Голоморфные слоения на комплексных многообразиях с действием тора

Т. Е. Панов

МГУ & НИУ ВШЭ

International conference "Algebraic topology and applications"

ФКН НИУ ВШЭ 15–17 июля 2024

Момент-угол-комплекс

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$
$I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ — симплекс; всегда $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим m-мерный единичный полидиск:

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leqslant 1 \text{ for } i = 1, \ldots, m\}.$$

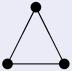
Момент-угол-комплекс

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i \in I} \mathbb{D} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{S} \Bigr) \subset \mathbb{D}^m,$$

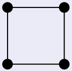
где $\mathbb{S}$ — граница диска $\mathbb{D}$.

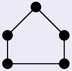
На $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ действует тор T^m.
Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение сферы (например, граница симплициального многогранника), то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — топологическое многообразие, момент-угол-многообразие.

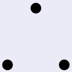
Пример

1. $\mathcal{K} =$  (граница треугольника). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\mathbb{S}) \cup (\mathbb{D}\times\mathbb{S}\times\mathbb{D}) \cup (\mathbb{S}\times\mathbb{D}\times\mathbb{D}) = \partial(\mathbb{D}^3) \cong S^5.$$

2. $\mathcal{K} =$  (граница квадрата). Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^3 \times S^3$.

3. $\mathcal{K} =$  Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong \underbrace{(S^3\times S^4)\#\cdots\#(S^3\times S^4)}_{5}$.

4. $\mathcal{K} =$  (три точки). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}\times\mathbb{S}\times\mathbb{S}) \cup (\mathbb{S}\times\mathbb{D}\times\mathbb{S}) \cup (\mathbb{S}\times\mathbb{S}\times\mathbb{D}) \simeq S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$$

(не многообразие).

Аналогично определим открытое подмногообразие $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$:

$$U(\mathcal{K}) := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} \mathbb{C} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{C}^\times \Big), \qquad \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда $U(\mathcal{K})$ — торическое многообразие, соответствующее вееру

$$\Sigma_\mathcal{K} = \{\mathbb{R}_\geqslant \langle e_i : i \in I \rangle : I \in \mathcal{K}\},$$

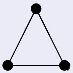
где e_i обозначает i-й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^m$.

Теорема

а) $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup\limits_{\{i_1,\ldots,i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0\}$

(дополнение набора координатных подпространств);

б) *существует T^m-деформационная ретракция $U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_\mathcal{K}$.*

Например, $\mathcal{K} =$  $\quad U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z_1 = z_2 = z_3 = 0\} \xrightarrow{\simeq} S^5 = \mathcal{Z}_\mathcal{K}$

Симплициальные вееры, комплексные структуры

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ — симплициальный комплекс полного симплициального веера Σ в n-мерном пространстве V.

Тогда деформационную ретракцию $U(\mathcal{K}) \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ можно реализовать как проекцию на пространство орбит гладкого и собственного действия некомпактной подгруппы $R \subset (\mathbb{C}^\times)^m$, изоморфной $\mathbb{R}^{m-n}$, следующим образом.

Выберем образующие $a_1, \ldots, a_m$ одномерных конусов Σ. Рассмотрим линейную проекцию

$$q\colon \mathbb{R}^m \to V, \quad e_i \mapsto a_i.$$

Положим

$$\mathfrak{r} = \operatorname{Ker} q,$$

$$R = \exp(\mathfrak{r}) = \{e^r \colon r \in \mathfrak{r}\} \subset (\mathbb{R}^\times)^m, \quad H' = \exp(i\mathfrak{r}) \subset T^m.$$

Подгруппа $H' \subset T^m$ *незамкнута*, если $\mathfrak{r} \subset \mathbb{R}^m$ не является рациональным подпространством.

Теорема

Действие R на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно, а факторпространство $U(\mathcal{K})/R$ гомеоморфно моменту-угол-комплексу $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Подгруппа $H' \subset T^m$ действует на $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = U(\mathcal{K})/R$.
Действие H' на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ почти свободно (конечные стабилизаторы).
Получаем гладкое слоение на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ орбитами H'.

Предположим, что $\dim \mathcal{Z}_\mathcal{K} = m + n$ чётно.
T^m-инвариантная комплексная структура на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ задаётся двумя данными:

- полный симплициальный веер $\Sigma = \{\mathcal{K}; a_1, \ldots, a_m\}$ в V, задаваемый комплексом $\mathcal{K}$ и образующими $a_1, \ldots, a_m$;
- комплексная структура в ядре проекции $q\colon \mathbb{R}^m \to V$, $e_i \mapsto a_i$.

Выбор комплексной структуры в $\operatorname{Ker} q$ эквивалентен выбору $\frac{m-n}{2}$-мерного комплексного подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}^m$, такого что

а) композиция $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathrm{Re}} \mathbb{R}^m$ инъективна;

б) композиция $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathrm{Re}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{q} V$ нулевая.

Рассмотрим $\frac{m-n}{2}$-мерную комплексно-аналитическую подгруппу

$$H = \exp(\mathfrak{h}) \subset (\mathbb{C}^\times)^m.$$

Она голоморфно действует на $U(\mathcal{K})$.

Теорема

Пусть Σ *— полный симплициальный вер в* $V \cong \mathbb{R}^n$*, задаваемый образующими* $a_1, \ldots, a_m$ *и симплициальным комплексом* $\mathcal{K}$*. Предположим, что* $m - n = 2\ell$*. Тогда*

a) *голоморфное действие группы* $H \cong \mathbb{C}^\ell$ *на* $U(\mathcal{K})$ *свободно и собственно, тем самым факторпространство* $U(\mathcal{K})/H$ *является компактным комплексным многообразием;*

a) *имеется* T^m*-эквивариантный диффеоморфизм* $U(\mathcal{K})/H \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$*, задающий комплексную структуру на* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$*, в которой тор* T^m *действует голоморфными преобразованиями.*

Пример (голоморфные торы)

Пусть $\mathcal{K}$ — пустой комплекс на 2 элементах (две призрачные вершины). Имеем $n = 0$, $m = 2$, $\ell = 1$ и $q\colon \mathbb{R}^2 \to 0$ — нулевое отображение.

1-мерное комплексное подпространство $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ задано как $z \mapsto (\gamma_1 z, \gamma_2 z)$ для $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$, т. е.

$$H = \{(e^{\gamma_1 z}, e^{\gamma_2 z})\} \subset (\mathbb{C}^\times)^2.$$

Условие б) выше пустое, а условие а) эквивалентно тому, что γ_1, γ_2 линейно независимы над $\mathbb{R}$. Тогда $\exp \mathfrak{h} = H \to (\mathbb{C}^\times)^2$ — вложение замкнутой подгруппы и

$$(\mathbb{C}^\times)^2 / H \cong \mathbb{C}/(\gamma_1\mathbb{Z} \oplus \gamma_2\mathbb{Z}) \cong T^2.$$

Аналогично, если $\mathcal{K}$ — пустой комплекс на 2ℓ элементах (т. е. $n = 0$, $m = 2\ell$), то можно представить любой комплексный тор $T^{2\ell}$ как факторпространство $(\mathbb{C}^\times)^{2\ell}/H$.

Обратно, пусть $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ допускает T^m-инвариантную комплексную структуру. Тогда действие T^m продолжается до голоморфного действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Подгруппа глобальных стабилизаторов

$$H = \{g \in (\mathbb{C}^\times)^m \colon g \cdot x = x \text{ для всех } x \in \mathcal{Z}_\mathcal{K}\}.$$

$\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ — комплексное подпространство в $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}^\times)^m = \mathbb{C}^m$, причём

а) композиция $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathrm{Re}} \mathbb{R}^m$ инъективна;

б) $q \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m / \mathrm{Re}(\mathfrak{h})$ переводит координатный веер $\Sigma_\mathcal{K}$ в полный веер $q(\Sigma_\mathcal{K})$ в $\mathbb{R}^m / \mathrm{Re}(\mathfrak{h})$.

Теорема (Исида)

Любое комплексное момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ биголоморфно фактормногообразию $U(\mathcal{K})/H$.

Итак, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ допускает комплексную структуру $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ происходит из полного симплициального веера (т. е. является звёздчатой сферой).

Каноническое голоморфное слоение на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$

Имеем $q\colon \mathbb{R}^m \to V$, $e_i \mapsto a_i$, $\qquad \mathfrak{r} = \operatorname{Ker} q$,

$$R = \exp(\mathfrak{r}) = \{e^r : r \in \mathfrak{r}\} \subset (\mathbb{R}^\times)^m, \quad H' = \exp(i\mathfrak{r}) \subset T^m.$$

Рассмотрим комплексификацию $\mathfrak{r}_\mathbb{C} = \operatorname{Ker}(q_\mathbb{C}\colon \mathbb{C}^m \to V_\mathbb{C})$ и

$$R_\mathbb{C} = \exp(\mathfrak{r}_\mathbb{C}) \subset (\mathbb{C}^\times)^m, \quad R_\mathbb{C}/H \cong H'.$$

Голоморфное слоение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = U(\mathcal{K})/H$ орбитами $R_\mathbb{C}/H \cong H'$.

Если подпространство $\mathfrak{r} \subset \mathbb{R}^m$ рационально, то $R_\mathbb{C} \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ замкнута (алгебраична) и полный веер $\Sigma := q(\Sigma_\mathcal{K})$ рационален.
Рациональный веер Σ задаёт торическое многообразие

$$X_\Sigma = \mathcal{Z}_\mathcal{K}/H' = U(\mathcal{K})/R_\mathbb{C}.$$

Каноническое голоморфное слоение превращается в голоморфное расслоение Зейферта над торическим орбиобразием X_Σ со слоем комплексный тор $R_\mathbb{C}/H \cong T^{m-n}$.

Рациональный случай:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m & \supset & U(\mathcal{K}) \arrow[dr, "H \cong \mathbb{C}^\ell"] \arrow[dd, "R_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^\times)^{2\ell}"'] & & \\
& & & \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \arrow[dl, "R_{\mathbb{C}}/H \cong T^{2\ell}"] & \text{м-у-многообразие} \\
\text{торическое многообразие} & & X_\Sigma & &
\end{tikzcd}
$$

Иррациональный случай:

Имеем $U(\mathcal{K}) \xrightarrow{H} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$,

и голоморфное слоение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ орбитами $R_{\mathbb{C}}/H = H' \subset T^m$.

Голоморфное слоение $(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F})$ моделирует «иррациональные торические многообразия».

Когомологии де Рама и Дольбо

Кольцо граней (кольцо Стенли–Райснера)

$$\mathbb{C}[\mathcal{K}] := \mathbb{C}[v_1, ..., v_m]/I_{\mathcal{K}} = \mathbb{C}[v_1, ..., v_m]/(v_{i_1} \cdots v_{i_k} : \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}),$$

где $\mathbb{C}[v_1, ..., v_m]$ — алгебра многочленов, $\deg v_i = 2$,
$I_{\mathcal{K}}$ — идеал Стенли–Райснера.

Предложение

Кольцо T^m-эквивариантных когомологий

$$H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H^*_{T^m}(U(\mathcal{K})) \cong \mathbb{C}[\mathcal{K}].$$

Торическое многообразие X_Σ является кэлеровым (эквивалентно, проективным) $\Leftrightarrow$ веер Σ является нормальным веером неособого простого многогранника с вершинами в решётке.

Теорема (Данилов)

Кольцо когомологий Дольбо полного неособого X_Σ есть

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(X_\Sigma) \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/(I_\mathcal{K} + J_\Sigma),$$

где $v_i \in H^{1,1}_{\bar\partial}(X_\Sigma)$, $I_\mathcal{K}$ — идеал Стенли–Райснера,
J_Σ — идеал, порождённый линейными формами $\sum_{k=1}^m \langle a_k, u\rangle v_k$,
$a_k = q(e_k)$ — образующие 1*-мерных конусов Σ, $u \in V^*$.*

Ненулевые числа Ходжа суть $h^{p,p}(X_\Sigma) = h_p$,
где $h(\Sigma) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ — h-вектор веера Σ.

Теорема (Бухштабер–П.)

Кольцо когомологий де Рама момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ есть

$$\begin{aligned}
H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{C}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{C}[\mathcal{K}],\mathbb{C})\\
&\cong H\bigl(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbb{C}[\mathcal{K}],d\bigr) \qquad du_i=v_i,\ dv_i=0\\
&\cong H\bigl(\Lambda[t_1,\dots,t_{m-n}]\otimes H^*(X_\Sigma),d\bigr) \qquad \Lambda[t_1,\dots,t_{m-n}]=H^*(H')\\
&\cong \bigoplus_{I\subset[m]}\widetilde{H}^{*-|I|-1}(\mathcal{K}_I).
\end{aligned}$$

Теорема (П.–Устиновский)

Пусть Σ *— рациональный веер,* $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \xrightarrow{T^{2\ell}} X_\Sigma$ *— голоморфное расслоение на торы. Тогда кольцо когомологий Дольбо многообразия* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ *есть*

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H\big(\Lambda[\xi_1,\ldots,\xi_\ell,\eta_1,\ldots,\eta_\ell] \otimes H^{*,*}_{\bar\partial}(X_\Sigma), d\big),$$

где $\Lambda[\xi_1,\ldots,\xi_\ell,\eta_1,\ldots,\eta_\ell] = H^{*,*}_{\bar\partial}(T^{2\ell})$, $\xi_j \in H^{1,0}_{\bar\partial}(T^{2\ell})$, $\eta_j \in H^{0,1}_{\bar\partial}(T^{2\ell})$, $dv_j = d\eta_j = 0$, $d\xi_j = c(\xi_j)$,
$c\colon H^{1,0}_{\bar\partial}(T^{2\ell}) \to H^{1,1}_{\bar\partial}(X_\Sigma)$ *— отображение первого класса Чженя.*

Следствие

а) *спектральная последовательность Бореля голоморфного расслоения* $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \xrightarrow{T^{2\ell}} X_\Sigma$ *(сходящаяся к когомологиям Дольбо многообразия* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$*) вырождается в члене* E_3*;*

б) *спектральная последовательность Фрёлихера (с* $E_1 = H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$*, сходящаяся к* $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$*) вырождается в члене* E_2*.*

Базисные когомологии

M — многообразие с действием связной группы Ли G, $\quad \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$.

$$\Omega(M)_{\mathrm{bas},\, G} = \{\omega \in \Omega(M) \colon \iota_\xi \omega = L_\xi \omega = 0 \text{ для любого } \xi \in \mathfrak{g}\},$$

$H^*_{\mathrm{bas},\, G}(M) = H(\Omega(M)_{\mathrm{bas},\, G}, d)$ — базисные когомологии M.

$S(\mathfrak{g}^*)$ — симметрическая алгебра на $\mathfrak{g}^*$ с образующими степени 2.
Модель Картана

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M)) = ((S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}}, d_{\mathfrak{g}}),$$

где $(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}}$ обозначает подалгебру $\mathfrak{g}$-инвариантов.

Элемент $\omega \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$ есть «$\mathfrak{g}$-эквивариантое полиномиальное отображение из $\mathfrak{g}$ в $\Omega(M)$». Дифференциал $d_{\mathfrak{g}}$ задаётся как

$$d_{\mathfrak{g}}(\omega)(\xi) = d(\omega(\xi)) - \iota_\xi(\omega(\xi)).$$

Теорема

$$H^*_{\mathrm{bas},\,G}(M) \cong H\big(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M)), d_{\mathfrak{g}}\big).$$

Если группа G компактна, то

$H^*_{\mathrm{bas},\,G}(M) \cong H^*_G(M) = H^*(EG \times_G M)$ эквивариантные когомологии.

Теперь рассмотрим $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ с действием H' (голоморфное слоение $\mathcal{F}$).

Теорема (Исида–Крутовский–П.)

Имеем изоморфизм алгебр:

$$H^*_{\mathrm{bas},\, H'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]/(I_\mathcal{K} + J_\Sigma),$$

где $I_\mathcal{K}$ — идеал Стенли–Райснера, порождённый мономами

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k}, \quad \text{где } \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K},$$

а J_Σ — идеал, порождённый линейными формами

$$\sum_{i=1}^m \langle a_i, u \rangle v_i, \quad \text{где } u \in V^*.$$

Это доказывает гипотезу [Battaglia and Zaffran] (arXiv:1108.1637).

Если H' замкнута (тор), т. е. веер Σ рационален, то имеем

$$H^*_{\mathrm{bas},\,H'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}/H') = H^*(X_\Sigma)$$

и теорема сводится к известному описанию когомологий полных неособых торических многообразий [Данилов–Юркевич].

Доказательство теоремы основано на следующем результате о формальности. Пусть $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T^m) \cong \mathbb{R}^m$ и рассмотрим модель Картана

$$\mathcal{C}_\mathfrak{t}(\Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K})) = \big((S(\mathfrak{t}^*) \otimes \Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K}))^{T^m}, d_\mathfrak{t}\big).$$

Так как T^m компактен, получаем

$$H(\mathcal{C}_\mathfrak{t}(\Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K}))) = H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]/I_\mathcal{K}.$$

Лемма

ДГА $\mathcal{C}_\mathfrak{t}(\Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K}))$ формальна. Более того, существует зигзаг квазиизоморфизмов ДГА между $\mathcal{C}_\mathfrak{t}(\Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K}))$ и $H_{T^m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, которые сохраняют структуру $S(\mathfrak{t}^*)$-модулей.

Обобщение: максимальные действия тора

M связное комплексное многообразие с эффективным действием компактного тора T голоморфными преобразованиями.

T-действие на M **максимально**, если существует $x \in M$, такая что

$$\dim T + \dim T_x = \dim M.$$

Если T-действие максимально, то T — максимальный тор в группе диффеоморфизмов M.

Примеры максимальных действий тора: действие компактного тора на гладком торическом многообразии и действие T^m на комплексном момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Пусть $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$ и $\exp_T\colon \mathfrak{t} \to T$ — экспоненциальное отображение. Пусть $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ и $p\colon \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$ — первая проекция.

Максимальному действию (M, T) сопоставляются данные веера $(\Sigma, \mathfrak{h})$:

- Σ — неособый веер в $\mathfrak{t}$ по отношению к решётке $\mathrm{Ker}\exp_T$;
- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ — подпространство, такое что $p|_{\mathfrak{h}}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{t}$ инъективно; обозначим через $q\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})$ проекцию на факторпространство;
- $\widetilde{\Sigma} := q(\Sigma) = \{q(\sigma) \subset \mathfrak{t}/p(\mathfrak{h})\colon \sigma \in \Sigma\}$ — полный веер.

Категория голоморфных максимальных действий (M, T) эквивалентна категории пар $(\Sigma, \mathfrak{h})$ с соответствующими морфизмами [Исида].

Чтобы восстановить максиальное действие из $(\Sigma, \mathfrak{h})$, положим $M := X_\Sigma / H$, где X_Σ — торическое многообразие, H — подгруппа в алгебраическом торе $T^{\mathbb{C}}$, соответствующая $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$.

В частности, если Σ — подвеер в стандартном веере в $\mathfrak{t} = \mathbb{R}^m$, задающем $\mathbb{C}^m$, то $X_\Sigma = U(\mathcal{K})$ и X_Σ / H есть момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, где комплекс $\mathcal{K}$ задаётся веером Σ.

Трансверсальная эквивалентность

(M, T) — максимальное действие тора, $(\Sigma, \mathfrak{h})$ — данные веера, $p\colon \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$. Положим $\mathfrak{h}' := p(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{t}$ и $H' \subset T$ — соответствующая подгруппа. Действие H' на M почти свободно.
Каноническое слоение $\mathcal{F}_M$ на M орбитами H'-действия.

Два гладких (или голоморфных) слоения $(M_1, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2, \mathcal{F}_2)$ трансверсально эквивалентны, если существует слоение $(M_0, \mathcal{F}_0)$ и сюръективные субмерсии $f_i\colon M_0 \to M_i$, $i = 1, 2$, такие что

- $f_i^{-1}(x_i)$ связно для любого $x_i \in M_i$ и
- прообраз при f_i каждого листа $\mathcal{F}_i$ является листом $\mathcal{F}_0$

Предложение

Если слоения $(M_1, \mathcal{F}_1)$, $(M_2, \mathcal{F}_2)$ трансверсально эквивалентны, то имеет место изоморфизм ДГА $\Omega^*_{\mathrm{bas}}(M_1) \cong \Omega^*_{\mathrm{bas}}(M_2)$.

Лемма

Комплексное многообразие M с максимальным действием тора и каноническим голоморфным слоением $\mathcal{F}_M$ трансверсально эквивалентно некоторому момент-угол-многообразию $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Теорема (Исида–Крутовский–П.)

Базисные когомологии максимального действия тора (M, T) с данными веера $(\Sigma, \mathfrak{h})$ и каноническим слоением $\mathcal{F}_M$ суть

$$H^*_{\mathrm{bas}}(M) \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/(I_{\mathcal{K}} + J_{\Sigma}),$$

где $I_{\mathcal{K}}$ — идеал Стенли–Райснера веера Σ, а J_{Σ} — идеал, порождённый линейными формами

$$\sum_{i=1}^{m} \langle a_i, u \rangle v_i \quad \text{для } u \in V^*.$$

Здесь $V = \mathfrak{t}/\mathfrak{h}'$ и $a_i = q(e_i)$, где e_i — примитивная образующая i-го конуса в Σ.

Литература

[1] Hiroaki Ishida, Roman Krutowski and Taras Panov. *Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds.* Internat. Math. Research Notices 2022 (2022), no. 7, 5541–5563.

[2] Roman Krutowski and Taras Panov. *Dolbeault cohomology of complex manifolds with torus action.* In “Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin Memorial”. Contemp. Math., vol. 772; American Mathematical Society, Providence, RI, 2021, pp. 173–187.