УДК: 517.9

Быстро сходящиеся черновские аппроксимации C_0-полугруппы, сгенерированной оператором второй производной

О.Е. Галкин, С.Ю. Галкина

1) olegegalkin@ya.ru; Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“

2) svetlana.u.galkina@mail.ru; Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“

Аннотация

Работа посвящена построению функций Чернова высших порядков для C_0-полугруппы уравнения теплопроводности, генератором которой является оператор второй производной. Для соответствующих черновских аппроксимаций получены верхние и нижние оценки для погрешности приближения полугруппы.

Ключевые слова: операторные C_0-полугруппы, функции Чернова высокого порядка, оценки погрешности черновских аппроксимаций.

Если $(X, \|\cdot\|)$ — произвольное банахово пространство, то через $\mathcal{L}(X)$ будем обозначать множество всех ограниченных линейных операторов на X. Далее мы будем использовать понятия *сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа* (или просто *C_0–полугруппа*), *сжимающая полугруппа* и *генератор сильно непрерывной полугруппы*, определения которых можно найти, например, в книге Энгеля и Нагеля [1].

В 1968 году Поль Чернов в [2] доказал следующую теорему:

Теорема 1 (Чернов; 1968). *Пусть X — банахово пространство, $F(t)$ — сильно непрерывная функция из $[0,\infty)$ в подмножество сжимающих операторов из $\mathcal{L}(X)$, причем $F(0) = I$. Пусть замыкание A сильной производной $F'(0)$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$. Тогда $[F(t/n)]^n$ сходится к e^{tA} в сильной операторной топологии.*

Заметим, что эта теорема не содержит оценки скорости сходимости. В 2022 году в [3] (см. также [4]) была опубликована теорема, которая дает такую оценку при определенных условиях:

Теорема 2 (Галкин, Ремизов; 2021). *Пусть C_0-полугруппа $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ с генератором $(A, D(A))$ в банаховом пространстве X для некоторых $M_1 \geq 1$ и $w \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\|e^{tA}\| \leqslant M_1 e^{wt}$ для всех $t \geqslant 0$. Пусть, кроме того, для отображения $F\colon [0,+\infty) \to \mathcal{L}(X)$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и любых $x \in D(A^{m+1}) \subset X$, $t \in (0, T]$ верно неравенство*

$$\Big\|F(t)x - \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k x\Big\| \leqslant C_m(t) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \|A^{m+1}x\|,$$

где $C_m(t) > 0$ при каждом $t \in (0, T]$. Предположим также, что $\|F(t)^k\| \leq M_2 e^{kwt}$ при некотором $M_2 \geq 1$ для всех $t \in [0, T]$ и натуральных k. Тогда для любых $x \in D(A^{m+1})$, $t \in (0, T]$ и натуральных n будет выполняться оценка

$$\left\| \left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x - e^{tA} x \right\| \leq \left(C_m\left(\frac{t}{n}\right) + M_1 e^{\frac{|w|t}{n}}\right) \frac{M_1 M_2 t^{m+1} e^{wt}}{n^m (m+1)!} \|A^{m+1} x\|.$$

Отображение $F\colon (0, T] \in \mathcal{L}(X)$ называется *функцией Чернова порядка m для оператора A*, если оно удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть $UC_b(\mathbb{R})$ - банахово пространство всех равномерно непрерывных ограниченных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, и оператор $L = [f \mapsto f'']$ имеет область определения $D(L) = \{f \in UC_b(\mathbb{R}) \mid f'' \in UC_b(\mathbb{R})\}$. Нас интересует, *как на основе пространственных сдвигов построить для оператора L функцию Чернова S_m любого порядка $m \in \mathbb{N}$*. В этом направлении известны, в частности, следующие результаты:

а) в 2016 году Иван Ремизов [5] нашел функцию Чернова порядка 1 из трёх слагаемых:

$$[S_1(t)f](x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{4} f(x + 2\sqrt{t}) + \frac{1}{4} f(x - 2\sqrt{t}) = f(x) + t f''(x) + o(t).$$

б) в 2019 году Александр Веденин построил из трёх слагаемых функцию Чернова уже порядка 2:

$$[S_2(t)f](x) = \frac{2}{3} f(x) + \frac{1}{6} f(x + \sqrt{6t}) + \frac{1}{6} f(x - \sqrt{6t}) = f(x) + t f''(x) + \frac{t^2}{2} f^{IV}(x) + o(t^2).$$

В общем случае, верна следующая теорема:

Теорема 3. *Для любого натурального m существует единственная функция Чернова S_m порядка m для оператора $A = [f \mapsto f'']$, имеющая вид*

$$[S_m(t)f](x) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i \cdot F(x + b_i t^{s_i}).$$

В этом случае будут верны также следующие утверждения:

1) $s_1 = \ldots = s_{m+1} = 1/2$;

2) числа $b_1/2, \ldots, b_{m+1}/2$ являются различными корнями ортогональных многочлена Чебышева–Эрмита степени $m+1$;

3) числа $a_1, \ldots, a_{m+1}$ являются коэффициентами Кристоффеля, соответствующими квадратурным узлам $b_1, \ldots, b_{m+1}$ и могут быть вычислены по формулам

$$a_i = \frac{2^{m+2}(M+1)!\sqrt{\pi}}{(H'_{m+1}(b_i))^2}, \quad i = 1, \ldots, m+1.$$

Благодарности. Авторы благодарят Р.Н. Гумерова и И.Д. Ремизова за внимание к работе. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Список литературы

[1] Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* – Springer, 2000. – 587 p.

[2] Chernoff P. R. *Note on product formulas for operator semigroups* // J. Functional Analysis. – 1968. – V. 2. – No. 2. – P. 238–242.

[3] Galkin O. E., Remizov I. D. *Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators* // 2021. – arXiv:2104.01249. – math.FA.

[4] Галкин О. Е., Ремизов И. Д. *Скорость сходимости черновских аппроксимаций операторных C_0-полугрупп.* // Матем. заметки. – 2022. – Т. 111. – № 2. – С. 297–299.

[5] Ремизов И. Д. *Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига.* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100. – № 3. – С. 477–480.

Fast converging Chernov approximations of C_0-semigroup generated by the second derivative operator

O.E. Galkin, S.Yu. Galkina

Abstract

The paper is devoted to the construction of high-order Chernov functions for the C_0-semigroup of the heat equation, the generator of which is the operator of the second derivative. For the corresponding Chernov approximations, upper and lower estimates for the error of the semigroup approximation are obtained.

Keywords: operator C_0-semigroups, high-order Chernov functions, error estimates of Chernov approximations.