

Злотник А.А.<sup>1,2</sup>, Ломоносов Т.А.<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",  
Покровский бульвар, 11, Москва, 109028, Россия<sup>2</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
Миусская пл., 4, Москва, 125047, Россия

Работа связана с известной в литературе так называемой системой из четырех уравнений динамики гетерогенных смесей типа газ-жидкость [1]. Система рассматривается в квазигомогенной форме и состоит из уравнений баланса массы компонент и баланса импульса и полной энергии смеси

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}) &= 0, \quad k = 1, 2, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \rho \mathbf{f}, \\ \partial_t (0.5 \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho \varepsilon) + \operatorname{div}((0.5 \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho \varepsilon + p) \mathbf{u}) &= \\ &= \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + Q, \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_k = \alpha_k r_k$ , а  $r_k > 0$  – плотность и  $0 < \alpha_k < 1$  – объемная доля  $k$ -й компоненты смеси,  $\mathbf{u}$  и  $\theta > 0$  – общие скорость и абсолютная температура смеси. Кроме того,  $\mathbf{q}^F = -\kappa \nabla \theta$  – поток тепла.

Берутся уравнения состояния "сжатого" газа Нобла-Абеля [2]

$$\begin{aligned} p_k(r_k, \theta) &= \frac{(\gamma_k - 1) c_{vk} r_k \theta}{1 - b_k r_k} - p_{*k}, \\ \varepsilon_k(r_k, \theta) &= c_{vk} \theta + \frac{p_{*k} (1 - b_k r_k)}{r_k} + \varepsilon_{0k}, \end{aligned}$$

где  $0 < r_k < b_k^{-1}$ , а  $\gamma_k > 1$ ,  $c_{vk} > 0$ ,  $b_k \geq 0$ ,  $p_{*k} \geq 0$ ,  $\varepsilon_{0k}$  – заданные физические постоянные,  $k = 1, 2$ . Давления компонент совпадают:  $p = p_1 = p_2$ .

Целью работы является расширение результатов [3] со случая уравнений состояния сжатого газа (где  $b_k = 0$ ) на уравнения сжатого газа Нобла-Абеля.

Для  $p = p(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$  справедливо квадратное уравнение вида  $p^2 - \beta p - c = 0$  с известными коэффициентами  $\beta = \beta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$ ,  $c = c(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$ . Обосновывается, что физическое решение  $p = p_+ > 0$  существует и единственно.

Обобщается новая компактная формула для скорости звука для этой системы уравнений. Выводится уравнение баланса давления смеси с использованием этой формулы. Прямым образом устанавливается, что эта скорость звука не превосходит известную скорость звука смеси по Вуду.

Затем обобщается регуляризация из [3] квазигазодинамического типа [4] указанной системы уравнений. Указываются некоторые ее свойства.

Обобщается также явная по времени и симметричная трехточечная по пространству разностная схема без использования лимитеров для регуляризованной системы уравнений в одномерном случае.

Разработан программный комплекс на языке C#, реализующий разностную схему. С его помощью

рассчитывается набор известных в литературе тестов. В том числе моделируется начальная стадия течения с кавитацией в трубе (тест 8.2.1 в [5]). В этом тесте берутся две фазы воды: 1% водяного пара и 99% жидкой воды, и для них применяются соответственно уравнения состояния с физическими постоянными  $(\gamma_1, p_{*1}, \varepsilon_{01}, c_{v1}, b_1) = (1.467, 0, 2077616, 955, 0)$  и  $(\gamma_2, p_{*2}, \varepsilon_{02}, c_{v2}, b_2) = (1.187, 7.028 \times 10^8, -1177788, 3610, 6.61 \times 10^{-4})$ .

Начальные данные имеют вид  $(\alpha_1, u, p, \theta) = (0.01, 2 \operatorname{sgn} x, 10^5, 353)$  при  $|x| \leq 0.5$ . На рис. 1 продемонстрированы результаты при  $t_{fin} = 0.003$ .

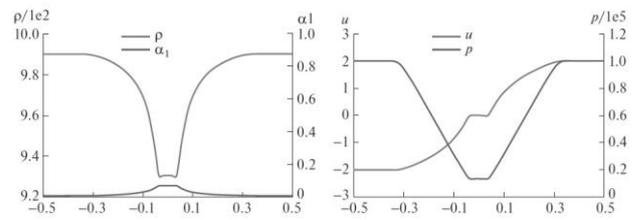


Рис. 1: Результаты расчета течения с кавитацией.

Основные результаты опубликованы в [6]. Дополнительно к [3,6] успешно начата реализация более сложной модели с учетом фазовых переходов испарение/конденсация.

Список литературы:

1. Saurel R., Boivin P., Le Métayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows // Comput. Fluids. 2016. V. 128. P. 53 – 64.
2. Le Métayer O., Saurel R. The Noble-Abel stiffened-gas equation of state // Phys. Fluids. 2016. V. 28. P. 046102.
3. Zlotnik A., Lomonosov T. On a doubly reduced model for dynamics of heterogeneous mixtures of stiffened gases, its regularizations and their implementations // Chaos. 2023. Vol. 33. No. 11. Article 113128.
4. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
5. Pelanti M. Arbitrary-rate relaxation techniques for the numerical modeling of compressible two-phase flows with heat and mass transfer // Int. J. Multiphase Flow. 2022. V. 153, article 104097.
6. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. Регуляризованные уравнения динамики гетерогенных бинарных смесей "сжатых" газов Нобла-Абеля и их применение // ДАН. 2023. Т. 514. № 1. С. 26–33.

Работа поддержана РФФ, проект 22-11-00126 (анализ модели и ее регуляризация) и Московским центром фундаментальной и прикладной математики по соглашению с Минобрнауки РФ, проект 075-15-2022-283) (разностный метод и расчеты).