельный цикл, который исчезает в результате седло-узловой бифуркации на кривой B_3 .

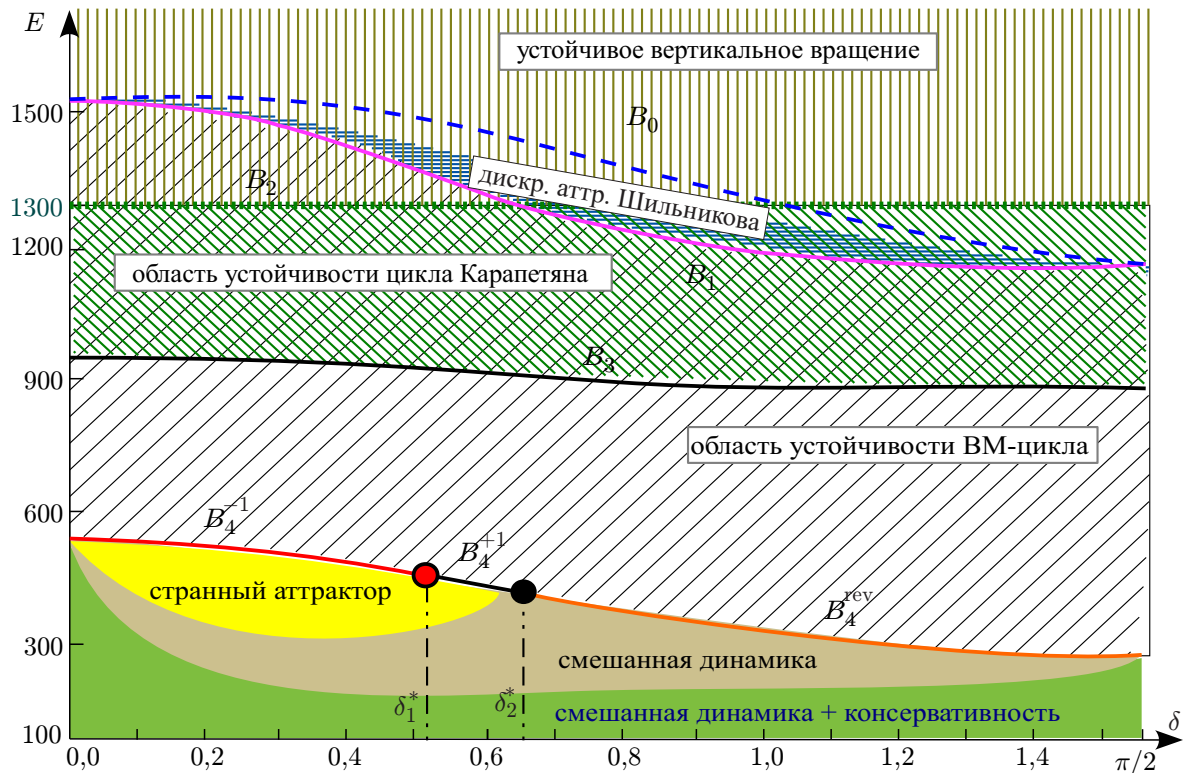


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (δ, E) для неголономной модели камня с физическими характеристиками (7): B_2 — суперкритическая бифуркация Андронова—Хопфа (из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл); B_1 — субкритическая бифуркация Неймарка—Сакера (из предельного цикла типа (1,2) рождается седловой тор, а сам цикл становится устойчивым); B_3 и B_4^{+1} — седло-узловая бифуркация для предельных циклов (устойчивый предельный цикл сливается с седловым); B_4^{-1} — субкритическая бифуркация удвоения периода (в устойчивый предельный цикл влипают седловой предельный цикл удвоенного периода, рождается седловой предельный цикл); B_4^{rev} — симметричная бифуркация $(1, \exp(i\varphi), \exp(-i\varphi))$ (устойчивый предельный цикл сталкивается с неустойчивым циклом на линии симметрии и оба они исчезают); B_0 — бифуркация седловая вилка (два предельных цикла типа (1,2) сливаются с симметричным предельным циклом типа (2,1), рождается предельный цикл типа (1,2)); красная точка между кривыми B_4^{-1} и B_4^{+1} — бифуркация коразмерности 2 типа «fold-flip»: в момент бифуркации у устойчивого ВМ-цикла появляются мультипликаторы $(1, -1, \lambda)$; чёрная точка между кривыми B_4^{+1} и B_4^{rev} — обратимая бифуркация коразмерности 2 (в момент бифуркации появляется симметричный предельный цикл с тройкой мультипликаторов $(1, -1, 1)$)

мультипликатор -1 , участок B_4^{+1} с $\delta_1^* < \delta < \delta_2^* \approx 0,65$, когда у цикла появляется мультипликатор $+1$, а также участок B_4^{rev} с $\delta_2^* < \delta < \pi/2$, когда цикл становится симметричным относительно инволюции h и его мультипликаторы образуют тройку $+1, \exp(i\varphi), \exp(-i\varphi)$. Важность границы устойчивости B_4 состоит в том, что при переходе через неё (при уменьшении E) в модели сразу (взрывным образом) возникает хаотическая динамика.

При этом, при переходе через кривую B_4^{-1} , происходит жёсткая (субкритическая) бифуркация удвоения периода: в ВМ-цикл «влипают» седловой цикл удвоенного периода, после чего ВМ-цикл становится седловым типа (2,1), и после этого в модели сразу же обнаруживается странный аттрактор, который является (потокowym) спиральным аттрактором, т. к. содержит седло-фокусное состояние равновесия O_1 (одновременно появляется и симметричный ему странный репеллер, содержащий седло-фокус O_2).

На кривой B_4^{+1} происходит седло-узловая бифуркация с циклами: устойчивый ВМ-цикл сливается с седловым циклом типа $(2,1)$, и они оба исчезают. После этого сразу же проявляется хаотическая динамика: это может быть либо спиральный странный аттрактор, содержащий седло-фокус O_1 , либо смешанная динамика (при углах δ , очень близких к δ_2^*) спирального типа, содержащая оба седло-фокуса O_1 и O_2 . При этом хаос, отвечающий смешанной динамике, также заведомо не является консервативным, т. к. седло-фокусы O_1 и O_2 имеют отрицательную и положительную дивергенцию соответственно.

На кривой B_4^{rev} происходит обратимая бифуркация (коразмерности один в случае обратимых трёхмерных отображений с размерностью линии неподвижных точек инволюции $\text{Fix}(h)$, равной 1 [26]), связанная с тем, что устойчивый ВМ-цикл сливается с симметричным ему по инволюции вполне неустойчивым циклом, и они оба исчезают. После этого сразу же проявляется смешанная динамика спирального типа.

Заметим, что область хаоса $E_U = 100 < E < B_4(\delta)$ имеет неоднородную структуру: в некоторой области параметров, примыкающей к кривой B_4 (см. рис. 4), наблюдаются странный аттрактор и симметричный ему странный репеллер, которые отделены друг от друга. Однако к этой области примыкает (снизу, т. е. при меньших значениях E) область со смешанной динамикой, при значениях параметров из которой аттрактор и репеллер пересекаются — при этом они почти совпадают.

Наконец, есть ещё одна область, отвечающая значениям E , близким к $E = E_U = 100$, в которой режим смешанной динамики сосуществует с режимом, практически неотличимым от консервативного. При этом при $E \rightarrow E_U$ консервативность начинает преобладать: в ней всё отчётливее становятся видны образования типа торов Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ-торов), а область в фазовом пространстве, отвечающая смешанной динамике, становится всё уже и уже: она концентрируется вдоль сепаратрис равновесий O_1 и O_2 (для отображения Пуанкаре — это линии $W^U(O_i) \cap S$ и $W^S(O_i) \cap S$, $i = 1, 2$).

2.1. Дискретный аттрактор Шильникова

Заметим, что хаотическая динамика имеет место также в достаточно узкой области параметров между кривыми B_0 и B_1 . Этот хаос имеет спиральный характер, т. к. возникающий здесь аттрактор в отображении Пуанкаре содержит неподвижную точку седло-фокус типа $(1,2)$, т. е. с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, которые, к тому же, пересекаются (см. рис. 5, где показаны дискретные спиральные аттракторы для различных значений δ и E). Такие аттракторы называются дискретными аттракторами Шильникова. По существу, они являются дискретными (для отображений) аналогами потоковых спиральных аттракторов, содержащих седло-фокусное состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием. Качественная теория таких потоковых спиральных аттракторов была заложена в работе Л. П. Шильникова [27]. Для дискретных аттракторов аналогичная теория была предложена в работе [14], см. также работы [28–30].

В рассматриваемой модели при переходе через кривую B_1 с увеличением параметра E дискретные аттракторы Шильникова разрушаются в результате кризиса, который вызывается возникновением гетероклинических пересечений между двумерным неустойчивым многообразием седло-фокуса $(1,2)$, входящим в аттрактор, и двумерным устойчивым многообразием седло-фокуса $(2,1)$, образующим естественную границу области притяжения этого аттрактора. Во всяком случае, при значениях $E > B_0(\delta)$ этот дискретный аттрактор уже разрушен и здесь наблюдается (численно) только один устойчивый режим — состояние равновесия O_1 . Здесь кривая B_0 отвечает бифуркации типа седловая вилка, которая имеет коразмерность один из-за наличия

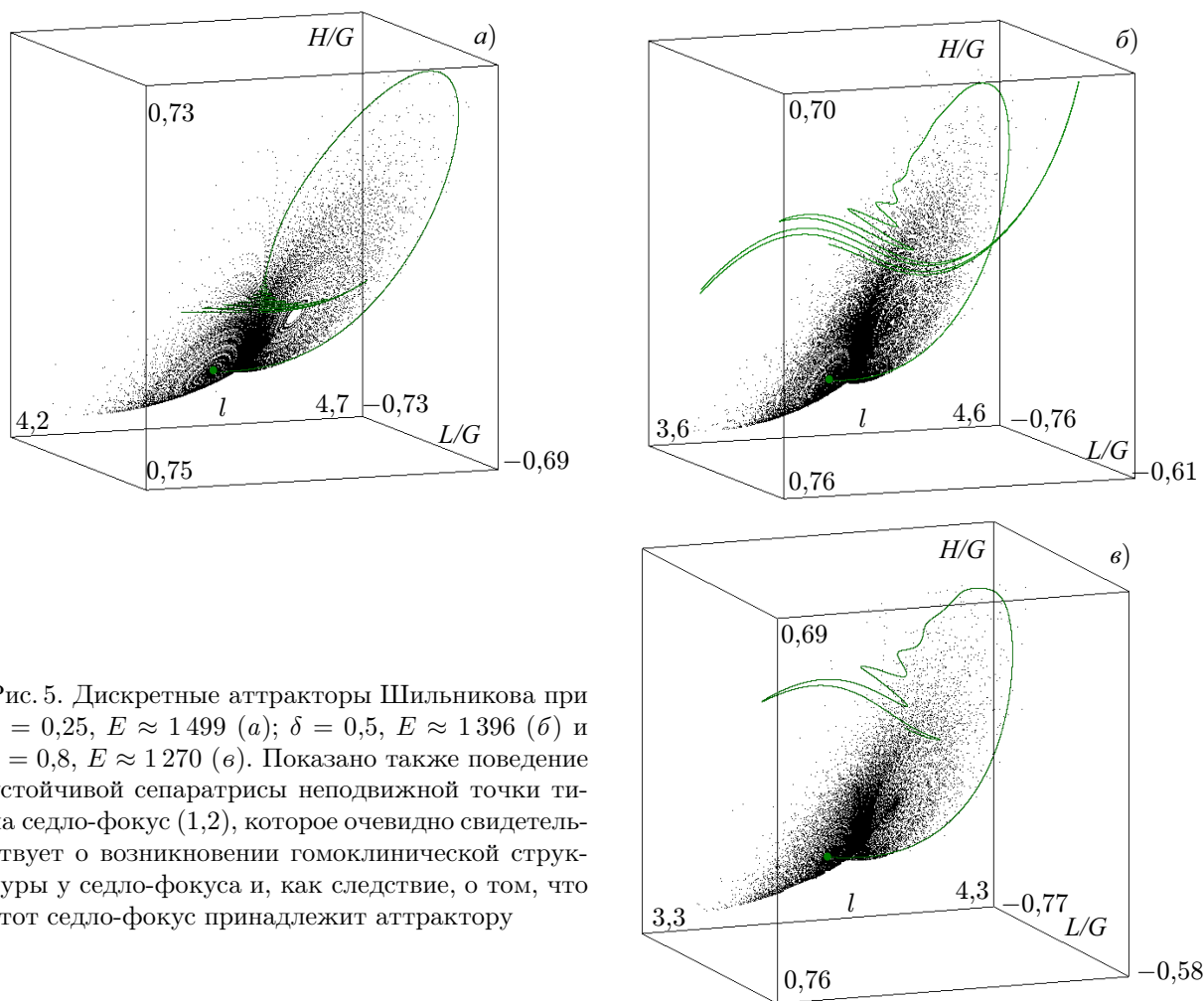


Рис. 5. Дискретные аттракторы Шильникова при $\delta = 0,25$, $E \approx 1499$ (а); $\delta = 0,5$, $E \approx 1396$ (б) и $\delta = 0,8$, $E \approx 1270$ (е). Показано также поведение устойчивой сепаратрисы неподвижной точки типа седло-фокус (1,2), которое очевидно свидетельствует о возникновении гомоклинической структуры у седло-фокуса и, как следствие, о том, что этот седло-фокус принадлежит аттрактору

у отображения Пуанкаре симметрии $l \rightarrow l + \pi$. В результате этой бифуркации два симметричных друг другу седловых ВМ-цикла типа (1,2) при увеличении E сливаются на кривой B_0 с симметричным седловым циклом типа (2,1), который в результате становится симметричным циклом уже типа (1,2).

3. ОПИСАНИЕ БИФУРКАЦИЙ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ

В этом параграфе мы даём больше иллюстративного материала для полученных результатов, используя однопараметрические семейства с управляющим параметром E и при некоторых фиксированных значениях угла динамической асимметрии δ (мы выбираем три значения $\delta_1 = 0,2$, $\delta_2 = 0,6$ и $\delta_3 = 1$ таким образом, что $0 < \delta_1 < \delta^* < \delta_2 < \delta^{**} < \delta_3 < \pi/2$).

Результаты раздела 2 удобно описывать с помощью так называемых «бифуркационных деревьев», представленных на рис. 6а и 7. На этих рисунках по горизонтальной оси отложены значения полной энергии E , а по вертикали — некоторая характерная координата устойчивого режима (координата L/G в его отображении Пуанкаре). В случае хаотических режимов (обл. I и II) закрашиваются области изменения этой координаты от минимального до максимального значений. Состояниям равновесия O_1 и O_2 соответствуют $L/G = 1$ и $L/G = -1$.

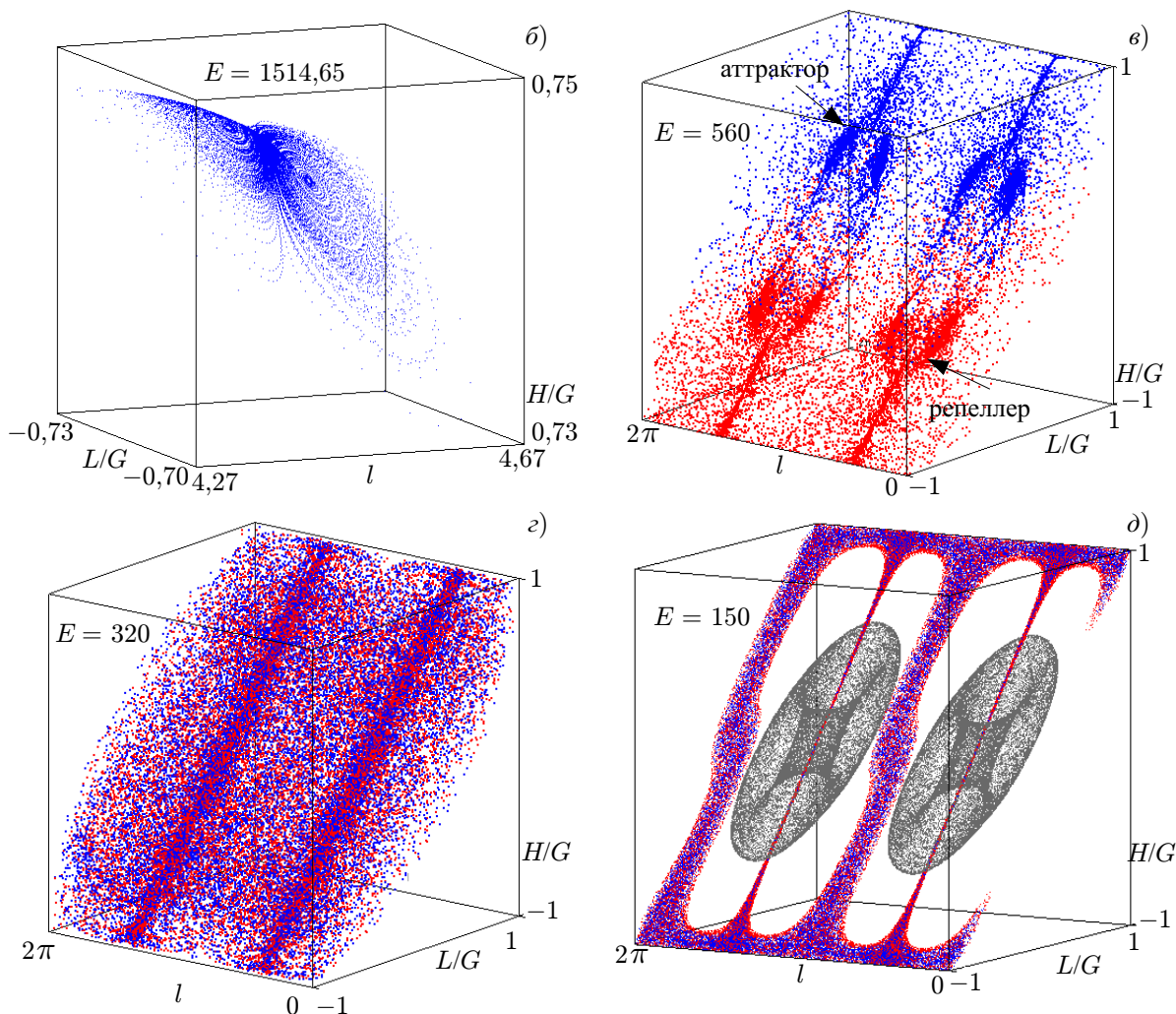


Рис. 6 (продолжение). Панели б–д — портреты хаотических режимов для отображения Пуанкаре, синим цветом обозначены итерации точек на аттракторе, красным — на репеллере, серым — на консервативных инвариантных множествах. На панели б изображён дискретный аттрактор Шильникова, на в аттрактор и репеллер не пересекаются, на панелях з и д они почти совпадают, так что соответствующее хаотическое множество (смешанная динамика) показано в среднем в фиолетовых тонах

$E_4 < E < E_1$, где $E_1 \approx 1510, E_4 \approx 561$. При $E > E_1$ они одновременно теряют устойчивость в результате жёсткой бифуркации рождения тора (субкритической бифуркации Неймарка–Сакера) и становятся седло-фокусами (1,2). Интересно отметить, что при значениях E , незначительно превышающих E_1 , траектории не уходят далеко от этих седло-фокусов, т.к. они включаются в новый устойчивый режим, уже хаотический, который очень быстро трансформируется в дискретный аттрактор Шильникова (см. рис. 6б). Этот аттрактор существует в достаточно узком интервале значений параметра E : при $E > E_0 \approx 1541$ его уже нет.

Линия $\delta = 0,2$ пересекает кривую B_4 в точке $E = E_4^- \approx 561$, принадлежащей участку B_4^{-1} . Соответственно, здесь при $E < E_4^-$ существуют спиральный аттрактор и симметричный ему по инволюции спиральный репеллер (см. рис. 6в). Как показывают численные расчёты, при $E = E_5 \approx 340$ эти аттрактор и репеллер сталкиваются и возникает смешанная динамика (см. рис. 6з). Однако при значениях E , очень близких к $E = 100$ (обл. Π), консервативная хаотиче-

ская динамика также проявляется. При этом по результатам численного эксперимента она очень похожа на близкую к интегрируемой гамильтонову динамику, в которой можно заметить инвариантные множества, похожие на КАМ-торы (см. рис. 6*д*).

3.2. Случаи $\delta = 0,6$ и $\delta = 1$

На рис. 7 показаны аналогичные рис. 6 бифуркационные деревья для модели при $\delta = 0,6$, $\delta_1^* < \delta < \delta_2^*$ (панель *a*) и при $\delta = 1 > \delta_2^*$ (*б*). Как показано в разделе 2, бифуркации в этих случаях, происходящие при пересечении кривых B_0, B_1, B_2 и B_3 , не отличаются от случая $\delta = 0,2$, а лишь происходят при несколько других значениях энергии E (см. рис. 7). Но, как видно из рис. 4, при $\delta > \hat{\delta} \approx 0,68$, последовательность этих бифуркаций может меняться: здесь при $\delta = \hat{\delta}$ пересекаются кривые B_1 и B_2 . Однако при пересечении линии B_4 бифуркации будут уже другими.

Линия $\delta = 0,6$ пересекает бифуркационную кривую B_4 в точке $E = E_4^+ \approx 458$, принадлежащей участку B_4^{+1} . В этом случае устойчивый ВМ-цикл исчезает в результате седло-узловой бифуркации (то же самое происходит со вполне неустойчивым циклом). Сразу же при $E < E_4^+$ проявляются спиральный аттрактор и (при обратных итерациях) спиральный репеллер, существующие на достаточно узком интервале значений параметра E (области I и I' на рис. 7*a*). При $E \approx 463$ спиральный аттрактор и репеллер сталкиваются, возникает смешанная динамика (области II на рис. 7*a*).

В случае $\delta = 1$ устойчивый (а также неустойчивый) ВМ-циклы доходят до линии симметрии $L/G = H/G = 0$, где, при $E = E_4^r \approx 363$, сталкиваются и исчезают в результате обратимой бифуркации, связанной с появлением у симметричной точки мультипликаторов $+1, \exp(i\varphi), \exp(-i\varphi)$ [26]. Заметим, что координаты пересечения этих циклов с секущей $S = 0$ по осям L/G и H/G ($L/G = H/G = 0$) будут совпадать, а по оси l — отличаться на π . В данном случае, при $E < E_4^r$ сразу возникает спиральная смешанная динамика, содержащая оба седло-фокуса O_1 и O_2 .

Фазовые портреты как при $\delta = 0,6$, так и при $\delta = 1$ для различных значений параметра E несущественно отличаются от соответствующих фазовых портретов в случае $\delta = 0,2$, изображённых на рис. 6*a, в* и *з*, поэтому здесь мы их не приводим.

Заметим, что области $\tilde{\Pi}$ на рис. 6 и 7 имеют двойную окраску. Тёмно-коричневый цвет фона и штриховки означает, что координата L/G точек хаотического режима «смешанная динамика» имеет область значений от -1 до $+1$. Светло-коричневый фон относится к режиму «консервативность» и отражает тот факт, что координата L/G точек на нём изменяется в ограниченных, симметричных по отношению к $L/G = 0$, пределах, и эти пределы растут по мере приближения к значению $E = 100$.

4. МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ

Одним из наиболее интересных свойств динамики кельтского камня (а также и многих других неголономных моделей, см., например, [7, 9, 15]) является её мультистабильность, которая проявляется в том, что в её фазовом пространстве при одних и тех же значениях параметров могут сосуществовать устойчивые режимы разных типов.

Из рис. 4 бифуркационной диаграммы для неголономной модели камня (8) легко видеть, что на плоскости параметров δ и E существуют области, в которых динамика мультистабильна. Существуют также области, где, как показывают численные эксперименты, соответствующая система моностабильна. Это, во-первых, область параметров выше кривых $E = B_0(\delta)$ и $E = B_2(\delta)$, в которой единственным устойчивым режимом является состояние равновесия O_1 . Во-вторых, это

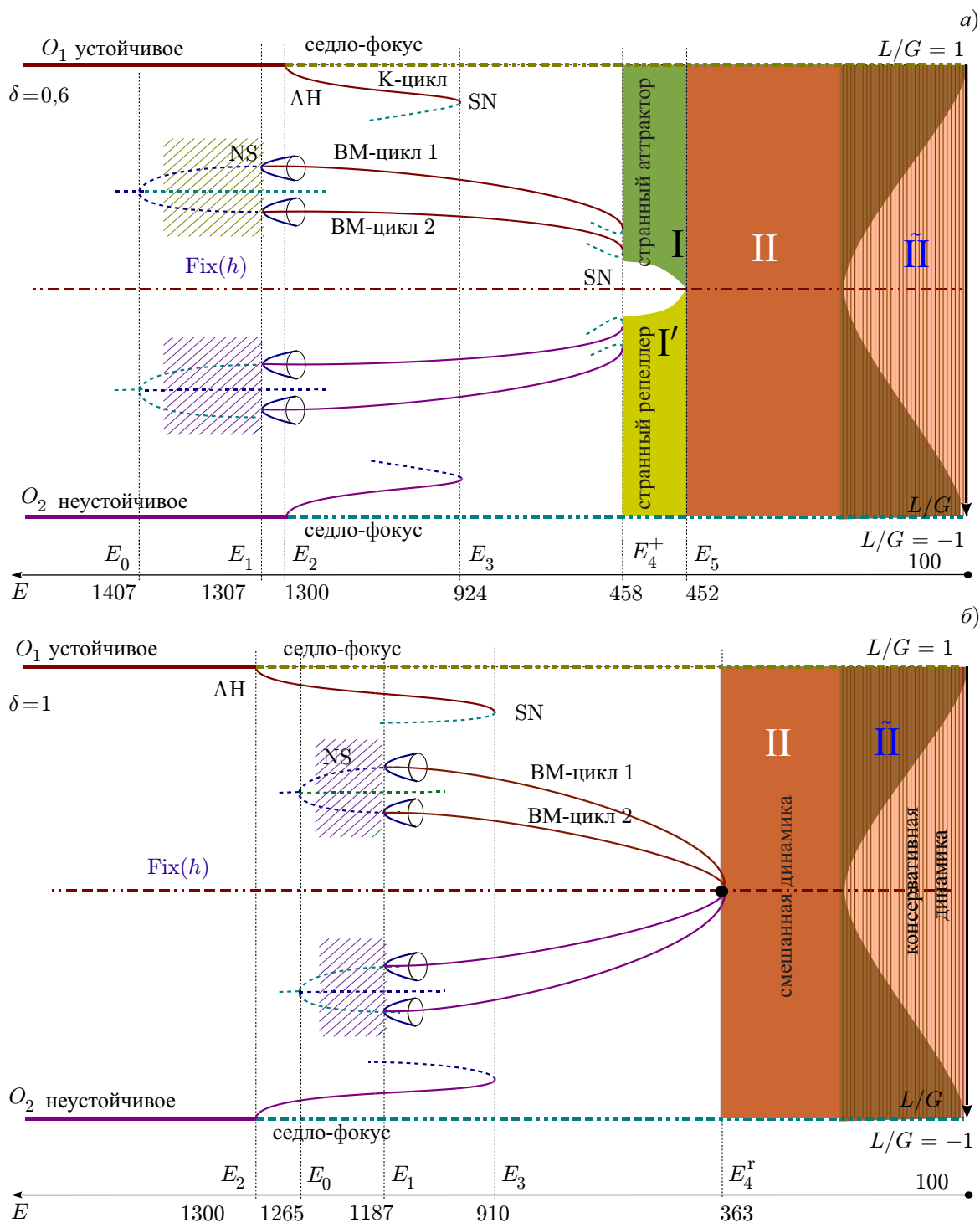


Рис. 7. Бифуркационное дерево для модели при $\delta = 0,6$ (а) и при $\delta = 1$ (б). На панели а ВМ-цикл теряет устойчивость на кривой B_4^+ в результате седло-узловой бифуркации, после которой наблюдается спиральный аттрактор, содержащий седло-фокус O_1 и спиральный репеллер, содержащий седло-фокус O_2 . На панели б ВМ-цикл теряет устойчивость на кривой B_4^{ev} в результате обратной бифуркации $+1, \exp(i\varphi), \exp(-i\varphi)$: он сталкивается с симметричным ему по инволюции вполне неустойчивым ВМ-циклом, и оба они исчезают, после чего сразу, жёстким образом, возникает смешанная динамика.

область $B_0(\delta) < E < B_2(\delta)$, где единственным устойчивым режимом является цикл Карапетыяна. Также это области, обозначенные нами как «странный аттрактор» и «смешанная динамика», в которых мультистабильность, по крайней мере в численных экспериментах, не обнаруживается, хотя здесь, конечно, могут существовать также различные устойчивые периодические траектории весьма больших периодов [31].

В остальных областях наблюдается мультистабильность. Так, область, соответствующая дискретному аттрактору Шильникова, пересекается с областями существования устойчивого равновесия O_1 и с областью существования цикла Карапетыяна. Последняя также пересекается ещё с областью существования устойчивого ВМ-цикла, т. е. в области $\{B_3(\delta) < E < B_2(\delta) \cap \{B_3(\delta) < E < B_1(\delta)\}$ сосуществуют цикл Карапетыяна и два устойчивых ВМ-цикла. В области $B_3(\delta) < E < B_4(\delta)$ имеются два устойчивых ВМ-цикла. Наконец, в области, обозначенной нами как «смешанная динамика + консервативность», наблюдается ещё один необычный вид мультистабильности, когда сосуществуют режимы «смешанная динамика» и «КАМ-структуры».

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Среди основных результатов статьи можно выделить следующие:

- 1) найдены области параметров, отвечающие существованию дискретных аттракторов Шильникова (см. рис. 5, 6б);
- 2) установлены и исследованы новые бифуркационные механизмы (сценарии) перехода к хаосу — к странным аттракторам и к смешанной динамике;
- 3) найден новый сценарий перехода к хаосу (смешанной динамике) в результате столкновения симметричных относительно инволюции устойчивого и вполне неустойчивого предельных циклов;
- 4) на плоскости параметров (δ, E) построена бифуркационная диаграмма (см. рис. 4), на которой указана граница (бифуркационная кривая B_4) между областями значений параметров, отвечающих регулярной и хаотической динамике;
- 5) на бифуркационной диаграмме найдены области мультистабильности и описаны её типы.

Исследования последних лет динамики неголономных моделей кельтского камня подтверждают тот эмпирический факт, что она может быть исключительно сложна и разнообразна. Использование численных методов вместе с применением современных подходов качественной теории и теории бифуркаций позволяет получить весьма содержательные и интересные результаты, которые выходят далеко за рамки собственно задачи исследования динамики кельтского камня. Они показывают, какие новые динамические явления могут возникать в многомерных моделях.

Одним из таких недавно открытых явлений является смешанная динамика. Фактически, неголономная модель кельтского камня оказалась первой моделью из приложений, в которой данное явление было обнаружено [12]. Это открытие вызвало большой интерес к исследованию других моделей, в том числе описывающих динамику твёрдого тела, на предмет изучения реализующихся в них бифуркаций и смешанной динамики.

Вопросы о бифуркационных сценариях возникновения смешанной динамики в неголономной модели кельтского камня также рассматривались в данной работе. В частности, был найден весьма простой подобный сценарий, связанный с «взрывным» переходом к смешанной динамике в результате обратимой бифуркации столкновения периодических стока и источника на бифуркационной кривой B_4 . Как показано в данной работе, эта кривая потери устойчивости регулярного режима состоит из трёх частей, отвечающих бифуркациям разных типов. Конечно, её полный бифуркационный анализ, с построением соответствующей бифуркационной диаграммы и указанием перестроек фазовых траекторий, является одной из самых важных и очевидных задач этой тематики, которой авторы статьи собираются заняться в ближайшее время. Другие вопро-

сы (являются ли указанные в статье бифуркационные сценарии характерными для большинства неголомомных моделей; какие новые особенности бифуркаций потери устойчивости в этих моделях можно ожидать (в частности, в одной из моделей кельтского камня был найден дискретный аттрактор Лоренца [12]); какова структура хаотических режимов, в том числе смешанной динамики) также кажутся весьма интересными и могут определять новые и весьма перспективные направления исследований.

Авторы благодарят Д. В. Тураева за полезные замечания. Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 14-12-00811. Авторы благодарят РФФИ (гранты 18-29-10081, 18-31-20052 и 18-31-00431) и Министерство образования и науки РФ (проект 1.3287.2017, проектная часть) за поддержку научных исследований. А. Казаков и Е. Самылина благодарят программу фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году за поддержку научных исследований. Исследования в разделах 2.1 и 3.1 выполнены в рамках гранта РФФИ 18-71-00127.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонченко А. С., Казаков А. О. Секреты динамики кельтского камня // Научное обозрение. 2012. № 2 (12). С. 14.
2. Walker G. T. // Proc. Cambridge Philosophical Society. 1895. V. 8. P. 305.
3. Walker J. // Scientific American. 1979. V. 241. P. 172.
4. Астапов И. С. // Вестник МГУ. Математика, механика. 1980. № 2. С. 97.
5. Карапетян А. В. // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, № 5. С. 808.
6. Маркеев А. П. // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, № 4. С. 575.
7. Борисов А. В., Мамаев И. С. // Успехи физ. наук. 2003. Т. 173, № 4. С. 407.
8. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 2. С. 192.
9. Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 735.
10. Борисов А. В., Казаков А. О., Кузнецов С. П. // Успехи физ. наук. 2014. Т. 184, № 5. С. 493.
11. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 3. С. 507.
12. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18, No. 5. P. 521.
13. Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D. // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2005. V. 15, No. 11. P. 3493
14. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 1. С. 3.
15. Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 19, No. 6. P. 718.
16. Гонченко С. В., Тураев Д. В. // Труды МИАН. 2017. Т. 297. С. 135.
17. Gonchenko S. // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. V. 5, No. 4. P. 365.
18. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017. V. 350. P. 45.
19. Kazakov A. O. // arXiv:1801.00150.[math.DS]. 2017.
20. Kazakov A. O. // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18, No. 5. P. 508.
21. Kuznetsov S. P. // Europhysics Lett. 2017. V. 118, No. 1. P. 10007.
22. Kuznetsov S. P. // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. V. 23, No. 2. P. 178.
23. Козлов В. В. // Успехи механики. 1985. Т. 8, № 3. С. 85.

24. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
25. Баутин Н. Н., Шильников Л. П. Дополнение I к книге Дж. Марседена и М. Мак-Кракена «Бифуркации рождения цикла и её приложения». М.: Мир, 1980. 292 с.
26. Lerman L. M., Turaev D. // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. V. 17, No. 3–4. P. 318.
27. Шильников Л. П. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1986. С. 150.
28. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2014. V. 24, No. 8. Art. no. 1440005.
29. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 337. P. 43.
30. Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. V. 21, No. 7–8. P. 939.
31. Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence / Eds. G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitmen, 1983. 1–13 p.

Поступила в редакцию 9 июля 2018 г.; принята в печать 28 октября 2018 г.

CHAOTIC DYNAMICS AND MULTISTABILITY IN THE NONHOLONOMIC MODEL OF CELTIC STONE

A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, A. O. Kazakov, and E. A. Samylina

We study dynamic properties of a Celtic stone moving along a plane. We consider two-parameter families of the corresponding nonholonomic models in which bifurcations leading to changing the types of stable motions of the stone, as well as chaotic-dynamics onset are analyzed. It is shown that the multistability phenomena are observed in such models when stable regimes of various types (regular and chaotic) can coexist in the phase space of the system. We also show that chaotic dynamics of the nonholonomic model of Celtic stone can be very diverse. In this model, in the corresponding parameter regions, one can observe both spiral strange attractors of various types including the so-called discrete Shilnikov attractors and mixed dynamics, when attractor and repeller intersect and almost coincide. A new scenario of instantaneous transition to the mixed dynamics as a result of reversible bifurcation of merging of the stable and unstable limit cycles is found.