Лиценциат 2024

Образовательная программа «Совместный бакалавриат ВШЭ и ЦПМ»

1. Числовые последовательности, пределы и предельные точки, критерий Коши сходимости последовательности. [1, т. I, III.1], [2, т. I, I.1]
2. Предел функции, непрерывность, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, равномерная непрерывность непрерывной функции на отрезке. [1, т. I, III.2], [2, т. I, II.2, II.5]
3. Сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов (сходимость абсолютно сходящегося ряда, перестановка членов). Признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Условно сходящиеся ряды. Примеры условно сходящихся рядов. [2, т. II, XI.1–XI.3]
4. Дифференцируемые функции одного переменного. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечном приращении. [1, т. I, V.1–V.3], [2, т. I, III.1–III.3]
5. Частные производные функции нескольких переменных. Производная (дифференциал) отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема о производной сложной функции. [1, т. I, VIII.2, VIII.3], [2, т. I, V.3]
6. Теорема о неявной функции для отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (без доказательства). Теорема об обратной функции. Производная неявной и обратной функции. [1, т. I, VIII.5, VIII.6], [2, т. I, VI.2]
7. Интеграл Римана функции на отрезке и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница и существование первообразной для непрерывной функции. [1, т. I, VI.1–VI.3], [2, т. II, IX.1–IX.3]
8. Формула Тейлора для функции одного переменного. Формы остаточного члена. [1, т. I, V.3, VI.3], [2, т. I, III.5, т. II, IX.4]
9. Экстремумы и выпуклость функций одного переменного. Исследование функции на экстремумы и выпуклость с помощью производных. [1, т. I, V.4], [2, т. I, IV.1–IV.2]
10. Экстремумы функций нескольких переменных, условные экстремумы, множители Лагранжа. [1, т. I, VIII.4, VIII.7], [2, т. I, V.5, VI.3].
11. Интеграл Римана по n-мерному параллелепипеду. Сведение кратного интеграла от непрерывной функции к повторному. [1, т. II, XI.1, XI.2, XI.4], [2, т. III, XVI.1, XVI.2]
12. Криволинейные интегралы. Вычисление длин кривых и работы силы по криволинейному пути. Формула Грина. [1, т. II, XIII.1, XIII.3], [2, т. III, XV.1, XV.2, XVI.3]
13. Интегрируемые по Лебегу функции на единичном кубе $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Конструкция интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (все без доказательств). Неравенство Чебышёва (с доказательством). [4, §§3.1-3.5], [3, §§V.4-V.5], [5, §§2.1-2.3]
14. Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость, непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. [1, т. II, XVI.1XVI.3], [2, т. II, XII.1, XII.2]

15. Несобственные интегралы, признаки сходимости несобственных интегралов. Сходимость интегралов $\int_0^1 x^\alpha dx$ и $\int_1^\infty x^\alpha dx$. [1, т. I, VI.5], [2, т. II, XIII.1, XIII.2]
16. Эйлеровы интегралы. Гамма- и Бета-функции. Связь между функциями Г и Б. Функциональное уравнение и формула дополнения для Гамма-функции. Объем n-мерного шара. [1, т. II, XVII.3]
17. Ортогональные системы векторов в пространстве со скалярным произведением. Примеры. Тригонометрическая система. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы, теорема о разложении в ряд по полной ортогональной системе, равенство Парсеваля. Полнота тригонометрической системы (без доказательства). Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье функции класса C^1. [1, т. II, XVIII.1, XVIII.2], [3, III.4, VII.3.1, VIII.1]
18. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные множества. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Теорема Кантора: множество всех подмножеств множества X неравномощно X. Несчётность множества вещественных чисел. Аксиома выбора, лемма Цорна, их эквивалентность (без доказательства) [6, §§1.3-1.7, 2.8]
19. Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи. [8, §2.12.3]
20. Аффинные пространства, аффинные отображения. Задание аффинного отображения n-мерного аффинного пространства образами n+1 точки. [10, 7.1, 7.3], [12, т.2 гл. 4 §1]
21. Проективные пространства, проективные отображения. Задание проективного отображения n-мерного проективного пространства образами n+2 точек. [10, 7.5] [11, §18], [12, т.2 гл. 5 $ 3]
22. Кривые второго порядка в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}^2$, их аффинная и проективная классификации. [10, 7.4, 7.5], [11, §19], [12, т.2 гл. 5]
23. Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, теорема о ранге матрицы. [10, 2.2, 2.3], [11, §§7-8], [12, т.2 гл. 1 §2, гл. 2 §1]. Определитель матрицы и его свойства. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц. [10, 2.4] [11, §10], [12, т.1 гл. 3]
24. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Формулы Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. [10, 2.1, 2.5], [12, т.1 гл. 1 §3, гл. 2 §3]
25. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора, теорема Гамильтона–Кэли. [10, 6.2, 6.5] [11, §13], [12, т.2 гл. 2 §§3-4]
26. Корневые подпространства линейного оператора, жорданова нормальная форма. [10, 6.4] [11, §13], [12, т.2 гл. 2 §4]
27. Квадратичные и билинейные формы, положительная определенность, закон инерции. [10, 5.3], [11, §17], [12, т.2 гл. 1 §4]
28. Евклидовы линейные пространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогонализация Грама–Шмидта. [10, 5.3] [11, §14], [12, т.2 гл. 3 §1]
29. Вещественные самосопряженные операторы, их диагонализуемость. Приведение квадратичной формы к главным осям. [10, 6.3], [11, §17], [12, т.2 гл. 3 §3]
30. Группы, подгруппы, смежные классы, формула Лагранжа для числа смежных классов. [10, 4.1, 4.5] [11, §§15, 16], [12, т.3 гл. 1 §2]

31. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, факторгруппы. Теорема о гомоморфизмах групп. [10, 4.6], [11, §§15, 16], [12, т.3 гл. 1 §§2, 4]
32. Классификация конечнопорожденных абелевых групп (без доказательства). Свободные абелевы группы конечного ранга и их подгруппы. [10, 9.1] [11, §12], [12, т.3 гл. 2 §3]
33. Коммутативные кольца. Примеры колец. Кольца вычетов. Малая теорема Ферма. [10, 1.6, 9.2], [11, §2], [12, т.1 гл. 4 §3]
34. Евклидово кольцо. Примеры: кольцо целых чисел, кольцо целых комплексных (гауссовых) чисел, кольцо многочленов над полем. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя двух элементов евклидова кольца. Факториальность евклидова кольца. [10, 9.2], [11, §6], [12, т.1 гл. 5 §3]
35. Теорема Вильсона, малая теорема Ферма, существование примитивного вычета (первообразного корня) по простому модулю, квадратичные вычеты, символ Лежандра и его свойства, квадратичный закон взаимности Гаусса (б/д).
36. Цепные дроби, континуанты и подходящие дроби, сходимость подходящих дробей цепной дроби, теорема Лагранжа о периодических цепных дробях (б/д).
37. Теорема Минковского о выпуклом теле, теорема Кронекера, теорема Вейля о равномерном распределении $\{n\alpha\}$.
38. Общее решение линейных диофантовых уравнений, теорема Сильвестра о линейных комбинациях натуральных чисел с неотрицательными коэффициентами, пифагоровы тройки, существование и структура решений уравнения Пелля.
39. Конечные поля. Примеры. Цикличность мультипликативной группы конечного поля. [10, 1.6], [11, 4.4]
40. Метрические пространства. Примеры. Открытые множества в метрических пространствах. Структура открытых множеств в R. Топологические пространства. Замкнутые множества; замыкание множества. Непрерывные отображения топологических пространств. [4, §§1.2, 1.3, 1.6], [1, т.2 §§IX.1, IX.2, IX.6], [3, §§II.1, II.2, II.5]
41. Компактные топологические пространства. Свойства компактных пространств и отображений между ними. Критерий компактности подмножества $\mathbb{R}^n$. [4, §§1.7, 1.8], [1, т.2, §§IX.3], [3, §§II.6, II.7], [16, гл.4]
42. Связность и линейная связность топологического пространства. Связность отрезка. Пример связного нелинейно-связного множества. [13, Лекции 2, 3]
43. Полные метрические пространства. Примеры. Полнота пространства $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке. Существование неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства в себя. [4, §§1.2, 1.4], [1, т.2, §§IX.5, IX.7], [3, §§II.3, II.4]
44. Фундаментальная группа топологического пространства. Ее вычисление для окружности S^1 и сферы S^2. [14, §§II.1-II.5], [15, §1.1], [16, гл. 7,8], [13, Лекции 4, 5, 6]
45. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теорема о существовании и единственности ее решения (без доказательства). Приближение решения задачи Коши итерациями Пикара. [20, разделы «Теорема существования и единственности» и «Метод Пикара»]
46. Методы решения дифференциальных уравнений: решение уравнений с разделяющимися переменными, метод вариации постоянных для линейных неоднородных уравнения первого порядка, однородные уравнения. [20, разделы

2,7,9,10 части 1 и «Линейные уравнения высших порядков»], [21, одноименные разделы]

47. Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения для случая квазимногочлена в правой части. Матричная экспонента: метод нахождения и связь с решением системы линейных ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. [20, разделы «Экспонента линейного оператора» и «Вычисление экспоненты»]
48. Дифференцирование функций одного комплексного переменного. Голоморфные функции, условия Коши–Римана, Примеры голоморфных функций. Голоморфность элементарных функций. [19, 2.2-2.6, стр. 13-19]
49. Теорема Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши. [19, 5.1-5.3, стр. 53-64]
50. Область сходимости степенного ряда с комплексными коэффициентами. Разложение функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Интегральная формула для коэффициентов ряда Тейлора. [19, 6.1-6.6, 6.8-6.9. стр. 65-75]
51. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Единственность лорановского разложения. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций. [19, 7.1-7.8, стр. 82-94]
52. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана. [19, 8.1-8.2, стр. 97-99]
53. Вероятностное пространство. Условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий. Случайные величины. Функция распределения, плотность. Дискретные и непрерывные случайные величины. Математическое ожидание. Дисперсия. [22, т. 1, §§I.(1, 3), II.(1, 4, 6, 8)][23, §§6,7, 1819, 2324]
54. Случайные векторы (наборы случайных величин). Совместные функция распределения и плотности нескольких случайных величин. Независимость случайных величин, её выражение в терминах совместной функции распределения и совместной плотности. Ковариация и коэффициент корреляции. Некоррелированность независимых величин. [22, т. 1., §§II.(5, 6, 8), I.4][23, §§20, 24-25]
55. Виды сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, по распределению. Закон больших чисел (с доказательством). Усиленный закон больших чисел (формулировка). [22, т. 1, §II.10], [23, §28], [22, т. 2, §IV.3]
56. Характеристические функции. Выражение сходимости по распределению в терминах характеристических функций (без доказательства). Центральная предельная теорема (формулировка, сведение к предельной теореме для характеристических функций). [22, т. 1, §§II.12, III.(14)][23, §§32, 35, 39-40]

Список литературы

[1] В. А. Зорич. Математический анализ. Изд. 4. М.: МЦНМО, 2002

[2] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Изд. 8. М.: Физматлит, 2003

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7. М.: Физматлит, 2004

[4] В. И. Богачёв, О. Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ. М.: РХД, 2009.

[5] G. B. Folland. Real analysis. Wiley, 1999.

[6] Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 2012.

[7] Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2012.

[8] С. К. Ландо. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2012

[9] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990

[10] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2011

[11] А. Л. Городенцев. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013

[12] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. М.: МЦНМО, 2011

[13] Ю. М. Бурман. Введение в топологию. Записки лекций

[14] У. Масси, Дж. Столлингс. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977.

[15] А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

[16] J. M. Lee. Introduction to topological manifolds. Springer, 2011.

[17] С.М. Натанзон. Введение в теорию гладких многообразий. М.: МЦНМО, 2020.

[18] Ф.Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.

[19] А. В. Домрин, А. Г. Сергеев. Лекции по комплексному анализу. МИАН, 2004, том 1.,2

[20] Ильяшенко, Буфетов, Гончарук. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Записки лекций

[21] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Либроком, 2011

[22] А. Н. Ширяев. Вероятность. В 2-х кн. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004. Кн. 1: Вероятность-1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. Кн. 2: Вероятность-2. Суммы и последовательности случайных величин стационарные, мартингалы, марковские цепи.

[23] Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 8-е. М.: Едиториал УРСС, 2005.

Задачи по теории чисел

1. Дано натуральное число $k>1$. Докажите, что для любых натуральных m,n справедливо $\text{НОД}(k^m-1,k^n-1)=k^{\text{НОД}(m,n)}-1$

2. Пусть g —- первообразный корень по модулю m. При каких ℓ вычет g^l также будет первообразным корнем по модулю m?

3. Даны числа $\alpha,\beta>0$. Пусть p/q — подходящая дробь числа α, s/t — подходящая дробь числа β. Докажите, что $\left|\dfrac{p}{q}-\dfrac{s}{t}\right|<\dfrac{1}{q^2}+|\alpha-\beta|+\dfrac{1}{t^2}$.

4. На координатной плоскости в начале координат сидит слепой охотник, а в остальных точках с целыми координатами --- круглые зайцы радиуса $r>0$. Охотник палит наугад, пуля летит по прямой бесконечно далеко. Докажите, что она обязательно попадёт в какого-нибудь зайца.

5. Докажите, что уравнение $x^2+y^2=z^4$ имеет бесконечно много натуральных решений таких, что $(x,y)=1$.