

Злотник А.А.^{1,2}, Ломоносов Т.А.^{1,2}¹Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",
Покровский бульвар, 11, Москва, 109028, Россия²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, Москва, 125047, Россия

Существует иерархия систем уравнений для описания динамики гетерогенных смесей. Данная работа связана с известной в литературе так называемой системой из четырех уравнений динамики гетерогенных смесей типа газ-жидкость, используемой в случае общей скорости и температуры компонент смеси [1]. Она включает уравнения баланса массы компонент и баланса импульса и полной энергии смеси

$$\partial_t(\alpha_k r_k) + \operatorname{div}(\alpha_k r_k \mathbf{u}) = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f},$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{u}) = \operatorname{div}(-q^F) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + Q.$$

В ней участвуют объемная концентрация $0 < \alpha_k < 1$ и плотность $r_k > 0$ компонент, скорость \mathbf{u} и удельная внутренняя энергия смеси ε , а также полная масса $\rho = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$ и полная энергия $E = 0.5 \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho \varepsilon$ смеси. Также $\mathbf{q}^F = -\kappa \nabla \theta$ – это поток тепла, где $\theta > 0$ – абсолютная температура смеси. Для компонент применяются широко употребляемые уравнения состояния «сжатого» газа

$$p_k(r_k, \theta) = (\gamma_k - 1) c_{vk} r_k \theta - p_{*k},$$

$$\varepsilon_k(r_k, \theta) = c_{vk} \theta + \frac{p_{*k}}{r_k} + \varepsilon_{0k},$$

где $\gamma_k > 1$, $c_{vk} > 0$, $p_{*k} \geq 0$, ε_{0k} – известные физические постоянные, $k = 1, 2$. Обычно значение $p_{*k} = 0$ отвечает газу, а $p_{*k} > 0$ – жидкости. При этом существенно, что давлением смеси служит общее давление компонент $p = p_1 = p_2$.

Данная система используется в квазигомогенной форме, в которой искомыми функциями являются альтернативные плотности компонент $\rho_k = \alpha_k r_k$ вместе с \mathbf{u} и ε , а α_k , r_k и θ исключены [1]. Это возможно благодаря тому, что p удовлетворяет квадратному уравнению $p^2 - bp - c = 0$ известными коэффициентами $b = b(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$, $c = c(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$. Доказывается, что его положительное решение $p = p_+(\rho_1, \rho_2, \varepsilon) > 0$ существует и единственно. Имеются также явные формулы для $\theta = \theta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$. Такая форма имеет преимущества при построении численных методов.

Несколькими способами выводится новая компактная формула для квадрата скорости звука для этой системы уравнений

$$c_s^2 = \frac{\gamma(p_+ + p_{*1})(p_+ + p_{*2})}{\rho \sqrt{d}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1 c_{v1} \rho_1 + \gamma_2 c_{v2} \rho_2}{c_{v1} \rho_1 + c_{v2} \rho_2},$$

где $d = b^2 + 4c$ – дискриминант квадратного уравне-

ния для p . Выписывается уравнение баланса давления смеси, содержащее эту скорость звука. Доказывается полезное неравенство $c_s^2 \leq c_{sw}^2$, где c_{sw} – известная скорость звука смеси по Вуду.

Благодаря квазигомогенной форме указанной системы уравнений оказывается возможным выполнить ее специальную регуляризацию квазигазодинамического типа [2,3]. Она связана с использованием регуляризующих скоростей, тензора вязкости и потока тепла с искусственными коэффициентами вязкости и теплопроводности с малым параметром. Для регуляризованной системы приводятся уравнения баланса массы, кинетической энергии и внутренней энергии смеси. Для упрощенной регуляризованной системы выводится также уравнение баланса энтропии смеси с неотрицательным производством энтропии.

Для регуляризованной системы уравнений в одномерном случае строится явная по времени и симметричная трехточечная по пространству разностная схема без применения лимитеров. Такая схема условно устойчива при условии типа Куранта именно благодаря использованию регуляризации. Выписываются разностные уравнения баланса массы, кинетической и внутренней энергий смеси.

Выполняется серия расчетов известных в литературе тестов и приводятся успешные результаты численных экспериментов.

Основные результаты данной работы представлены в статье [4].

Список литературы:

1. Le Martelot S., Saurel R., Nkongla B. Towards the direct numerical simulation of nucleate boiling flows // Int. J. Multiphase Flow. 2014. V. 66. P. 62-78.
2. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
3. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
4. Zlotnik A., Lomonosov T. On a doubly reduced model for dynamics of heterogeneous mixtures of stiffened gases, its regularizations and their implementations // Chaos. 2023. Vol. 33. No. 11. Article 113128. 20 pp.

Работа поддержана РФФ, проект 22-11-00126 (анализ модели и ее регуляризация) и Московским центром фундаментальной и прикладной математики по соглашению с Минобрнауки РФ, проект 075-15-2022-283 (разностный метод и расчеты).