Решение демонстрационного варианта по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» ОП «Анализ данных в девелопменте»

Время выполнения заданий – 240 минут.
Решения должны быть записаны четко по-русски или по-английски.
Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма – 100 баллов.
Если будет решено более 10 задач, то засчитываются только 10 лучших решений (по числу баллов).

Задача 1.
Найдите значение предела:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{(x^2+5x)\sin x}$

Решение:

При подстановке предельной точки в предел возникает неопределенность вида: $\frac{0}{0}$.
Раскрываем неопределенность и используем первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{(x^2+5x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\,\frac{\sin 3x^2}{3x^2}}{(x^2+5x)x\,\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{(x^2+5x)x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x+5}=\frac{3}{5}$$

Ответ: $\mathbf{\frac{3}{5}}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x+1}-1}$

Решение:

При подстановке предельной точки в предел возникает неопределенность вида: $\frac{0}{0}$.
Применим формулу понижения степени $\frac{1-\cos(2x)}{2}=(\sin x)^2$ и первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)^2 x^2}{4\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{2}=0$$

Ответ: 0

Задача 2.
Вычислите определённый интеграл:

$$\int_{0}^{\pi} (e^x - \ cos\ x)dx$$

Решение:

Используя таблицу интегралов, вычислим неопределенный интеграл:

$$\int (e^x - \ cos\ x)dx = e^x - \ \sin x\ +\ C$$

После чего, с помощью формулы Ньютона-Лейбница посчитаем определенный интеграл:

$$\int_{0}^{\pi} (e^x - cosx)dx = e^{\pi} - \ sin\ \pi - e^0 - \ sin\ 0 = e^{\pi} - \ 1$$

Ответ: $\boldsymbol{e^{\pi} - \ 1}$

Задача 3.
Решите дифференциальное уравнение:

$$y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$$

Решение:

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda'' + 6\lambda' + 8\lambda = 0$
$\lambda =$ -2, $\lambda =$ -4
Получены различные действительные корни, среди которых нет нуля, поэтому общее решение:
$Y = \widetilde{C_1}e^{-2x} + \widetilde{C_2}e^{-4x}$, где $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}$ – const.

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде: $y = \mathrm{Z}_1(\mathrm{x})e^{-2x} + \mathrm{Z}_2(\mathrm{x})e^{-4x}$, где $\mathrm{Z}_1(\mathrm{x}), \mathrm{Z}_2(\mathrm{x})$ – неизвестные функции.

$$\begin{cases} \mathrm{Z}_1'(\mathrm{x})y_1 + \mathrm{Z}_2'(\mathrm{x})y_2 = 0 \\ \mathrm{Z}_1'(\mathrm{x})y_1' + \mathrm{Z}_2'(\mathrm{x})y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0} \end{cases}$$

В данном случае:

$$y_1 = e^{-2x}$$
$$y_2 = e^{-4x}$$
$$y_1' = -2e^{-2x}$$
$$y_2' = -4e^{-4x}$$
$$f(x) = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$$
$$a_0 = 1$$

Итого:

$$\begin{cases} e^{-2x}\,\mathrm{Z}_1'(\mathrm{x}) + e^{-4x}\mathrm{Z}_2'(\mathrm{x}) = 0 \\ -2e^{-2x}\mathrm{Z}_1'(\mathrm{x}) - 4e^{-4x}\mathrm{Z}_2'(\mathrm{x}) = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}} \end{cases}$$

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ -2e^{-2x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = -2e^{-6x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-4x} \\ \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}} & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = \frac{-4e^{-6x}}{2 + e^{2x}}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{4e^{-4x}}{2 + e^{2x}}$$

$$\mathrm{Z}_1'(\mathrm{x}) = \frac{W_1}{W} = \frac{2}{2 + e^{2x}}$$

$$\mathrm{Z}_2'(\mathrm{x}) = \frac{W_1}{W} = \frac{-2e^{2x}}{2 + e^{2x}}$$

Восстанавливаем функции $\mathrm{Z}_1(\mathrm{x}), \mathrm{Z}_2(\mathrm{x})$ интегрированием:

$$Z_1(x) = \int \frac{2}{2 + e^{2x}} dx = \int \frac{2}{2 + \frac{1}{e^{-2x}}} dx$$

$$= \int \frac{2e^{-2x}}{2e^{-2x} + 1} dx = -\frac{\ln(2e^{-2x} + 1)}{2} + C = -\frac{\ln\left(\frac{2}{e^{2x}} + 1\right)}{2} + C$$

$$= -\frac{\ln(2 + e^{2x}) - \ln(e^{2x})}{2} + C = -\frac{\ln(e^{2x} + 2) - 2x}{2} + C$$

$$Z_2(x) = \int \frac{-2e^{2x}}{2 + e^{2x}} dx = -\ln(2 + e^{2x}) + C$$

В результате, общее решение неоднородного уравнения: $y = -\left(\frac{\ln(e^{2x}+2)-2x}{2} + C_1\right) e^{-2x} + (-\ln(2 + e^{2x}) + C_2)e^{-4x} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 2)\, e^{-2x} + xe^{-2x} - \ln(2 + e^{2x})\, e^{-4x}$

Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 2)\, e^{-2x} + xe^{-2x} - \ln(2 + e^{2x})\, e^{-4x}$

Задача 4.
Найдите определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ -3 & 8 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Для вычисления определителя приведем матрицу к верхнетреугольному виду, используя элементарные преобразования над строками матрицы и свойства определителя матрицы.

Ответ:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ -3 & 8 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2(1) \\ +3(1) \\ -2(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 23 & 1 & 9 \\ 0 & -7 & -10 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\frac{23}{6}(2) \\ -\frac{7}{6}(2) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 16\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -10 & -5\frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +10(3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 16\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 161\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 1 * (-6) * 1 * 161\frac{1}{3} = -968$$

Задача 5.
Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение:

Решим систему линейный уравнений методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1(1) \\ -1(1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}(1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Итого:

$$x_3 = 0, x_1 = -2x_2, x_2 = x_2$$

Фундаментальная система решений:

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ответ: $x_1 = -2x_2, x_2 = x_2, x_3 = 0$

Задача 6.
Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det(A - \lambda\mathrm{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & 2 \\ -3 & 8-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 7\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{57}}{2}, \lambda_3 = \frac{7+\sqrt{57}}{2}$$

Для каждого λ найдем его собственные вектора:
$\lambda_1 = 3$
$A - \lambda\mathrm{E} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
$Av = \lambda v$
Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решая которую, получим:

$$x_1 = x_3, x_2 = 0$$

Фундаментальная система решений:

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пусть $x_3 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Аналогично, решаем для $\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{57}}{2}, \lambda_3 = \frac{7+\sqrt{57}}{2}$.

Ответ: 1) $\lambda_1 = 3$, $x_3 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_1 = \frac{7-\sqrt{57}}{2}$, $x_3 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-8\sqrt{57}+55}{89} \\ \frac{-19\sqrt{57}+75}{178} \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{57}}{2}$, $x_3 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{8\sqrt{57}+55}{89} \\ \frac{19\sqrt{57}+75}{178} \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача 7.

В группе 14 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 22 человека знает немецкий язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

Решение:

$|A|$ – количество людей, знающих английский.
$|B|$ – количество людей, знающих китайский.
$|C|$ – количество людей, знающих арабский.
$|D|$ – количество людей, знающих немецкий.
$|A\cap B|, |A\cap C|, |A\cap D|, |B\cap C|, |B\cap D|, |C\cap D|$ – количество людей, знающих два языка.
В группе нет людей, знающих три или четыре языка.
Общее количество людей, знающих хотя бы один язык:

$$|A\cup B\cup C\cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - (|A\cap B| + |A\cap C| + |A\cap D| + |B\cap C| + |B\cap D| + |C\cap D|)$$

Из условия известно, что 23 человека знают ровно два языка: $|A\cap B| + |A\cap C| + |A\cap D| + |B\cap C| + |B\cap D| + |C\cap D| = 23$

Тогда общее количество людей, знающих хотя бы один язык:

$$|A\cup B\cup C\cup D| = 14 + 16 + 20 + 22 - 23 = 49$$

Чтобы посчитать количество людей, знающих ровно один язык необходимо из общего количества людей вычесть людей, знающих два языка.

Таким образом, количество людей, знающих ровно один язык: 26.

Ответ: 26

Задача 8.
Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+x^2)^{100}(1+x^3)^{100}$?

Решение:

Бином Ньютона для нашего выражения даёт:

$$(1+C_{100}^{1}x^2+C_{100}^{2}x^4+\cdots+C_{100}^{99}x^{198}+x^{200})(1+C_{100}^{1}x^3+C_{100}^{2}x^6+\cdots+C_{100}^{99}x^{297}+x^{300})$$
$$=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}x^{2k}\sum_{m=0}^{100}C_{100}^{m}x^{3m}=\sum_{k,m=0}^{100}C_{100}^{k}C_{100}^{m}x^{2k+3m}$$

Итак, после раскрытия скобок получается сумма одночленов со всевозможными показателями степени вида $2k + 3m$, где k и m пробегают целые значения от 0 до 100.

Имеем очевидную оценку: $0 \le 2k + 3m \le 500$, и если бы каждое промежуточное значение достигалось, то после приведения подобных членов в сумме оказалось бы 501 слагаемое. Выясним, какие промежуточные значения достигаются на самом деле, а какие запрещены.

Мы рассмотрим всевозможные остатки, которые может давать $2k + 3m$ при делении на 6. Имеем, соответственно, 6 случаев.

1. Пусть $2k + 3m = 6n$. Тогда $k = 3p, m = 2q$ (p и q — целые неотрицательные числа), откуда $p + q = n$. Имеем:

   $0 \le 3p \le 100 \to 0 \le p \le 33$

   $0 \le 2q \le 100 \to 0 \le q \le 50$

   Следовательно, величина $2k + 3m = 6(p + q)$ может принимать любые целые значения от 0 до 498.

2. Пусть $2k + 3m = 6n+1$. Перебор остатков от деления на 2 и на 3 показывает, что возможен лишь вариант $k = 3p+2, m = 2q-1$ (и снова $6p+4+6q-3 = 6n+1 \to 6p+6q=6n \to p + q = n$). Имеем:

   $0 \le 3p+2 \le 100 \to 0 \le p \le 32$

   $0 \le 2q-1 \le 100 \to 0 \le q \le 50$

   Поэтому величина $2k+3m = 6(p+q)+1$ может принимать любые целые значения от 1 до 493.

3. Пусть $2k + 3m = 6n+2$. Перебор остатков от деления на 2 и на 3 показывает, что возможен лишь вариант $k = 3p+1, m = 2q$ (и снова $6p+2 + 6q = 6n+2 \to 6p+6q=6n \to p + q = n$). Имеем:

   $0 \le 3p+1 \le 100 \to 0 \le p \le 33$

   $0 \le 2q \le 100 \to 0 \le q \le 50$

Поэтому величина $2k + 3m = 6(p+q) + 2$ может принимать любые целые значения от 2 до 498.

4. Пусть $2k + 3m = 6n + 3$. Перебор остатков от деления на 2 и на 3 показывает, что возможен лишь вариант $k = 3p, m = 2q + 1$ (и снова $6p + 6q + 3 = 6n + 3 \to 6p + 6q = 6n \to p + q = n$). Имеем:

   $0 \le 3p \le 100 \to 0 \le p \le 33$

   $0 \le 2q + 1 \le 100 \to 0 \le q \le 49$

   Поэтому величина $2k + 3m = 6(p+q) + 3$ может принимать любые целые значения от 3 до 495.

5. Пусть $2k + 3m = 6n + 4$. Перебор остатков от деления на 2 и на 3 показывает, что возможен лишь вариант $k = 3p + 2, m = 2q$ (и снова $6p + 4 + 6q = 6n + 4 \to 6p + 6q = 6n \to p + q = n$). Имеем:

   $0 \le 3p + 2 \le 100 \to 0 \le p \le 32$

   $0 \le 2q \le 100 \to 0 \le q \le 50$

   Поэтому величина $2k + 3m = 6(p+q) + 4$ может принимать любые целые значения от 4 до 496.

6. Пусть $2k + 3m = 6n + 5$. Перебор остатков от деления на 2 и на 3 показывает, что возможен лишь вариант $k = 3p + 1, m = 2q + 1$ (и снова $6p + 2 + 6q + 3 = 6n + 5 \to 6p + 6q = 6n \to p + q = n$). Имеем:

   $0 \le 3p + 1 \le 100 \to 0 \le p \le 33$

   $0 \le 2q + 1 \le 100 \to 0 \le q \le 49$

   Поэтому величина $2k + 3m = 6(p+q) + 5$ может принимать любые целые значения от 5 до 497.

   Итого 499 значений.

Ответ: 499

Задача 9.
Были отправлены посылки в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки в первое отделение равна 0,95, во второе - 0,9, в третье - 0,8. Найти вероятность следующих событий:
а) только одно отделение получит посылки вовремя;
б) хотя бы одно отделение получит посылки с опозданием.

Решение:

Найдем вероятность события X = (только одно отделение получит посылки вовремя). Событие X произойдет, если:

- или посылки доставлены своевременно в 1 отделение, и доставлены не вовремя во 2 и 3,
- или посылки доставлены своевременно в 2 отделение, и доставлены не вовремя во 1 и 3,
- или посылки доставлены своевременно в 3 отделение, и доставлены не вовремя во 1 и 2.

Таким образом, $X = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3$. Так как события A_1, A_2, A_3 – независимые, по теоремам сложения и умножения получаем:

$$P(X) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\,P(A_2)\,P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(A_3)$$
$$=0{,}95 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}032$$

Найдем вероятность события Y = (хотя бы одно отделение получит посылки с опозданием). Введем противоположное событие Y = (все отделения получат посылки вовремя). Вероятность этого события $P(\bar{Y}) = P(A_1A_2A_3)$, $P(Y) = 1 - P(A_1A_2A_3) = 1 - 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}316$.

Ответ: 0,316

Задача 10.
Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 13.00 до 14.00 часов и ждете друг друга в течение 10 минут?

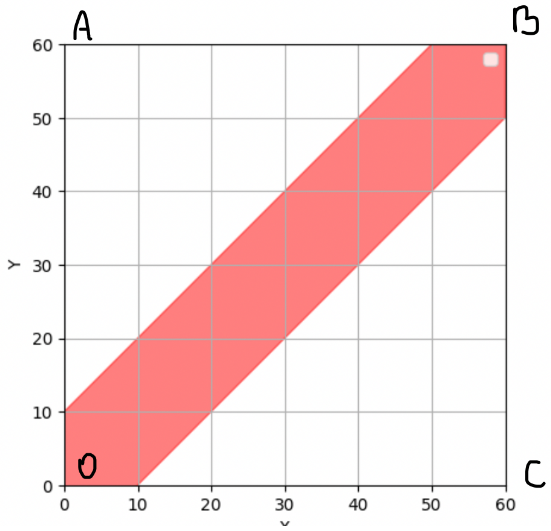
Решение:

Используем геометрическое определение вероятности события A = (Встреча с другом состоится).

Обозначим за x и y время прихода, $0 \leq x, y \leq 60$(минут). В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата OABC. Друзья встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 10 минут, то есть:

$$\begin{cases} y - x < 10, y > x \\ x - y < 10, x > y \end{cases}$$

Этим неравенствам удовлетворяют точки, лежащие в красной области рисунка:



Тогда вероятность встречи равна отношению площадей красной области и квадрата, то есть:

$$P(A) = \frac{S}{S_{OABC}} = \frac{60 * 60 - 50 * 50}{60 * 60} = \frac{1100}{3600} \approx 0{,}3$$

Ответ: 0,3

Задача 11.
По цели производится 4 выстрела. Вероятность попадания при этом растет так: 0,2, 0,3, 0,5, 0,7. Найти закон распределения случайной величины X – числа попаданий. Найти вероятность того, что X ≥ 1.

Решение:

Пусть X – число попаданий при четырех выстрелах. Она принимает значения 0, 1, 2, 3 и 4. Найдем соответствующие вероятности.

По условию известны вероятности попаданий: $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$, $p_4 = 0.7$.
Тогда вероятности промахов: $q_1 = 0.8$, $q_2 = 0.7$, $q_3 = 0.5$, $q_4 = 0.3$.

Вероятность того, что 4 выстрела попадут в цель:
$P(X=4) = p_1p_2p_3p_4 = 0.2*0.3*0.5*0.7 = 0.021$
$P(X=3) = q_1p_2p_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1p_2p_3q_4 = 0.8*0.3*0.5*0.7 + 0.2*0.7*0.5*0.7 + 0.2*0.3*0.5*0.7 + 0.2*0.3*0.5*0.3 = 0.163$
$P(X=1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 = 0.2*0.7*0.5*0.7 + 0.8*0.3*0.5*0.3 + 0.8*0.7*0.5*0.3 + 0.8*0.7*0.5*0.7 = 0.337$
$P(X=0) = q_1q_2q_3q_4 = 0.8*0.7*0.5*0.3 = 0.084$
$P(X=2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=3) - P(X=4) = 0.395$

Получаем закон распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.084	0.337	0.395	0.163	0.021

$$P(x \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.084 = 0.916$$

Ответ: 0.916

Задача 12.
В нормально распределенной совокупности 15% значений меньше 12 и 40% значений больше 16.2. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

Решение:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа (значения берутся из таблицы).

$$\begin{cases} P(-\infty < X < 12) = \Phi\left(\frac{12-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) = 0.15 \\ P(16.2 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{16.2-a}{\sigma}\right) = 0.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(-\infty < X < 12) = \Phi\left(\frac{12-a}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = 0.15 \\ P(16.2 < X < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{16.2-a}{\sigma}\right) = 0.4 \end{cases}$$

$-\Phi(-\infty) = \Phi(\infty) = 0.5$

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{12-a}{\sigma}\right) - 0.5 = 0.15 \\ 0.5 - \Phi\left(\frac{16.2-a}{\sigma}\right) = 0.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{12-a}{\sigma}\right) = 0.35 \\ \Phi\left(\frac{16.2-a}{\sigma}\right) = 0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{12-a}{\sigma} = 1.04 \\ \frac{16.2-a}{\sigma} = 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \approx 15.39 \\ \sigma \approx 3.26 \end{cases}$$

Ответ: $a \approx 15.39, \sigma \approx 3.26$

Для заданий 13 и 14 сдается .ipynb файл с пояснениями и кодом.
Задача 13.
Вам дан датасет Титаник со следующей информацией.

1. **PassengerId:** Уникальный индекс/номер строки. Начинается с 1 (для первой строки) и увеличивается на 1 для каждой следующей. Рассматриваем его как индентификатор строки и, что логично, идентификатор пассжира (т.к. для каждого пассажира в датасете представлена только одна строка).
2. **Survived:** Признак, показывающий был ли спасен данный пассажир или нет. 1 означает, что удалось выжить, и 0 - не удалось спастись.
3. **Pclass:** Класс билета. 1 - означает Первый класс билета. 2 - означает Второй класс билета. 3 - означает Третий класс билета.
4. **Name:** Имя пассажира. Имя также может содержать титулы и обращения. "Mr" для мужчин. "Mrs" для женщин. "Miss" для девушек (тут имеется в виду что для тех, кто не замужем, так было принято, да и сейчас тоже, говорить в западном обществе). "Master" для юношей.
5. **Sex:** Пол пассажира. Либо мужчины (=Male) либо женщины (=Female).
6. **Age:** Возраст пассажира. "NaN" значения в этой колонке означают, что возраст данного пассажира отсутствует/неизвестен/или не был записанv в датасет.
7. **SibSp:** Количество братьев/сестер или супругов, путешествующих с каждым пассажиром.
8. **Parch:** Количество родителей детей (Number of parents of children travelling with each passenger).
9. **Ticket:** Номер билета.
10. **Fare:** Сумма, которую заплатил пассажир за путешествие.
11. **Cabin:** Номер каюты пассажира. "NaN" значения в этой колонке указавает на то, что номер каюты данного пассажира не был записан.
12. **Embarked:** Порт отправления данного пассажира.

Ответьте на вопросы:
А) Есть ли зависимость между классом пассажира и выживаемостью? Каков процент выживших в каждом классе?
Б) Какова вероятность выживания для пассажиров, путешествующих с семьей по сравнению с теми, у кого семьи не было на борту?
В) Каков процент выживших среди пассажиров, у которых указан порт посадки "C" (Cherbourg)? Влияет ли порт посадки на выживаемость?
Г) Существует ли связь между возрастом и классом билета у пассажиров? Какова вероятность выживания для пассажиров разных возрастных групп?

Решение:

```
import pandas as pd

url = "train.csv"
titanic_data = pd.read_csv(url)

# Вопрос А
class_survival = titanic_data.groupby('Pclass')['Survived'].mean() * 100
print("Вопрос А: Процент выживших в каждом классе:")
```

```
print(class_survival)

# Вопрос Б
titanic_data['Family'] = (titanic_data['SibSp'] + titanic_data['Parch'] >
0).astype(int)
family_survival = titanic_data.groupby('Family')['Survived'].mean()
print("\nВопрос Б: Вероятность выживания для пассажиров, путешествующих с
семьей по сравнению с теми, у кого семьи не было на борту:")
print(family_survival)

# Вопрос В
port_survival = titanic_data.groupby('Embarked')['Survived'].mean() * 100
cherbourg_survival = port_survival['C']
print("\nВопрос В: Процент выживших среди пассажиров, у которых указан
порт посадки 'C' (Cherbourg):")
print(f"Процент выживших среди пассажиров, у которых порт посадки
Cherbourg: {cherbourg_survival}%")
print("\nВлияет ли порт посадки на выживаемость?")
print(port_survival)

# Вопрос Г
age_class = titanic_data.groupby('Pclass')['Age'].mean()
titanic_data['AgeGroup'] = pd.cut(titanic_data['Age'], bins=[0, 12, 18,
60, 80], labels=['Child', 'Teen', 'Adult', 'Senior'])
age_group_survival = titanic_data.groupby('AgeGroup')['Survived'].mean()
print("\nВопрос Г: Связь между возрастом и классом билета у пассажиров:")
print(age_class)
print("\nВероятность выживания для пассажиров разных возрастных групп:")
print(age_group_survival)
```

Задача 14.
По датасету из предыдущего задания построить следующие визуализации:
А) Построить диаграмму(ы) показывающие распределение возрастов в разных классах.
Б) Построить диаграмму(ы) показывающие процент выживших в каждом классе.

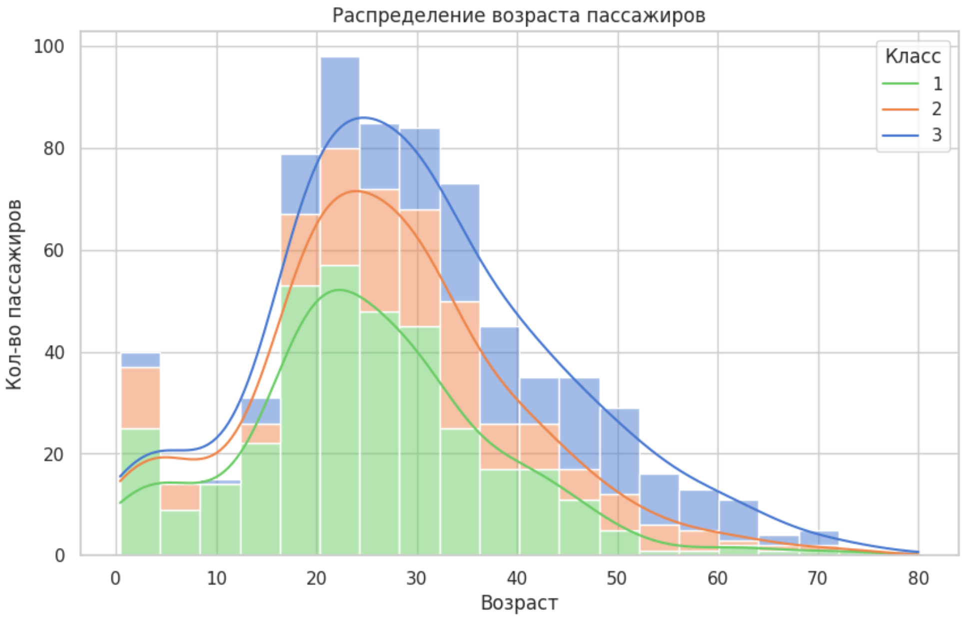
Решение:

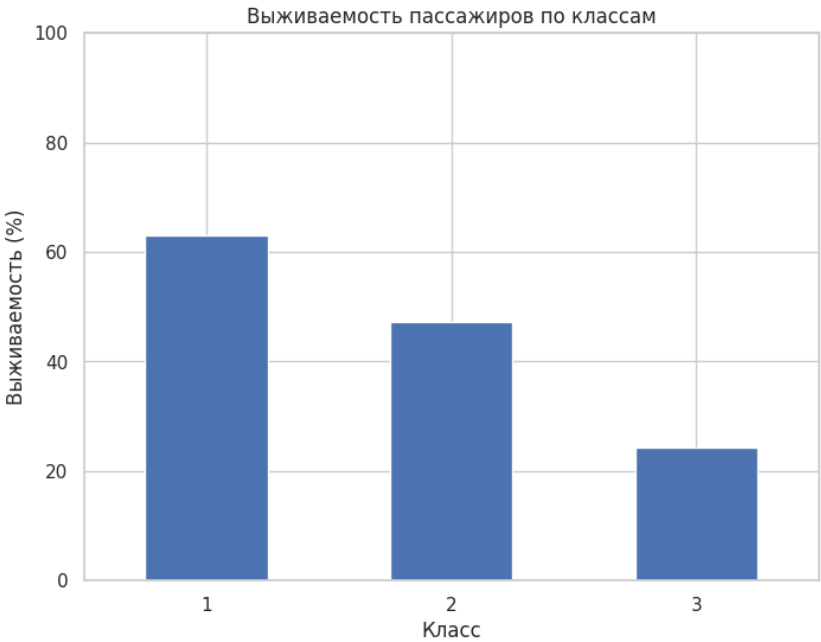
```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

titanic_data = pd.read_csv("train.csv")

# Визуализация А
plt.figure(figsize=(10, 6))
sns.histplot(data=titanic_data, x='Age', hue='Pclass', multiple='stack',
kde=True, palette='muted')
plt.title('Распределение возраста пассажиров')
plt.xlabel('Возраст')
plt.ylabel('Кол-во пассажиров')
plt.legend(title='Класс', labels=['1', '2', '3'])
plt.show()

# Визуализация Б
plt.figure(figsize=(8, 6))
class_survival_rate = titanic_data.groupby('Pclass')['Survived'].mean() *
100
class_survival_rate.plot(kind='bar')
plt.title('Выживаемость пассажиров по классам')
plt.xlabel('Класс')
plt.ylabel('Выживаемость (%)')
plt.xticks([0, 1, 2], ['1', '2', '3'], rotation=0)
plt.ylim(0, 100)
plt.show()
```


Распределение возраста пассажиров
Кол-во пассажиров
Возраст
Класс
1
2
3
0
20
40
60
80
100
0
10
20
30
40
50
60
70
80


Выживаемость пассажиров по классам
Выживаемость (%)
Класс
0
20
40
60
80
100
1
2
3