

# Экспоненциальные действия, двойственность Гейла и момент-угол-многообразия

Т. Е. Панов

МГУ & НИУ ВШЭ

Конференция “Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия и компьютерный анализ данных”

ФКН НИУ ВШЭ 27–29 ноября 2024

# Конфигурации векторов и экспоненциальные действия

$V \cong \mathbb{R}^k$  –  $k$ -мерное векторное пространство

$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  **конфигурация** из  $m$  векторов в  $V^*$ .

Допускаются повторения, но всегда  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  порождает  $V^*$ .

**Экспоненциальное действие**  $V$  на  $\mathbb{R}^m$ :

$$V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = (e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle} x_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle} x_m).$$

Классическая динамическая система, восходящая к Пуанкаре.

Линейные свойства конфигурации  $\Gamma$  определяют топологию слоения пространства  $\mathbb{R}^m$  орбитами действия.

Экспоненциальные действия  $V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  и их голоморфные аналоги возникают в ряде важных конструкций алгебраической геометрии и топологии:

- пространства листов голоморфных слоений, пересечения вещественных и эрмитовых квадратик  
(топология и голоморфная динамика)
- фактор-конструкция торических многообразий  
(торическая геометрия)
- гладкие и комплексно-аналитические структуры на момент-угол-многообразиях и их частичных факторах  
(комплексная геометрия и торическая топология)

## Пример

Рассмотрим два действия  $V = \mathbb{R}$  на  $\mathbb{R}^2$ :

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^v x_1, e^v x_2), \quad (1)$$

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^v x_1, e^{-v} x_2). \quad (2)$$

$0 \in \mathbb{R}^2$  является неподвижной точкой,  
и оба действия **свободны** на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Пространство орбит  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}$  действия (1) есть окружность  
(гладкое многообразие).

Пространство орбит  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}$  действия (2) нехаусдорфово.

Действие (1) **собственно**, (2) — нет.

## Невырожденные листы (свободные орбиты)

Рассмотрим инвариантные открытые подмножества  $U \subset \mathbb{R}^m$ , состоящие из невырожденных листов слоения, т. е. для которых ограничение действия  $V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  на  $U$  свободно.

### Предложение

*Орбита  $Vx$  точки  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  под действием  $V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  свободна тогда и только тогда, когда подмножество  $\{\gamma_i : x_i \neq 0\} \subset \Gamma$  порождает пространство  $V^*$ .*

### Доказательство.

Пусть орбита  $Vx$  несвободна, т. е. существует такой  $\mathbf{v} \neq 0$ , что

$$(x_1 e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle}, \dots, x_m e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle}) = (x_1, \dots, x_m).$$

Тогда  $\langle \gamma_i, \mathbf{v} \rangle = 0$  при  $x_i \neq 0$ , т. е. векторы  $\gamma_i$ , для которых  $x_i \neq 0$ , не порождают  $V^*$ . Обратное утверждение аналогично. □

Рассмотрим  $[m] = \{1, \dots, m\}$ . Для каждого подмножества  $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset [m]$  положим

$$\Gamma_I := \{\gamma_i : i \in I\} \subseteq \Gamma.$$

Положим  $\hat{I} := [m] \setminus I$  и

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subset [m] : \Gamma_{\hat{I}} \text{ порождает } V^*\}.$$

### Предложение

$\mathcal{K}(\Gamma)$  — симплициальный комплекс размерности  $m - k - 1$ , и все максимальные симплексы имеют такую размерность.

Симплициальный комплекс  $\mathcal{K}$  на  $[m]$  задаёт **дополнение набора координатных подпространств** в  $\mathbb{R}^m$ :

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_p\} \notin \mathcal{K}} \{x : x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0\}.$$

Например, если  $\mathcal{K} = \{\emptyset\}$ , то  $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{R}^\times)^m$ , где  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Если  $\mathcal{K}$  состоит из всех собственных подмножеств в  $[m]$ , то  $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ .

## Предложение

Пусть

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subset [m] : \Gamma_I \text{ порождает } V^*\}.$$

Тогда для любого подкомплекса  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\Gamma)$  ограничение экспоненциального действия  $V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  на  $U(\mathcal{K})$  свободно.

Таким образом,  $U(\mathcal{K})$  состоит из **невырожденных листов** слоения орбитами действия  $V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  для любого  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\Gamma)$ .

## Линейная двойственность Гейла

$\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  задаёт линейное отображение  $\Gamma: \mathbb{R}^m \rightarrow V^*$ ,  $e_j \mapsto \gamma_j$ . Положим  $W := \text{Ker } \Gamma$  и рассмотрим двойственные точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} V^* \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow V \xrightarrow{\Gamma^*} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} W^* \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где  $\Gamma^* \mathbf{v} = (\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle, \dots, \langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle)$ . Положим  $\mathbf{a}_i := A(e_i)$ .

Конфигурация векторов  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$  в  $W^*$  называется **двойственной по Гейлу** к  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ . Двойственная к  $A$  есть  $\Gamma$ .

Выбрав базисы в  $V$  и  $W$ , зададим отображение  $\Gamma$  матрицей размера  $k \times m$  со столбцами  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ , а  $A$  матрицей размера  $(m - k) \times m$  со столбцами  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ . Тогда  $A\Gamma^* = 0$ , т.е. строки  $A$  образуют базис в пространстве линейных соотношений между  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ .



## Собственные действия

Непрерывное действие  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto gx$  топологической группы  $G$  на топологическом пространстве  $X$  **собственно**, если отображение

$$h: G \times X \rightarrow X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

собственно, т. е.  $h^{-1}(C)$  компактно для компактного  $C \subseteq X \times X$ .

Собственность — ключевое свойство для действий некомпактных групп:

- орбиты собственного действия  $G$  на  $X$  замкнуты, стабилизаторы компактны, а пространство орбит  $X/G$  хаусдорфово;
- пространство орбит  $M/G$  гладкого, свободного и собственного действия группы Ли  $G$  на гладком многообразии  $M$  имеет единственную гладкую структуру, для которой проекция  $M \rightarrow M/G$  является гладкой субмерсией.

# Симплициальные конусы и вееры

## Предложение

Для  $I \subset [m]$

$A_I$  линейно независима в  $W^*$   $\iff \Gamma_{\hat{I}}$  порождает  $V^*$ .

**Симплициальный конус**  $\sigma$  в  $W^*$  — линейные комбинации набора линейно независимых векторов с неотрицательными коэффициентами.

**Симплициальный веер** — конечный набор  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$  симплициальных конусов, где грань каждого конуса из  $\Sigma$  лежит в  $\Sigma$  и пересечение любых двух конусов из  $\Sigma$  является гранью каждого из них.

Пусть  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  — образующие одномерных конусов (рёбер) веера  $\Sigma$ .

**Подлежащий симплициальный комплекс**

$$\mathcal{K}_\Sigma = \{I \subset [m]: \text{cone}(\mathbf{a}_i: i \in I) \in \Sigma\}.$$

Симплициальный веер  $\Sigma$  задаётся двумя данными:

- симплициальный комплекс  $\mathcal{K}$  на  $[m]$ ;
- конфигурация векторов  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  в  $W^*$  такая, что для  $I \in \mathcal{K}$  набор  $A_I = \{a_i : i \in I\}$  линейно независим.

Обратно, набор конусов  $\{\text{cone } A_I : I \in \mathcal{K}\}$  «склеивается» в веер  $\Sigma$ , если любые два конуса  $\text{cone } A_I$  и  $\text{cone } A_J$  пересекаются по общей грани. В этом случае скажем, что данные  $\{\mathcal{K}, A\}$  **задают веер**  $\Sigma$ .

Имеется следующий критерий в терминах двойственности Гейла.

## Теорема

Пусть  $\mathcal{K}$  — симплицальный комплекс на  $[m]$ ,  
 $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  и  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  — пара двойственных по Гейлу конфигураций.

Следующие условия эквивалентны:

- а) Данные  $\{\mathcal{K}, A\}$  задают веер  $\Sigma$ ;
- б)  $\text{relint cone}(A_I) \cap \text{relint cone}(A_J) = \emptyset$  для любых  $I, J \in \mathcal{K}$ ,  $I \neq J$ ;
- в)  $\text{relint cone}(\Gamma_{\hat{I}}) \cap \text{relint cone}(\Gamma_{\hat{J}}) \neq \emptyset$  для любых  $I, J \in \mathcal{K}$ .

Для экспоненциального действия

$$V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = (e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle} x_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle} x_m).$$

имеем:

## Теорема

Пусть  $\mathcal{K}$  — симплицальный комплекс на  $[m]$ ,

$A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$  и  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  — пара двойственных по Гейлу конфигураций в  $V^*$  и  $W^*$ . Тогда

- 1) действие  $V \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K})$  свободно тогда и только тогда, когда  $A_I$  линейно независима для любого  $I \in \mathcal{K}$ ;
- 2) действие  $V \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K})$  собственное тогда и только тогда, когда данные  $\{\mathcal{K}, A\}$  задают веер  $\Sigma$ .
- 3) пространство орбит  $U(\mathcal{K})/V$  собственного действия компактно тогда и только тогда, когда веер  $\Sigma$  полный, т. е.  $|\Sigma| = W^*$ .

## Полиэдральные произведения

$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$  — последовательность пар пространств,  $A_i \subset X_i$ .

$\mathcal{K}$  — симплициальный комплекс на  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\emptyset \in \mathcal{K}$ .

Для  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$  положим

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = Y_1 \times \dots \times Y_m, \quad \text{где } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{при } i \in I, \\ A_i & \text{при } i \notin I. \end{cases}$$

### Полиэдральное произведение

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left( \prod_{i \in I} X_i \times \prod_{j \notin I} A_j \right) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Имеем  $(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}} = \prod_{i=1}^m A_i$  для  $\mathcal{K} = \{\emptyset\}$  и  $(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}} = \prod_{i=1}^m X_i$ , когда  $\mathcal{K}$  — полный симплекс  $\Delta[m]$  на  $m$  вершинах.

## Пример

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_p\} \notin \mathcal{K}} \{\mathbf{x} : x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0\} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)^{\mathcal{K}},$$

где  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Пример

Пусть  $(X, A) = (D^1, S^0)$ , где  $D^1 = [-1, 1]$  — отрезок,  $S^0 = \{1, -1\}$  — его граница. **Вещественный момент-угол-комплекс**

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс в  $m$ -кубе  $(D^1)^m = [-1, 1]^m$ .

Если  $\mathcal{K}$  —  $m$  отдельных точек, то  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  — 1-мерный остов куба  $[-1, 1]^m$ .

Если  $\mathcal{K} = \partial\Delta[m]$ , то  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \partial[-1, 1]^m$ .

## Теорема

Пусть  $V \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K})$  — экспоненциальное действие, задаваемое полным симплициальным веером  $\Sigma = \{\mathcal{K}, A\}$ . Тогда

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

## Следствие

Пусть  $\mathcal{K}$  — подлежащий комплекс полного симплициального веера (*звёздчатая триангуляция сферы*). Тогда

- 1) вещественный момент-угол-комплекс  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$  имеет структуру гладкого многообразия;
- 2)  $U(\mathcal{K})$  и  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  имеют одинаковый гомотопический тип.



# Нормальные вееры и пересечения квадратик

**Простой** многогранник

$$P = \{\mathbf{w} \in W : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{w} \rangle + b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

**Нормальный веер**  $\Sigma_P$ :

- нормали  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$  — образующие одномерных конусов;
- cone  $A_I \in \Sigma_P$ , если гиперграни с нормальями  $\mathbf{a}_i$ ,  $i \in I$ , имеют непустое пересечение.

Не любой полный симплициальный веер является нормальным веером многогранника!

## Теорема

Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  и  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  — двойственные по Гейлу конфигурации. Пусть  $\Sigma = \{\text{cone } A_I : I \in \mathcal{K}\}$  — полный веер.

Следующие условия эквивалентны:

- а)  $\Sigma$  является нормальным веером многогранника;
- б)  $\bigcap_{I \in \mathcal{K}} \text{relint cone}(\Gamma_{\hat{I}}) \neq \emptyset$ .

При этом если  $\delta \in \bigcap_{I \in \mathcal{K}} \text{relint cone}(\Gamma_{\hat{I}}) \neq \emptyset$ , то  $\Sigma$  является нормальным веером многогранника

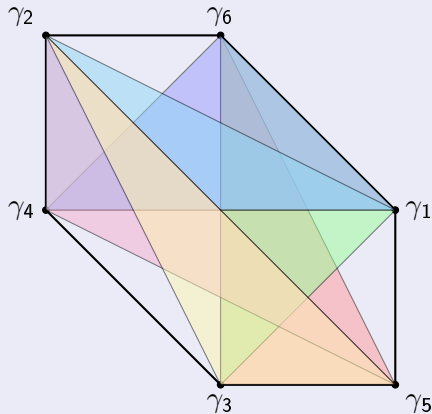
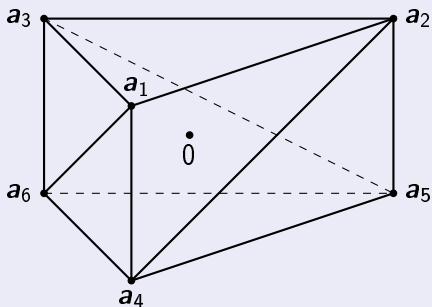
$$P = \{\mathbf{w} \in W : \langle a_i, \mathbf{w} \rangle + b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

где  $\delta = b_1\gamma_1 + \dots + b_m\gamma_m$ .

Т. е. данные  $\{\mathcal{K}, A\}$  задают веер  $\Sigma$ , если двойственные по Гейлу конусы  $\text{cone } \Gamma_{\hat{I}}$   $I \in \mathcal{K}$ , имеют попарные непустые пересечения, и задают нормальный веер, если их совокупное пересечение непусто.

## Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



## Пересечения квадратик

$$\mu_\Gamma: \mathbb{R}^m \rightarrow V^*, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_1^2 \gamma_1 + \dots + x_m^2 \gamma_m.$$

### Теорема

Пусть  $\Sigma = \{\text{cone } A_I : I \in \mathcal{K}\}$  — нормальный веер многогранника  $P$ ,  
 $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  — двойственная по Гейлу конфигурация.

Положим  $\delta = \sum_{i=1}^m b_i \gamma_i$ . Тогда

- $\delta \in \bigcap_{I \in \mathcal{K}} \text{relint cone } \Gamma_I$ ;
- $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) \subset U(\mathcal{K})$ ;
- $\delta$  — регулярное значение отображения  $\mu_\Gamma$ ;
- экспоненциальное действие  $V \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K})$  свободно и собственено, а пространство орбит  $U(\mathcal{K}_P)/V$  диффеоморфно множеству уровня  $\mu_\Gamma^{-1}(\delta)$ , которое есть пересечение  $k$  квадратик:

$$U(\mathcal{K}_P)/V \cong \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \gamma_1 x_1^2 + \dots + \gamma_m x_m^2 = \delta\}.$$

## Голоморфные экспоненциальные действия

$V \cong \mathbb{C}^\ell$  комплексное пространство (снабдим  $V \cong \mathbb{R}^k$  комплексной структурой при условии, что  $k = 2\ell$  чётно).

$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  конфигурация векторов в  $V^*$ .

Голоморфное экспоненциальное действие  $V$  на  $\mathbb{C}^m$

$$V \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{z}) \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = (e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle} z_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle} z_m).$$

Если голоморфное действие  $V \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K})$  свободно и собственнo (условие веера), то пространство орбит  $U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$  является комплексно-аналитическим многообразием (комплексное момент-угол-многообразие).

Получаем новое семейство некэлеровых комплексных многообразий, обобщающее серии многообразий Хопфа и Калаби–Экманна.

- [1] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [2] Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds*. Math. Zeitschrift 284 (2016), no. 1, 309–333.
- [3] Taras Panov. *Exponential actions defined by vector configurations, Gale duality, and moment-angle manifolds*. Preprint (2024), arXiv:2411.03366.