

Пятов Павел Николаевич

pavel.pyatov@gmail.com

1 Теорема Эйлера о пятиугольных числах

Тема рекомендована студентам 1 курса.

Предлагается разобрать два доказательства этой теоремы: краткое (см. Г.Харди “Двенадцать лекций о Рамануджане”, лекция 6.) и поучительное (см. David M.Bressoud, “Proofs and confirmations: The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture”, глава 2) .

2 Многочлены Гаусса и q -биномиальная теорема

Тема рекомендована студентам 1 курса.

q -биномиальная теорема – это весьма содержательное обобщение бинома Ньютона.

David M.Bressoud, “Proofs and confirmations: The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture”, § 3.1, стр.73-80.

3 Формула крюков для подсчета числа стандартных таблиц Юнга

Тема рекомендована студентам 1 курса.

Диаграмма Юнга – это набор клеток на клетчатом тетрадном листе, скажем, в его первом квадранте, расположенных так, как если бы они притягивались к обеим сторонам квадранта. Диаграммы Юнга, состоящие из N клеток являются графическими представлениями всевозможных разбиений числа N в сумму натуральных слагаемых. Стандартные таблицы Юнга – это диаграммы, в клетках которых расставлены числа от 1 до N так, чтобы они возрастали слева-направо и снизу-вверх в строках и столбцах диаграммы. Диаграммы и стандартные таблицы Юнга применяются в теории представлений групп, при этом важно знать, сколько различных стандартных таблиц отвечают одной диаграмме Юнга. Формула крюков дает ответ на этот вопрос.

Тему можно разбирать, например, по статье J.Badlow "An elementary proof of the hook formula The Electronic Journal of Combinatorics, v.15 (2008) #R45

4 Задача о замощении прямоугольной доски доминошками

Тема рекомендована студентам 1-2 курса.

Важной характеристикой всякой матрицы является ее определитель. Оказывается, что из определителя кососимметричной матрицы всегда можно извлечь квадратный корень (в кольце многочленов от матричных компонент). Получившаяся величина называется Пфаффианом. Предлагается разобраться с определением Пфаффиана и, используя его, решить комбинаторную задачу о числе замощений прямоугольной области косточками домино.

М.Н. Вялый, “Пфаффианы и искусство расставлять знаки”, Математическое просвещение, сер. 3, вып. 9, стр. 129-142, 2005.

5 Плоские разбиения и непересекающиеся пути на решетке

Тема рекомендована студентам 1-2 курса.

Предлагается вывести производящую функцию Мак-Магона для числа плоских разбиений (так называются трехмерные обобщения диаграмм Юнга) с использованием техники счета непересекающихся путей на решетке.

David M. Bressoud, "Proofs and confirmations: The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture", главы 2,3; John R. Stembridge, "Nonintersecting Paths, Pfaffians, and Plane Partitions", *Advances in Mathematics*, v.83, p.96-101, 1990.

6 Замечательные детерминанты

Тема рекомендована студентам 1-2 курса.

Предлагается разобрать сюжеты из статьи Кристиана Краттенхалера – С. Krattenthaler "Advanced determinant calculus" (arXiv:math.CO/9902004), посвященной различным комбинаторным методам вычисления определителей.

7 Суперсимметрические многочлены

Тема рекомендована студентам 1-2 курса.

Суперсимметрическими называются полиномы от двух наборов переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, симметричные по переменным каждого из наборов (по отдельности) и такие, что при подстановке $y_1 = -x_1$ они перестают зависеть от x_1 . Задача состоит в том, чтобы описать кольцо таких полиномов.

P. Pragacz, A. Thorup "On Jacobi-Trudy Identity for Supersymmetric Polynomials", *Advances in Mathematics*, v.95, p.8-17, 1992.

8 Алгебра Темперли–Либа и ее представления на путях Дика

Тема рассчитана на студентов 2-4 курса, и 1 курса магистратуры.

С группой кос связаны несколько семейств конечномерных алгебр, обладающих богатой комбинаторной структурой и имеющих важные применения в физических моделях. Одно из таких семейств – семейство алгебр Темперли–Либа. Предлагается разобраться с определением этих алгебр, изучить их представления в пространстве путей Дика, и ознакомиться с применением этих представлений в описании стохастического процесса роста одномерной пленки.

9 R-матричные представления группы кос

Тема рассчитана на студентов 2-4 курса, и 1 курса магистратуры.

R-матрица – это обратимый оператор, действующий в тензорном квадрате конечномерного пространства и удовлетворяющий уравнению Янга–Бакстера. С каждым таким оператором связана серия представлений групп кос B_n . Предлагается поупражняться в построении R-матриц, действующих на пространствах малых размерностей; разобраться с общими свойствами R-матричных представлений групп кос, позволяющими применять их для построения инвариантов узлов.

10 Квантовые матричные алгебры и обобщенная теорема Кэли–Гамильтона

Тема рассчитана на студентов 3-4 курса, и 1 курса магистратуры.

Квантовые матричные (QM-) алгебры – ассоциативные алгебры, определяемые в терминах образующих и соотношений. Образующими этих алгебр выступают компоненты некоторой матрицы. На образующие накладываются квадратичные соотношения специального вида, в записи которых используются R-матрицы (см. тему 9). QM-алгебры являются разделом теории квантовых групп, они применяются в исследовании интегрируемых моделей квантовой и статистической физики. Оказывается матрицы генераторов QM-алгебр ведут себя подобно обычным матрицам,

и для них можно определить понятие собственных значений и собственных векторов, и сформулировать аналог теоремы Кэли-Гамильтона.