НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ СТЕПЕННОГО КЛАССА ТАКАГИ И ИХ СВОЙСТВА[1]

О.Е. Галкин, С.Ю. Галкина, А.А. Тронов[2]

(Нижний Новгород, НИУ ВШЭ)

olegegalkin@ya.ru, svetlana.u.galkina@mail.ru, tronovaa@yandex.ru

Доклад посвящен изучению степенных функций Такаги $S_p(x)$. По конструкции они аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги $T(x)$, описанной в 1903 г в [1]:

Определение 1. *Степенной функцией Такаги с параметром (показателем)* $p > 0$ мы называем вещественнозначную функцию $S_p(x)$, задаваемую на числовой оси $\mathbb{R}$ с помощью равенства

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $S_0(x) = \rho(x, \mathbb{R}) = \inf_{q \in \mathbb{R}} |x - q|$ — расстояние между точкой x и ближайшей к ней целой точкой.

Если $p = 1$, то $S_p(x)$ совпадает с функцией Такаги $T(x)$ из [1].

График степенной функции Такаги $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$, изображенный сплошной линией, можно увидеть далее на рисунке 1, вместе с графиками первых пяти частичных сумм ряда (1), изображенными пунктиром. Вертикальные штрихпунктирные линии на этом рисунке указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке $[0; 1]$: $x = 1/3$ и $x = 2/3$ (см. теорему 3).

Нами получены, в частности, следующие результаты:

Теорема 1. *При любом* $p > 0$ *степенная функция Такаги* S_p *на множестве* $\mathbb{R}$ *всюду определена, непрерывна, четна, имеет период* 1 *и обладает следующим свойством симметрии:*

$$S_p(x) = S_p(q - x) \quad \text{при всех } q \in \mathbb{R} \text{ и всех } x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, для любого $p > 0$ *функция* S_p *ограничена, причем для всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $0 \leqslant S_p(x) \leqslant 1/(2^p - 1)$.

---

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

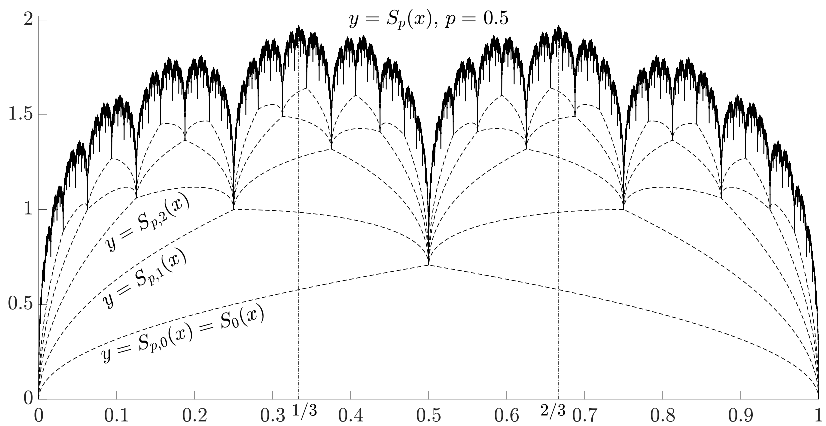

Рис. 1: График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$.

Теорема 2. *При любом $p \in (0;1)$ у степенной функции Такаги S_p нет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке из $\mathbb{R}$.*

Теорема 3. *Пусть $p \in (0;1)$. Тогда:*

1) глобальный максимум функции $S_p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ равен $2^p/(3^p(2^p-1))$ и достигается только в точках вида $x = q + 1/3$ и $x = q + 2/3$, где q — произвольное целое число;

2) глобальный минимум функции $S_p(x)$ по $x \in \mathbb{R}$ равен 0 и достигается только в целых точках x.

Теорема 4. *Пусть $p \in (0;1]$. Тогда верны два утверждения:*

1) Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $0 < |x-y| \leqslant 1$, то верно неравенство

$$|S_p(x)-S_p(y)| \leqslant |x-y|^p\Big(\Phi_p+\log_2\frac{1}{|x-y|}\Big), \text{ где } \Phi_p = \frac{2^p}{2^p-1}-\log_2 3.$$

2) Функция S_p удовлетворяет следующему логарифмическому условию Гёльдера *с показателем p и константой $C = 2^p/(2^p-1)$: если $x, y \in \mathbb{R}$ и $0 < |x-y| \leqslant 1/3$, то выполняется неравенство*

$$|S_p(x)-S_p(y)| \leqslant \frac{2^p}{2^p-1}\cdot|x-y|^p\cdot\log_3\frac{1}{|x-y|}.$$

Литература

1. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. — 1903. — V. 1. — C. 176–177.