Введение в теорию динамических систем, классический и квантовый хаос

Сеидов С. С.

НИУ ВШЭ

21.03.2024

Динамические системы

Динамическая система это отображение $g : \mathbb{R} \times X \to X$. Многообразие X называется фазовым пространством, $\mathbb{R}$ — ось времени.

Примеры:

- Дифференциальные уравнения: $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$
- Дискретные отображения: $\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-2}, \ldots)$
- Каскады, итерации отображений: $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1) = f(f(\mathbf{x}_0))$, …

В физике главный интерес представляют уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.$$

Стационарные точки

Стационарные точки $\mathbf{x}_0 \in X$ под действием отображения $g : \mathbb{R} \times X \to X$ переходят в сами себя.

Пример: $x_n = x_{n-1}^2$, тогда $x_0 = 0, 1$.

Для дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ условие на стационарные точки

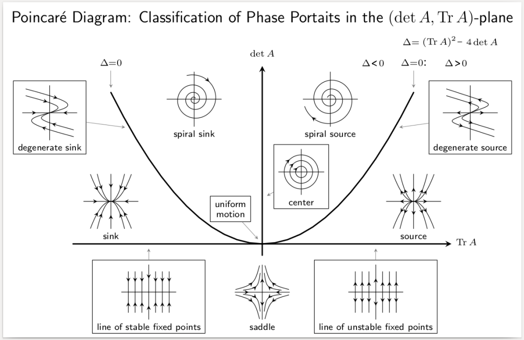
$$\dot{\mathbf{x}}_0 = 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Стационарные точки "физических" уравнений соответствуют точкам равновесия, так как в них $\dot{\mathbf{x}} = 0$ и $\dot{\mathbf{p}} = 0$.

Теория устойчивости Ляпунова

Пусть $\mathbf{x}_0$ — стационарная точка отображения $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$. Она является устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $||\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0|| < \delta$, то $\forall t \; ||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0|| < \varepsilon$.
То есть, точки, близкие к устойчивой, остаются близкими к ней.

В двумерном случае можно классифицировать стационарные точки.



Интегрируемые гамильтоновы системы

Интегрируемой называется система, которая имеет число интегралов движения (сохраняющихся величин), равное числу степеней свободы.

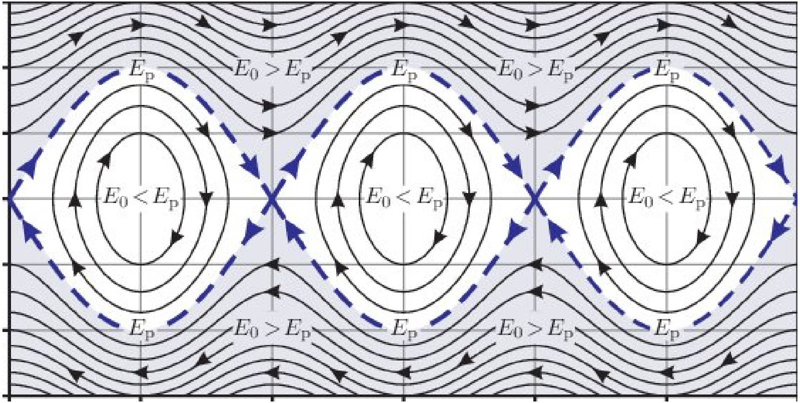
Для них можно ввести переменные действие–угол: $I = \frac{1}{2\pi}\int p dx$ и φ. Гамильтониан и уравнения движения принимают вид

$$H = \omega I \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega.$$

Траектория в фазовом пространстве лежит на инвариантном торе.

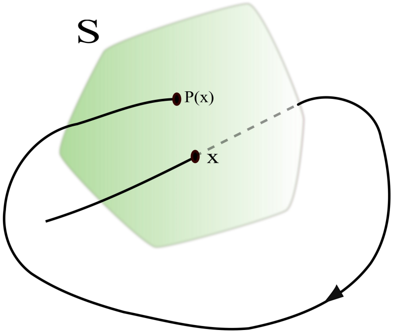
Фазовые портреты

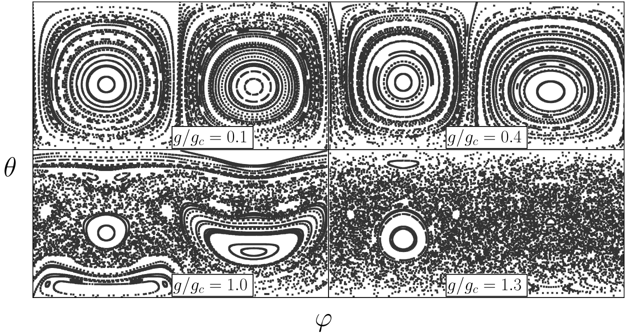
Фазовый портрет это параметрический график $\{x(t), p(t)\}$ на фазовой плоскости. Фазовый портрет физического маятника $m\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$:



Сечения Пуанкаре

Сечение Пуанкаре это отображение плоскости в фазовом пространстве на саму себя вдоль траекторий системы. Само по себе оно является дискретной динамической системой.





Квантовый хаос

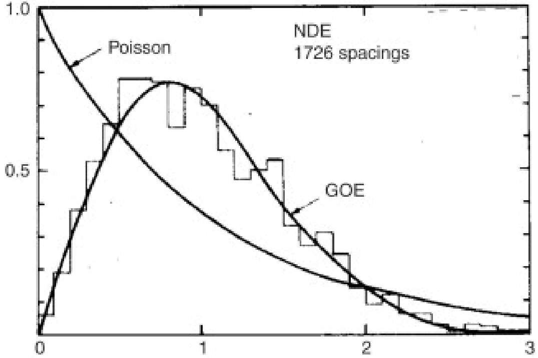
Уравнение Шрёдингера линейно, чувствительность к начальным условиям отсутствует. Пусть $|\psi(0)\rangle$ и $|\varphi(0)\rangle$ два начальных состояния системы, тогда

$$\left.\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{iHt}|\psi(0)\rangle \\ |\varphi(t)\rangle &= e^{iHt}|\varphi(0)\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle\varphi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\varphi(0)|e^{-iHt}e^{iHt}\psi(0)\rangle = \langle\varphi(0)|\psi(0)\rangle.$$

Тем не менее, можно изучать свойства квантовых систем, классические аналоги которых хаотические.

Свойства спектра

У хаотических систем расстояние между ближайшими уровнями распределено по Вигнеру: $P(s) \sim se^{-s^2/4}$. У регулярных систем — по Пуассону: $P(s) \sim e^{-s}$.



Плотность вероятности того, что величина $\Delta_n = E_{n+1} - E_n$ принимает значение s.

Гипотеза о термализации собственных состояний (ETH)

Пусть $|E_i\rangle$ — собственные состояния квантовой системы с определённой энергией, то есть $H|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle$. Матричные элементы произвольного оператора $A(t)$ в этом базисе:

$$A(t)_{\alpha\beta} = \langle E_\alpha|A(t)|E_\beta\rangle.$$

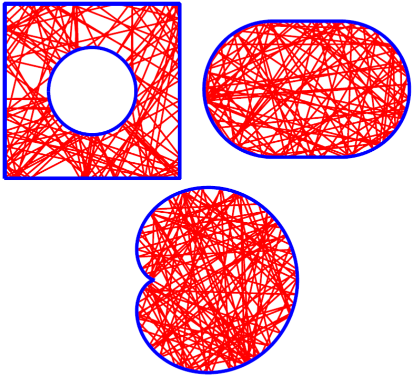
Утверждение гипотезы:

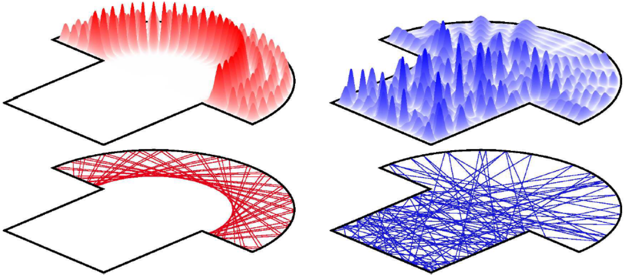
$$t \to \infty \Rightarrow A_{\alpha\alpha} \gg A_{\alpha\beta}.$$

Кроме того, внедиагональные элементы экспоненциально малы.

Сходство распределений

Классическая динамика в бильярдах определённой формы может быть хаотической. Почему–то квантовые распределения в бильярдах схожи с распределением классических траекторий.





Квантовые шрамы

На плотностях распределения квантовых систем иногда возникают пучности в областях пространства, где проходят нестабильные классические траектории.