

Подготовительные задачи

Задача 1.

Найдите значение предела:

1. (8.11, a)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

2. (8.12, a)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 5} - \sqrt{x^4 + 5x^2 + 1}$$

3. (8.13, a)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{x-1} - 3}{x-2}$$

4. (8.14, a)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{4x+6} \right)^x$$

5. (8.15, a)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x+1}$$

6. (8.16, a)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+2^{-x}} + \frac{1}{x}$$

7. (8.20, a)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin(2x)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

8. (8.22, a)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right)$$

Ответы:

1. 1

2. $-\frac{7}{2}$

3. $\frac{3}{2}$

4. 0

5. 0

6. 2

7. 0

8. 3

Сборник задач по математическому анализу. Первый семестр: учебное пособие для вузов / Е. А. Ивин [и др.]; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда: ВолНИЦ РАН, 2020. – 90 с.

Задача 2.

Вычислите определённый интеграл:

1. (Пример 10.11)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} \cos^3 2x \, dx.$$

2. (Пример 10.8)

$$\int_0^{e-1} \frac{3x-5}{x+1} \, dx.$$

3. (Пример 10.8)

$$\int_5^{12} \frac{x}{\sqrt{x+4}} \, dx.$$

4. *(Пример 10.16)

$$\int_0^1 x^4 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

5. (Пример 10.17)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos x + 1}.$$

6. (Пример 10.18)

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} \, dx.$$

7. (Пример 10.21)

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

*Ответы:*1. $11/48$ 2. $3e-11$ 3. $50/3$ 4. $\pi/32$

5.

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2}).$$

6.

$$\ln\left(\frac{e^2 + \sqrt{e^4 + 1}}{1 + \sqrt{2}}\right).$$

7.

$$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Л.Н.Гайшун, Н.В.Денисенко, А.В.Марков (и др.). – Минск: БГЭУ, 2014. – Ч.2. – 270 с.

Задача 3.

1.

Пример 11.26. Определить структуру частного решения дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 3xe^x$.

2.

Пример 11.27. Определить структуру частного решения дифференциального уравнения $y'' + 9y = \sin 3x + x \cos 3x$.

3.

Пример 11.28. Проинтегрировать уравнение $y'' - 9y = 18x^2 + 5$.

4.

Пример 11.29. Проинтегрировать уравнение $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$.

5.

Пример 11.30. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 4y = 16 \sin 2x + 24 \cos 2x$.

Ответы:

1.

$$\varphi(x) = xQ_1(x)e^x = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

2.

$$\varphi(x) = x(\tilde{P}_1(x)\sin 3x + \tilde{Q}_1(x)\cos 3x) = (Ax^2 + Bx)\sin 3x + (Cx^2 + Dx)\cos 3x.$$

3.

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - 2x^2 - 1.$$

4.

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{2x}.$$

5.

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + 3 \sin 2x - 2 \cos 2x.$$

Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Л.Н.Гайшун, Н.В.Денисенко, А.В.Марков (и др.). – Минск: БГЭУ, 2014. – Ч.2. – 270 с.

Задача 4.

1.

Пример 2.2. Вычислить определитель разложением по элемен-

там третьего столбца:
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.

Пример 2.3. Вычислить определители, пользуясь их свойства-

ми: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

3.

Пример 2.10. Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

4.

7.А. Вычислить определители четвёртого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

5.

3.В. Вычислить определители четвёртого порядка:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Ответы:

1. -7

2. а) 9 б) 0 в) -4

3. -22

4. а) 1 б) 0 в) -58

5. а) -96 б) 1 в) -9

Матрицы и определители: практикум. 2-е изд. доп. и перераб. Е.А. Просвиркина, С.Н. Кубышкина. Самар. гос. техн. ун-т; Самара, 2014. 64 с.

Задача 5.

Решить систему линейных уравнений:

1.

$$8.B. \begin{cases} 2x - 4y - 9z = 13; \\ x + 2y + 6z + 4 = 0; \\ 7x - y + 9z = 5. \end{cases}$$

2.

$$10.B. \begin{cases} 2x - 4y - 9z = 7; \\ 7x + 3y - 6z = 16; \\ 7x - 9y - 9z = 7. \end{cases}$$

3.

3.B. Решить СЛУ с помощью обратной матрицы:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 4z = 6; \\ 5x + y + 2z = 12; \\ 3x - y + z = 1; \end{cases} \quad б) \begin{cases} -x + 2y + z = 0; \\ 7x - 10y - 5z = -2; \\ 4x - 7y - 6z = -8; \end{cases} \quad в) \begin{cases} 2x + y - 3z = 7; \\ x + 2y + z = 4; \\ 3x - y + 2z = -1. \end{cases}$$

4.

Пример 4.2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Ответы:

1. $x=2, y=0, z=-1$

2. $x=1, y=1, z=-1$

3. а) $x = 2, y = 4; z = -1$

б) $x = -1, y = -2; z = 3$

в) $x = 1; y = 2; z = -1$

4.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}u; \\ x_2 = -\frac{17}{5} + t - \frac{7}{5}u; \\ x_3 = t; \\ x_4 = u. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4}{5}; \\ x_2 = -\frac{17}{5}; \\ x_3 = x_4 = 0. \end{cases}$$

Матрицы и определители: практикум. 2-е изд. доп. и перераб. Е.А. Просвиркина, С.Н. Кубышкина. Самар. гос. техн. ун-т; Самара, 2014. 64 с.

Задача 6.

1. Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответы:

1.

◦ $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, собственное значение $\lambda_1 = 0$

◦ $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, собственное значение $\lambda_2 = 5$

2.

Собственные векторы матрицы A :

◦ $v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, собственное значение $\lambda_1 = 0$

◦ $v = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, собственное значение $\lambda_2 = -1$

◦ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, собственное значение $\lambda_3 = 6$

Задача 7.

1. В магазине побывало 80 человек. Известно, что они купили 45 ноутбуков, 50 планшетов, 55 смартфонов. 30 из них купили и ноутбук, и планшет, 25 – планшет и смартфон, 20 – ноутбук и смартфон, а все три покупки совершили пять человек. Сколько посетителей не купили ничего?
2. (mathburo) Из 100 человек студентов, сдавших сессию, 48 человек сдали экономику, 42 студента – математику и 37 человек – логику. По экономике или математике сдали экзамен 76 человек, по экономике или логике также 76 человек, а по математике или логике – 66 человек. Сколько человек сдали хотя бы один экзамен, если все три предмета сдали 5 человек? Сколько человек не сдали ни одного экзамена? Сколько человек сдали только один экзамен по логике?

Ответы:

1. 0

2. 4, 4, 20

Задача 8.

1.

ЗАДАЧА. («Высшая проба», 2014, 10) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1 + x^2)^{100}(1 + x^5)^{100}$?

2. (Высшая проба)

10. В выражении $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots (1 + x^{1000})$ раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

3. (Школково)

Сколько слагаемых после раскрытия скобочек и приведения подобных будет в выражении $(x^3 + 1)^{40}(x^4 + 1)^{30}$?

Ответы:

1. 697

2. 500501

3. 235

Задача 9.

1. (2.16) Наудачу выбирается 4-значное число. Какова вероятность следующих событий: а) число читается одинаково как слева направо, так и справа налево (например, 1551); б) число кратно пяти; в) число состоит из нечетных цифр; г) число состоит из четных цифр.
2. (3.10) Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
3. (3.11) Новому работнику предоставляются три попытки проявить свои способности. Вероятность того, что ему удастся это с первой попытки, равна 0,2, со второй – 0,3, с третьей – 0,4. Исходы попыток представляют независимые события. Найти вероятность того, что работник оправдает оказанное ему доверие.
4. (3.4). Прибор содержит генератор и осциллограф. За время работы генератор может выйти из строя с вероятностью 30 %, а осциллограф – с вероятностью 20 %. Отказы осциллографа и генератора не связаны друг с другом. Найти вероятность, что прибор будет работать исправно.
5. (3.13). При передаче текста 10 % букв искажается и принимается неверно. Какова вероятность того, что все 5 букв данного сообщения будут приняты правильно?
6. (3.14). Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверенных. Какова вероятность для данной партии быть принятой, если она содержит 5 % неисправных деталей.

Ответы:

1. 2.16
2. 0.14
3. 0.644
4. 0.56
5. 0.59
6. 0.23

«Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: пособие / А. В. Гуревич [и др.] Минск, БГУИР, 2017. – 68 с.: ил.

Задача 10.

1. (7) На окружности радиуса R случайным образом выбраны две точки A и B . Найти вероятность того, что площадь большего из полученных секторов превышает площадь меньшего, но не более чем в 3 раза.
2. (8) На отрезке AB длины 6 см наудачу ставится точка M . Какова вероятность того, что возможно построить треугольник, имеющий сторонами отрезки AM , BM и отрезок длины 3 см?
3. (9) Посадочная система аэропорта обеспечивает заход на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом между посадками не менее 5 минут. Два самолета должны прибыть на аэродром по расписанию один в 10 часов, а другой – в 10 часов 10 минут. Какова вероятность того, что второму самолету придется уходить в зону ожидания, если первый самолет может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах 10 минут, а второй – в пределах 5 минут, при условии, что величины отклонений от расписания в указанных пределах равновозможны?
4. (15). Пароход приходит к пристани в случайный момент времени между 13.00 и 14.00. Автобус отходит от пристани в случайный момент времени между 13.24 и 13.34. Пассажиру требуется 10 минут, чтобы перейти от парохода к остановке автобуса. Найти вероятность того, что пассажир успеет на автобус.
5. (16). На дороге которая имеет длину 66 км, на 41 км находится автомобильный сервис, а на 44 км – закусочная. Какова вероятность того, что при поломке автомобиля, сервис окажется ближе нежели закусочная?
6. (17). Расстояние от пункта A до пункта B равно 120 км. В случайные моменты на интервале времени от 12 ч до 13 ч из пункта A в пункт B стартуют две машины – «Ауди» и «Фольксваген» со скоростями соответственно 100 км/ч и 80 км/ч. Какова вероятность того, что «Ауди» первой достигнет пункта B ?

Ответы:

1. 0.5
2. 0.5
3. 0.375
4. 0.4
5. 0.644
6. 0.755

Задача 11.

По цели производится 4 выстрела. Вероятность попадания при этом растет так: 0,2, 0,3, 0,5, 0,7. Найти закон распределения случайной величины X – числа попаданий. Найти вероятность того, что $X \geq 1$.

1. (Пример 6.2) Вероятность того, что в магазине будет в наличии необходимая студенту книга, равна 0,3. Составить закон распределения числа посещенных магазинов, которые последовательно посетит студент, чтобы купить книгу, если в городе 3 магазина. Найти числовые характеристики случайной величины.
2. (6.1) Бросается игральный кубик. Обозначим через N число выпавших очков. Рассматривая N как случайную величину, построить ее ряд распределения и функцию распределения. Найти вероятность того, что $N < 5$.
3. (6.3) Бросаются две монеты. Случайная величина X – число выпавших гербов. Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma[x]$.
4. (6.4) В конверте 18 марок, среди которых 7 чистых, остальные проштемпелеванные. Наудачу достают 3 марки. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа чистых марок среди отобранных. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что среди отобранных имеется хотя бы одна чистая марка.
5. (6.5). В кармане имеется 4 монеты по 5 копеек, 2 монеты по 50 копеек. Пассажир извлекает из кармана по одной монете до появления 5 копеек без возвращения. Построить ряд распределения случайной величины X (число попыток). Найти математическое ожидание и дисперсию. Найти функцию распределения.

6.

6.6. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

7.

6.8. Случайная величина Y задана рядом распределения:

Y	1	3	4	7
P	0,4	0,2	0,1	0,3

Построить график функции распределения $F(y)$. Найти вероятность того, что $2 < Y < 6$.

8.

6.9. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ e^{-x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

9.

6.10. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ C \cdot x, & \text{если } 0 \leq x \leq 20, \\ 1, & \text{если } x \geq 20. \end{cases}$$

Найти коэффициент C и плотность вероятности $f(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Ответы:

1. $M(X)=2.19, D(X)=0.7539$

x	1	2	3
p	0,3	0,21	0,49

2. $P(N<5) = 2/3$

3. $M[X] = 1; \sigma[x] \approx 0,7071$

4. $m_x = \frac{7}{6}, D_x = \frac{385}{612}, p(X \geq 1) = \frac{217}{272}$.

5. $m_x = 1,4; D_x = 1,037$

X	1	2	3
P	2/3	4/15	1/15

X	$x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$2 < x \leq 3$	$x > 3$
$F(x)$	0	2/3	14/15	1

6. $M[X] = 1; \sigma[x] = 1$

7. $P(2 < Y < 6) = 0,3$

8. $M[X] = 1; \sigma[x] = 1$

9.

$$C = 0,05; f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 0,05, & \text{если } 0 < x < 20, \\ 0, & \text{если } x > 20. \end{cases}$$

«Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: пособие / А. В. Гуревич [и др.] Минск, БГУИР, 2017. – 68 с.: ил.

Задача 12.

1. (7.4) Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Определить вероятность, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.
2. (7.5). Минутная стрелка часов движется скачкообразно в конце каждой минуты. Найти вероятность, что в данное мгновение часы покажут время, отличающееся от истинного не более, чем на 20 секунд.
3. (7.7) Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина распределена нормально с параметром $\sigma = 0,4$ мм, определить сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.
4. (7.6) Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X , которая распределена нормально с математическим ожиданием 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей составляет не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали а) больше 55 мм б) меньше 40 мм.

Ответы:

1. а) $P(0 < X < 0,04) + P(0 < X < 0,04) = 0,4$; б) $P(0,05 < X < 0,15) = 0,5$.
2. $P(0 < X < 20) + P(40 < X < 60) = 2/3$
3. $P = 0,92$.
4. а) $P(55 < X < 68) = 0,0823$; б) $P(32 < X < 40) = 0,0027$.

«Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: пособие / А. В. Гуревич [и др.] Минск, БГУИР, 2017. – 68 с.: ил.

Для заданий 13 и 14 сдается .ipynb файл с пояснениями и кодом.

Задача 13.

Вам дан датасет о рейтингах шоколадных батончиков со следующей информацией
<https://www.kaggle.com/datasets/rtatman/chocolate-bar-ratings>

- Company (Maker-if known): Название компании-производителя шоколада.
- Specific Bean Origin or Bar Name: Конкретное место происхождения бобов или название батончика.
- REF: Код ссылки.
- Review Date: Год обзора.
- Cocoa Percent: Процент содержания какао в шоколаде.
- Company Location: Местоположение компании.
- Rating: Рейтинг шоколада от 1 до 5.
- Bean Type: Тип какао-бобов.
- Broad Bean Origin: Общее происхождение какао-бобов.

Ответьте на вопросы:

А) Существует ли зависимость между процентом содержания какао и рейтингом шоколадных батончиков? Какой процент содержания какао имеет наивысший средний рейтинг?

Б) Каково распределение рейтингов среди компаний из разных стран? Влияет ли местоположение компании на рейтинг шоколадных батончиков?

В) Каков средний рейтинг батончиков, произведенных из разных типов какао-бобов? Существует ли тип бобов, который стабильно получает более высокие рейтинги?

Г) Существует ли связь между годом обзора и рейтингом шоколадных батончиков? Изменился ли средний рейтинг шоколадных батончиков с течением времени?

Задача 14.

По датасету из предыдущего задания построить следующие визуализации:

А) Построить диаграмму(ы), показывающие распределение процентов содержания какао в батончиках с разными рейтингами.

Б) Построить диаграмму(ы), показывающие средний рейтинг шоколадных батончиков в зависимости от местоположения компании.