

## Оценка погрешностей измерений показателя преломления модифицированными методами призмы

Александр Игоревич Юрин<sup>1✉</sup>, Геннадий Николаевич Вишняков<sup>2</sup>, Владимир Леонидович Минаев<sup>3</sup>

<sup>1, 3</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

<sup>1, 2, 3</sup> Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

<sup>1</sup>ayurin@hse.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-6401-5530>

<sup>2</sup>vish@vniiofi.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0237-4738>

<sup>3</sup>minaev@vniiofi.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4356-301X>

**Аннотация.** Исследованы гониометрические методы измерений показателя преломления оптически прозрачных материалов, основанные на преломлении света треугольной прямой призмой. Рассмотрены модифицированный метод наименьшего отклонения и три модификации метода постоянного отклонения, позволяющие определять показатель преломления треугольных призм с неизвестными преломляющими углами. Согласно модифицированным методам призмы углы отклонения света измеряют с помощью гониометра, а показатель преломления материала и преломляющие углы определяют из решения систем уравнений. Таким образом, отпадает необходимость предварительного измерения углов призмы, требующего применения специальных автоколлимационных гониометров. Кроме того, в модифицированных методах призмы не используется излучение, отражённое от граней призмы, что позволяет расширить спектральный диапазон измерения показателя преломления на инфракрасную и ультрафиолетовую области. Проведена сравнительная оценка погрешностей измерений показателя преломления рассмотренными методами на примере призмы с показателем преломления 1,5 и преломляющим углом 60°. Показано, что модифицированный метод наименьшего отклонения имеет наименьшую погрешность среди всех методов призмы, поэтому его можно рекомендовать для высокоточных измерений показателя преломления в тех случаях, когда преломляющие углы призмы неизвестны или их измерение связано с техническими трудностями. Рассмотренные модифицированные методы можно применять для измерения показателя преломления треугольных призм, изготовленных из оптически прозрачных материалов, а также жидкостей, залитых в полые призмы с плоскопараллельными прозрачными окнами. Практическая реализация подобных методов полезна в оптической, химической и пищевой промышленности для контроля состава и свойств оптически прозрачных веществ.

**Ключевые слова:** показатель преломления, гониометр, метод призмы, погрешность измерений

**Для цитирования:** Юрин А. И., Вишняков Г. Н., Минаев В. Л. Оценка погрешностей измерений показателя преломления модифицированными методами призмы // Измерительная техника. 2023. № 3. С. 28–32. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2023-3-28-32>

## Accuracy analysis of the refractive index measurements by modified prism methods

Alexander I. Yurin<sup>1✉</sup>, Gennady N. Vishnyakov<sup>2</sup>, Vladimir L. Minaev<sup>3</sup>

<sup>1, 3</sup> HSE University, Moscow, Russia

<sup>1, 2, 3</sup> All-Russian Research Institute for Optical and Physical Measurements, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>1</sup>ayurin@hse.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-6401-5530>

<sup>2</sup>vish@vniiofi.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0237-4738>

<sup>3</sup>minaev@vniiofi.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4356-301X>

**Abstract.** Goniometric methods of measuring the refractive index of optically transparent materials based on the refraction of light by a triangular prism are considered. Modified method of the minimum deviation and 3 modified constant deviation methods are considered, which allows determining the refractive index of triangular prisms with unknown apex angles. According to modified methods, the angles of light deviation by a prism are measured with goniometer, and the refractive index of the material and the prism angles are determined from solving the systems of equations. Thus, there is no need for preliminary measurement of the prism angles, which requires the use of special autocollimation goniometers. In addition, the modified methods do not use radiation reflected from the faces of the prism, which makes it possible to extend the spectral range of measurement of the refractive index to the infrared

and ultraviolet regions. A comparative accuracy analysis of the considered methods for a prism with a refractive index of 1.5 and an angle of 60° as example is carried out. It is shown that the modified methods can be used for high-precision measurements of the refractive index in cases if the apex angles of the prism are unknown or their measurement is associated with technical difficulties. The considered methods can be used to measure the refractive index of triangular prisms made of optically transparent materials, as well as liquids poured into hollow prisms with plane-parallel transparent windows. The practical implementation of such a methods can be useful in the optical, chemical and food industries to control the composition and properties of optically transparent substances.

**Keywords:** refractive index, goniometer, prism methods, measurements accuracy

**Введение.** Измерение показателя преломления веществ имеет широкую область применения в оптической и пищевой промышленности, химии, медицине, биологии и т. д. [1–5]. Точные измерения показателя преломления необходимы при контроле качества продукции, экологическом мониторинге, научных исследованиях [6].

Для измерений показателя преломления часто используют методы, основанные на измерении угла преломления света, проходящего через треугольную прямую призму (методы призмы) [7]. Углы преломления света измеряют с помощью специальных прецизионных приборов – гониометров. Гониометры имеют неподвижный коллиматор, поворотный предметный стол и применяются для измерений углов отклонения лучей, преломлённых или отражённых исследуемой призмой [8].

Методы призмы получили большую популярность при определении показателя преломления твёрдых и жидких веществ в результате простоты использования и высокой точности измерений. Подобные методы предполагают измерения углов падения и преломления луча на гранях, и по измеренным значениям углов вычисляют показатель преломления материала призмы. При этом известны различные варианты реализации методов призмы – метод автоколлимации Литрова-Аббе<sup>1</sup>, метод наименьшего отклонения<sup>2</sup> (МНО) и метод постоянного отклонения (МПО) [9]. Чаще всего применяют МНО, так как он универсален и позволяет получить высокую точность измерений.

**Классические методы призмы.** Монохроматический луч света, падающий на входную грань призмы под углом  $\varphi_1$ , отклоняется на некоторый угол  $\varepsilon$  от первоначального направления. Угол отклонения луча можно определить согласно закону Снелла [10] с учётом геометрических свойств углов:

$$\varepsilon = \varphi_1 - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_1 / n)]\}, \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  – угол падения на входную грань;  $\alpha$  – преломляющий угол призмы (угол между рабочими гранями);  $n$  – показатель преломления материала призмы.

В случае применения МНО необходимо получить минимальное отклонение луча  $\varepsilon_{\min}$  в результате изменения угла падения. Уравнение для расчёта показателя преломления примет следующий вид:

$$n = \sin[(\alpha + \varepsilon_{\min})/2] / \sin(\alpha/2). \quad (2)$$

МПО предполагает фиксированное значение  $\varepsilon$ , при котором измеряют необходимые углы падения  $\varphi_1$  и при известном значении  $\alpha$  рассчитывают показатель преломления.

Таким образом, для расчёта показателя преломления методами призмы преломляющий угол  $\alpha$  должен быть заранее известен либо предварительно измерен с высокой точностью. Для этого требуется произвести дополнительные высокоточные измерения двух угловых положений призмы с помощью специального автоколлимационного гониометра [11]. Авторы разработали модифицированные методы призмы [12–14], позволяющие измерять показатели преломления без априорной информации об  $\alpha$ .

Цель работы – сравнение точностных характеристик модифицированных методов призмы.

**Модифицированные методы призмы.** Суть модифицированных методов призмы состоит в нахождении показателя преломления с помощью систем уравнений, составленных по результатам измерений углов отклонения лучей призмой при изменении её углового положения. Рассмотрим различные варианты реализации модифицированных методов призмы.

В модифицированном МНО (ММНО) углы наименьшего отклонения  $\varepsilon_{\min\alpha}$ ,  $\varepsilon_{\min\beta}$ ,  $\varepsilon_{\min\gamma}$  лучей измеряют на всех трёх гранях призмы с преломляющими углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , соответственно. Далее составляют систему уравнений на основе (2) и свойств суммы углов треугольника:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\min\alpha} &= 2\arcsin[n\sin(\alpha/2)] - \alpha, \\ \varepsilon_{\min\beta} &= 2\arcsin[n\sin(\beta/2)] - \beta, \\ \varepsilon_{\min\gamma} &= 2\arcsin[n\sin(\gamma/2)] - \gamma, \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из системы уравнений (3) вычисляют показатель преломления. Решить подобную систему уравнений можно с помощью пакетов прикладного программного обеспечения, например Mathcad<sup>3</sup>.

В модифицированных методах постоянного отклонения (ММПО) в зависимости от числа неизвестных параметров необходимо измерить углы падения луча на входную грань призмы и составить систему с разным количеством уравнений – 2, 4 или 7 (ММПО2, ММПО4, ММПО7 соответственно).

<sup>1</sup> ГОСТ 28869-90. Материалы оптические. Методы измерений показателя преломления.

<sup>2</sup> International Organization for Standardization 2020 Optics and photonics. Test method for refractive index of optical glasses. Part 1: Minimum deviation method ISO 21395-1:2020.

<sup>3</sup> Mathcad: [Сайт]. <https://www.mathcad.com/en/> (дата обращения: 07.02.2023).

В первом случае (ММПО2) необходимо найти все возможные угловые положения призмы, при которых луч отклонится на некоторый фиксированный угол  $\varepsilon_1$  относительно исходного направления. При условии  $\varepsilon_1 > \varepsilon_{\min}$  можно найти два угловых положения призмы –  $\varphi_{11}$  и  $\varphi_{12}$ , когда луч, падающий на входную грань под углом  $\varphi_1$ , отклонится на угол  $\varepsilon_1$ . После этого используем формулу (1) и составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varphi_{11} - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_{11}/n)]\}; \\ \varepsilon_1 &= \varphi_{12} - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_{12}/n)]\}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Из решения системы (4) вычислим показатель преломления.

Если начальное угловое положение призмы неизвестно, то значение  $\varphi_{11}$  можно использовать как начало отсчёта, тогда  $\varphi_{12} = \varphi_{11} + \Delta\varphi$ , где угол  $\Delta\varphi$  необходимо измерить (ММПО7). В этом случае необходимо измерить  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$  для каждой рабочей грани и составить новую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varphi_{11\alpha} - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_{11\alpha}/n)]\}; \\ \varepsilon_1 &= \varphi_{11\alpha} + \Delta\varphi_\alpha - \alpha + \\ &+ \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin(\varphi_{11\alpha} + \Delta\varphi_\alpha)/n)]\}; \\ \varepsilon_1 &= \varphi_{11\beta} - \beta + \arcsin\{n \sin[\beta - \arcsin(\sin \varphi_{11\beta}/n)]\}; \\ \varepsilon_1 &= \varphi_{11\beta} + \Delta\varphi_\beta - \beta + \\ &+ \arcsin\{n \sin[\beta - \arcsin(\sin(\varphi_{11\beta} + \Delta\varphi_\beta)/n)]\}; \\ \varepsilon_1 &= \varphi_{11\gamma} - \gamma + \arcsin\{n \sin[\gamma - \arcsin(\sin \varphi_{11\gamma}/n)]\}; \\ \varepsilon_1 &= \varphi_{11\gamma} + \Delta\varphi_\gamma - \gamma + \\ &+ \arcsin\{n \sin[\gamma - \arcsin(\sin(\varphi_{11\gamma} + \Delta\varphi_\gamma)/n)]\}. \end{aligned} \right\} (5)$$

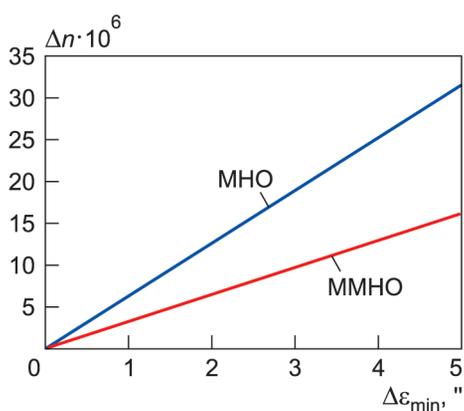


Рис. 1. Зависимость погрешности  $\Delta n$  измерения показателя преломления материала призмы в зависимости от погрешности  $\Delta\varepsilon_{\min}$  измерений угла минимального отклонения при применении метода наименьшего отклонения и его модификации

Fig. 1. Dependence of the error  $\Delta n$  of determining the refractive index of the prism material depending on the measurement error of the angle of minimum deviation  $\Delta\varepsilon_{\min}$  when using the method of minimum deviation and its modification

В системе уравнений (5) семь неизвестных –  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi_{11\alpha}$ ,  $\varphi_{11\beta}$ ,  $\varphi_{11\gamma}$ . Существует её однозначное решение.

Также в случае неизвестного начального положения призмы можно использовать два фиксированных угла  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  отклонения луча (ММПО4), для которых система (4) приобретёт следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varphi_{11} - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_{11}/n)]\}; \\ \varepsilon_2 &= \varphi_{12} - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_{12}/n)]\}; \\ \varepsilon_1 &= \varphi_{13} - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_{13}/n)]\}; \\ \varepsilon_2 &= \varphi_{14} - \alpha + \arcsin\{n \sin[\alpha - \arcsin(\sin \varphi_{14}/n)]\}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Значение  $\varphi_{11}$  можно использовать как начало отсчёта углов. Таким образом, с учётом известных значений  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  после измерения углов  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ ,  $\varphi_{14}$  в системе (6) останется только три параметра –  $\varphi_{11}$ ,  $n$ ,  $\alpha$ . Можно найти её решение.

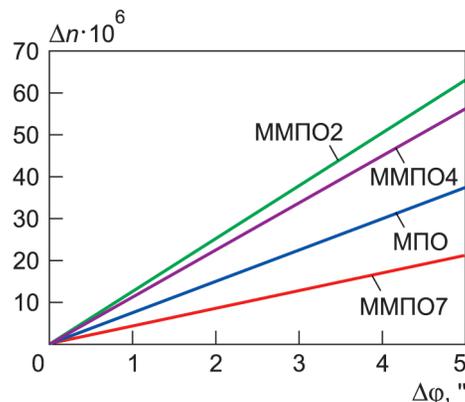


Рис. 2. Зависимость погрешности  $\Delta n$  измерения показателя преломления материала призмы методами постоянного отклонения и модифицированными методами в зависимости от погрешности  $\Delta\varphi$  измерений углов отклонения луча

Fig. 2. Dependence of the error  $\Delta n$  of determining the refractive index of the prism material by methods of constant deviation and modified methods depending on the measurement error  $\Delta\varphi$  of the beam deviation angles

**Сравнительные характеристики классических и модифицированных методов призмы**

Метод	$N_y$	Необходимость измерения $\alpha$	$\Delta n^*$
МНО	3	Да	3
МПО	3	Да	4
ММНО	3	Нет	1
ММПО2	2**	Нет	6
ММПО4	4	Нет	5
ММПО7	7	Нет	2

Примечание. \*\*Необходима информация о начальном угловом положении призмы.

Отметим, что при применении модифицированных методов призмы отпадает необходимость в априорной информации о преломляющем угле призмы, значение которого при необходимости также можно найти из решения предложенных систем уравнений.

**Оценка погрешностей методов.** МНО имеет наивысшую точность среди методов призмы [15]. Погрешность измерения показателя преломления  $\Delta n$  классическим МНО можно определить аналитически [16, 17], если рассчитать частные производные выражения (2):

$$\Delta n = \left| \frac{\sin[(\alpha + \varepsilon_{\min})/2]}{2\sin(\alpha/2)} \right| \Delta \varepsilon + \left| \frac{\sin(\varepsilon_{\min}/2)}{2\sin^2(\alpha/2)} \right| \Delta \alpha, \quad (7)$$

где  $\Delta \varepsilon$ ,  $\Delta \alpha$  – погрешности измерений соответствующих углов.

Так как значения  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  измеряют с помощью одних и тех же методов угловых измерений, будем считать, что  $\Delta \varepsilon$ ,  $\Delta \alpha$  одинаковы и коррелированы, т. е.  $\Delta \varepsilon = \Delta \alpha$ .

В модифицированных методах призмы показатель преломления находят из решения систем уравнений, поэтому для оценки погрешностей измерения показателя преломления рассматриваемыми методами необходимо использовать численное моделирование с учётом наихудшего возможного сценария распределения погрешностей угловых измерений.

Рассчитаем погрешность измерения показателя преломления  $\Delta n$  для призмы с  $\alpha = 60^\circ$  и  $n = 1,5$  в зависимости от погрешности  $\Delta \varepsilon_{\min}$  измерения углов  $\varepsilon_{\min}$ , используя уравнение (7), а также решая систему (3) с помощью надстройки «Поиск решений» Microsoft Excel (рис. 1). Согласно рис. 1 погрешность  $\Delta \varepsilon_{\min}$  оказывает меньшее влияние на результаты измерений показателя преломления в случае применения ММНО.

Аналогичным образом можно рассчитать погрешности измерения показателя преломления классическим МНО, а также модифицированными методами с системами, содержащими 2, 4 или 7 уравнений (ММНО2, ММНО4, ММНО7) для призмы с  $\alpha = 60^\circ$ ,  $n = 1,5$  в зависимости от погрешностей измерения углов  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  (принимая  $\Delta \varepsilon = \Delta \varphi$ ) при  $\varepsilon_1 = 40^\circ$ ,  $\varepsilon_2 = 39^\circ$  (рис. 2). ММНО7 обеспечивает меньшую погрешность по сравнению с другими методами постоянного отклонения, однако он отличается и большей трудоёмкостью измерительных процедур. В таблице приведены сравнительные характеристики рассмотренных методов, где  $N_y$  – необходимое число измеряемых углов,  $\Delta n^*$  – сравнительная оценка погрешности измерения показателя преломления соответствующим методом в баллах (1 – наименьшая, 6 – наибольшая).

**Заключение.** Рассмотренные в статье модифицированные методы измерений показателя преломления можно применять для исследования треугольных прямых призм из оптически прозрачных материалов или жидкостей, залитых в полую треугольную призму в случае отсутствия априорной информации о преломляющих углах. При этом погрешности измерений показателя преломления модифицированными методами призмы, а именно ММНО и ММНО7, меньше, чем погрешности измерений классическими методами, что подтверждает перспективу применения модифицированных методов призмы для высокоточных измерений показателя

преломления, в том числе в инфракрасном и ультрафиолетовом диапазонах.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.

#### Список источников / References

1. Kuiper M., Van de Nes A., Nieuwland R., Varga Z., Van der Pol E. *American Journal of Reproductive Immunology*, 2021, no. 85(2), e13350. <https://doi.org/10.1111/aji.13350>
2. Oti W. *IOSR Journal of Applied Chemistry*, 2016, vol. 9, pp. 89–91. <https://doi.org/10.9790/5736-0907018991>
3. A. Shehadeh, A. Evangelou, D. Kechagia, P. Tataridis, A. Chatzilazarou, F. Shehadeh. *Food Chemistry*, 2020, vol. 329, 127085. <https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2020.127085>
4. Xu M., Shao S., Weng N., Zhou L., Liu Q., Zhao Y. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11(22), 10548. <https://doi.org/10.3390/app112210548>
5. Nitta T., Sekimoto Y., Hasebe T., Noda K., Sekiguchi S., Nagai M., Hattori S., Murayama Y., Matsuo H., Dominjon A., Shan W., Naruse M., Kuno N., Nakai N. *Journal of Low Temperature Physics*, 2018, vol. 193, pp. 976–983. <https://doi.org/10.1007/s10909-018-2047-4>
6. Конопелько Л. А. Рефрактометрические методы в физико-химических измерениях. М.: Триумф, 2020. 208 с. [Konopel'ko L. A. *Refraktometricheskie metody v fiziko-khimicheskikh izmereniyakh*. Moscow, Triumph Publ., 2020, 224 p. (in Russ.)]
7. Astrua M., Pisani M. *Measurement Science and Technology*, 2009, vol. 20, no. 9, 095305. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/20/9/095305>
8. Лейкин М. В., Молочников Б. И., Морозов В. Н., Шакарян Э. С. Отражательная рефрактометрия. Л.: Машиностроение, 1983. 223 с. [Leikin M. V., Molochnikov B. I., Morozov V. N., Shakaryan E. S. *Otrazhatelnaya refraktometriya*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1983, 224 p. (in Russ.)]
9. Иоффе Б. В. Рефрактометрические методы химии. Л.: Химия, 1974, 350 с. [Ioffe B. V. *Refractometric Methods in Chemistry*. Leningrad, Khimiya Publ., 1974, 350 p. (in Russ.)]
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Изд. 2-е. Пер. с англ. М.: Наука, 1973, 721 с. [Born M., Wolf E. *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 4th ed., Pergamon Press, Oxford, New York, 1969, 808 p.]
11. Королев А. Н., Гарцуев А. И., Полищук Г. С., Трегув В. П. Цифровой автоколлиматор // Оптический журнал. 2009. Т. 76. № 10. С. 42–47. [Korolev A. N., Gartsuyev A. I., Polishchuk G. S., Tregub V. P. *Journal of Optical Technology*, 2009, vol. 76, no. 10, pp. 624–628. <https://doi.org/10.1364/JOT.76.000624>]
12. Юрин А. И., Вишняков Г. Н., Минаев В. Л. Измерение показателя преломления с помощью гониометрической системы // Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. № 12. С. 1899–1903. [Yurin A. I., Vishnyakov G. N., Minayev V. L. *Optics and Spectroscopy*, 2022, vol. 130, no. 12., pp. 1899–1903 (In Russ.)] <https://doi.org/10.21883/OS.2022.12.54098.4103-22>
13. Юрин А. И., Вишняков Г. Н., Минаев В. Л. Измерение показателя преломления с помощью модифицированного

метода постоянного отклонения // Измерительная техника. 2022. № 12. С. 35–39. [Yurin A. I., Vishnyakov G. N., Minayev V. L. Measurement of the refractive index using a modified constant deviation method. *Izmeritel'naya Tekhnika*, 2022, no. 12, pp. 35–39 (In Russ.)] <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-12-35-39>

14. Юрин А. И., Вишняков Г. Н., Минаев В. Л. Измерение показателя преломления с помощью модифицированного метода призмы // Измерительная техника. 2023. № 2. С. 19–23. [Yurin A. I., Vishnyakov G. N., Minayev V. L. Measurement of the refractive index using a modified prism method. *Izmeritel'naya Tekhnika*, 2023, no. 2, pp. 19–23 (In Russ.)] <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2023-2-19-23>

15. Tilton L. W., *Prism Refractometry and Certain Goniometrical Requirements for Precision (Classic Reprint)*. Forgotten Books, 2017.

16. Tentori-Santa-Cruz D., Lerma J. R. *Optical Engineering*, 1990, vol. 29, no. 2, pp. 160–168. <https://doi.org/10.1117/12.55573>

17. Вишняков Г. Н., Корнышева С. В. Влияние качества изготовления оптических элементов на точность измерения показателя преломления гониометрическим методом // Метрология. 2011. № 12. С. 10–18. [Vishnyakov G. N., Kornysheva S. V. *Measurement Techniques*, 2012, vol. 54, no. 12, pp. 1372–1377. <https://doi.org/10.1007/s11018-012-9898-x>]

*Статья поступила в редакцию 25.11.2022; одобрена после рецензирования 15.12.2022; принята к публикации 10.01.2023.  
The article was submitted 25.11.2022; approved after reviewing 15.12.2022; accepted for publication 10.01.2023.*