В.Ф. Ходыкин,

А.А. Преображенский

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Данный сборник предназначен для студентов и преподавателей вузов, изучающих и преподающих методы решения экстремальных задач. Авторы сборника разрешают бесплатное его использование на занятиях и для самостоятельного изучения. Запрещается публикация сборника в целом и любых его частей в любом виде. Предполагается издание сборника контрольных работ по всем темам сборника. Контрольные работы состоят из простых, в вычислительном плане, задач, а так же ответов на все задачи. Условия приобретения будут высланы в ответе на письмо по адресу: khodykinvf@mail.ru .

Введение

Успешная реализация достижений научно-технического прогресса тесно связана с использованием математических методов и средств вычислительной техники при решении задач из различных областей человеческой деятельности. Большое значение приобретает использование указанных методов и средств при решении экономических задач. Для эффективного функционирования экономических объектов необходимо установить оптимальное управление во всех структурных подразделениях, которое позволяет рационально использовать трудовые и производственные ресурсы.

Многие экономические процессы можно описать с помощью математических соотношений, в виде математических моделей. С использованием математических моделей можно определить такие значения неизвестных параметров экономической системы, при которых некоторая цель принимала бы экстремальные значения. Например, необходимо определить суточный план производства продукции различного вида, при котором предприятие получило бы максимальную прибыль.

Математическое программирование – это раздел прикладной математики, который разрабатывает теоретические основы и методы решения экстремальных задач.

Для решения задач математического программирования сложно использовать классические методы нахождения экстремума, так как в таких задачах целевая функция достигает своего экстремального значения на границе области допустимых значений неизвестных переменных. Полный перебор граничных точек во многих задачах невозможен из-за их бесконечного количества. Но даже если допустимых точек конечное число, полный перебор нерационален.

К математическому программированию относятся ряд разделов, основными из которых являются следующие разделы.

1. Линейное программирование. К данному разделу относятся задачи, в которых целевая функция и ограничения задачи являются линейными.

2. Нелинейное программирование. Данный раздел изучает задачи, в которых целевая функция и (или) ограничения могут быть нелинейными.

3. Динамическое программирование. В этом разделе изучаются задачи, в которых процесс решения можно разбить на отдельные этапы.

4. Целочисленное программирование. К данному разделу относятся задачи, в которых неизвестные переменные могут принимать только целочисленные значения.

5. Стохастическое программирование. Данный раздел изучает задачи, в которых содержатся случайные величины в целевой функции и (или) в ограничениях.

6. Параметрическое программирование. В этом разделе рассматриваются задачи, в которых коэффициенты при неизвестных переменных в целевой функции и (или) в ограничениях зависят от некоторых параметров.

*7. **Дробно-линейное программирование.*** К данному разделу относятся оптимизационные задачи, в которых целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а ограничения, определяющие область возможных изменений переменных, являются линейными.

Тема 1. Математическое моделирование экономических задач

При изучении сложных процессов, явлений, в том числе и экономических, очень часто применяется **моделирование**. Суть его состоит в том, что изучаемое явление воспроизводится в экспериментальных условиях с помощью модели в другом масштабе**. Модель** – это специально создаваемый объект, на котором воспроизводятся вполне определённые характеристики исследуемого объекта с целью его изучения, а моделирование – вполне определённое конкретное отображение рассматриваемых характеристик изучаемого объекта в целях его исследования.

Математическое моделирование является наиболее совершенным и вместе с тем эффективным методом моделирования. Именно в этом случае применяются мощные средства математического анализа, так как по своей природе математические методы не могут прилагаться непосредственно к действительности, а только к математическим моделям. Результаты исследования такой модели будут иметь практический интерес, если сама модель достаточно адекватна рассматриваемому явлению, то есть достаточно хорошо отображает реальную ситуацию.

1.1. Этапы принятия решений

Для принятия оптимальных управленческих решений необходимо выполнить следующие этапы.

I. Изучить исследуемый экономический объект.
II. Сформулировать экономическую постановку задачи.
III. Построить математическую модель задачи на основании экономической постановки.
IV. Выбрать методы решения данной задачи.
V. Выбрать или разработать программное обеспечение для решения данной задачи.
VI. Решить поставленную задачу.
VII. Провести анализ полученных результатов.

Если полученные результаты удовлетворяют всем требованиям, то они используются в процессе принятия решений. В противном случае выполняется необходимая корректировка экономической постановки задачи, и процесс принятия решений продолжается с третьего этапа.

1.2. Построение математических моделей экономических задач

Из содержания экономической постановки задачи определяются неизвестные переменные, значения которых необходимо определить в процессе решения задачи.

Неизвестные переменные обозначаются латинскими буквами и могут иметь несколько индексов: x_i, x_{ij}, y_k. Например, x_{ij} – объём перевезенной продукции от $\mathbf{i}$-го поставщика к $\mathbf{j}$-му потребителю.

Математическая модель задачи состоит из следующих элементов.

1. **Целевая функция** (критерий оптимальности). Данную функцию будем обозначать через $\mathbf{z}$. Она должна количественно отражать значение цели в зависимости от значений неизвестных переменных. Целевая функция может быть на нахождение максимального значения (прибыль предприятия) или минимального значения (себестоимость, затраты).
2. **Ограничения задачи.** В реальной экономической системе существуют ограничения, например, на объём используемых ресурсов, которые должны быть учтены при построении математической модели. Ограничения должны быть записаны в виде математических соотношений (уравнений или неравенств).
3. **Условия неотрицательности переменных.** Неизвестные переменные задачи отражают некоторые реальные параметры экономической системы, которые, как правило, не могут принимать отрицательных значений, поэтому соответствующие неизвестные переменные должны быть положительными или нулевыми.

Если целевая функция и ограничения задачи линейные, то задача называется ***задачей линейного программирования (ЗЛП).***

Пример задачи линейного программирования:

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \min; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &\geq 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5, \\ 3x_2 \quad + 4x_4 &\leq 8, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,4}. \qquad (3)$$

1.3. Примеры построения моделей экономических задач

Качество разрабатываемых моделей в значительной мере определяется опытом, интуицией, а также творческими способностями каждого исследователя. Невозможно дать готовые рецепты, как строить математическую модель в той или иной конкретной ситуации. Тем не менее, анализ накопленного опыта позволяет выявить рациональные приёмы, которые облегчают и рационализируют процесс построения моделей. Рассмотрим их на примерах построения математических моделей наиболее распространенных типов оптимизационных задач.

Модель 1. **Задача нахождения оптимального плана выпуска продукции**

Экономическая постановка.

Предприятие производит **n** видов продукции с использованием **m** видов ресурсов. Для производства единицы продукции используется строго определённое количество ресурсов того или иного вида. Ресурсы каждого вида на предприятии ограничены. Предприятие получает определённую прибыль от реализации единицы продукции. Необходимо найти такой план производства продукции, при котором предприятие получит максимальную общую прибыль.

Математическая постановка.

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс вида продукции, $j = \overline{1, n}$;

i – индекс вида ресурсов, $i = \overline{1, m}$;

a_{ij} – затраты ресурсов **i**-го вида на производство единицы продукции **j**-го вида;

A_i – заданное ограничение на имеющийся объём ресурсов **i**-го вида;

P_j – прибыль, получаемая от реализации единицы продукции **j**-го вида.

Введём неизвестные переменные:

x_j – объём продукции **j**–го вида, который планируется произвести.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n \to \max; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Модель 2. **Задача составления рациона**

Экономическая постановка.

В некотором фермерском хозяйстве производится откорм животных. Для откорма используется **n** видов кормов, содержащих **m** видов питательных веществ. Известно содержание питательных веществ (кальций, фосфор и др.) в единице корма каждого вида. Для полноценного питания животных необходимо потребление питательных веществ не меньше заданных количеств. Известна стоимость единицы каждого корма. Необходимо определить рацион кормления животных, при котором общие затраты на откорм будут минимальными.

Математическая постановка.

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс вида кормов, $j = \overline{1,n}$;

i – индекс вида питательных веществ, $i = \overline{1,m}$;

a_{ij} – содержание **i**–го питательного вещества в единице корма **j**-го вида;

A_i – необходимое суточное потребление питательного вещества **i**–го вида;

c_j – стоимость единицы кормов **j**-го вида.

Введём неизвестные переменные:

x_j – планируемый суточный объём кормления животных **j**-м видом корма.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq A_m, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Модель 3.**Транспортная задача**

Экономическая постановка.

Имеется **m** поставщиков и **n** потребителей однородной продукции. Известны удельные затраты на доставку единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю. Запасы продукции у поставщиков ограничены. Известны также потребности в продукции каждого потребителя. Необходимо определить такой план перевозки продукции от поставщиков к потребителям, при котором общие затраты на перевозку будут минимальными.

Математическая постановка.

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс потребителей, $j = \overline{1,n}$;

i – индекс поставщиков, $i = \overline{1,m}$;

A_i – объём имеющейся продукции **i**-го поставщика;

B_j – объём потребности в продукции **j**-го потребителя;

c_{ij} – удельные затраты на перевозку единицы продукции от **i**-го поставщика **j**-му потребителю.

Введём неизвестные переменные:

x_{ij} – планируемый объём перевозки продукции от **i**-го поставщика **j**-му потребителю.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом.

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{m(n-1)}x_{m\,(n-1)} + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min; \qquad (1)$$

Ограничения задачи.

I. От каждого поставщика можно вывести объём продукции не более имеющегося количества:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le A_1, \\ &x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \le A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le A_m. \end{aligned} \qquad (2)$$

II. Потребность каждого потребителя в продукции должна быть удовлетворена:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} \ge B_1, \\ &x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} \ge B_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} \ge B_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

III. Условие неотрицательности:

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Математическую модель часто удобно записывать в свёрнутом виде. Например, математическая модель транспортной задачи запишется следующим образом:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge B_j,\ j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Модель 4. Задача о назначениях

Экономическая постановка.

Имеются **n** видов работ и **n** исполнителей. Каждый из исполнителей может выполнить любую, но только одну работу. Задана эффективность выполнения каждой работы, каждым исполнителем. Необходимо закрепить исполнителей за работами таким образом, чтобы общая эффективность выполнения работ была максимальной.

Математическая постановка.

Введём обозначения заданных параметров.

i – индекс работ, **i** = $\overline{1,n}$;

j – индекс исполнителей, **j** =$\overline{1,n}$;

c_{ij} - эффективность выполнения **i**-й работы **j**-м исполнителем.

Введём неизвестные переменные. В данной задаче они могут принимать только два значения - 0 или 1. Такие переменные называются булевыми.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ - если за } \mathbf{i}\text{-й работой закреплён } \mathbf{j}\text{-й исполнитель;} \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} +\ldots+ c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} \ldots+ c_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)(n-1)} + c_{nn}x_{nn} \to \max;$$

Ограничения задачи.

I. За каждой работой должен быть закреплён только один исполнитель:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} +\ldots+ x_{1n} = 1, \\ &x_{21} + x_{22} +\ldots+ x_{2n} = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n1} + x_{n2} +\ldots+ x_{nn} = 1. \end{aligned}$$

II. Каждый исполнитель может выполнить только одну работу:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} +\ldots+ x_{n1} = 1, \\ &x_{12} + x_{22} +\ldots+ x_{n2} = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{1n} + x_{2n} +\ldots+ x_{nn} = 1, \end{aligned}$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

Модель 5. Задача оптимального раскроя промышленных материалов

Экономическая постановка.

На раскрой поступает исходный материал одинакового размера. Его требуется раскроить на заготовки определённого размера в заданном количестве таким образом, чтобы общие количество используемого исходного материала было минимальным.

Математическая постановка.

Введём обозначения:

i – индекс заготовок, **i** = $\overline{1,m}$;

j – индекс вариантов раскроя, **j** = $\overline{1,n}$;

A_i – необходимое количество заготовок **i**-го типа;

a_{ij} – количество заготовок **i**-го вида при раскрое единицы исходного материала по варианту **j**.

Введём обозначения неизвестных переменных.

x_j- количество исходного материала, которое необходимо раскроить по варианту **j**.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \rightarrow \min; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq A_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq A_2, \qquad (2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq A_m, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Применение математических моделей при раскрое промышленных материалов позволяет экономить до 20% их объёма.

Математическая модель раскроя строится в два этапа.

На первом этапе производится построение вариантов раскроя, в результате которого определяются: количество вариантов **n** и количество заготовок каждого вида $\mathbf{a_{ij}}$, получаемых при различных вариантах раскроя.

Построение вариантов раскроя единицы исходного материала осуществляется в виде следующей таблицы:

№ варианта	Заготовка i_1	Заготовка i_2	. . .	Заготовка i_m

Заготовки располагаются в порядке убывания их размеров. Построение вариантов осуществляется методом полного перебора.

На втором этапе производится непосредственное построение модели.

Пример. На раскрой поступают металлические прутки размером L= 800 см. Необходимо получить 3 вида заготовок с размерами l_1=150 см, l_2=250 см, l_3=200 см, в соответствующих количествах: A_1=5000 шт., A_2=3500 шт. и A_3=7000 шт. Необходимо построить математическую модель раскроя с целью использования минимального количества прутков.

Выполним первый этап построения модели, то есть построим варианты раскроя, с помощью метода полного перебора:

№ варианта	l_2 250	l_3 200	l_1 150
1	3	-	-
2	2	1	-
3	2	-	2
4	1	2	1
5	1	1	2
6	1	-	3
7	-	4	-
8	-	3	1
9	-	2	2
10	-	1	4
11	-	-	5

Из таблицы определяем количество вариантов раскроя и количество полученных заготовок каждого вида по каждому варианту раскроя. Теперь можно перейти ко второму этапу и записать математическую модель задачи:

$$z = x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{11} \quad \to \quad \min;$$

$$\begin{aligned} 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} + 5x_{11} &\geq 5000, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 3500, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} &\geq 7000, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,11}.$$

Рассмотренные задачи не исчерпывают всех встречающихся на практике типов задач. Тем не менее, они дают общее представление о приёмах построение математических моделей.

1.4. Задачи

Задание. Построить математическую модель с использованием заданной экономической постановки.

1.1. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используются два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок I типа и 1000 м досок II типа. Кроме того, задан объём трудовых ресурсов в количестве 800 чел.-ч.

В следующей таблице приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление единицы каждого изделия, а также получаемая прибыль.

Изделия / Ресурсы	Затраты на одну ед. изделия			
	Столы	Стулья	Бюро	Книжные шкафы
Доски I типа (м)	5	1	9	12
Доски II типа (м)	2	3	4	1
Трудовые ресурсы (чел.-ч.)	3	2	5	10
Прибыль (грн./шт.)	12	5	15	10

Построить математическую модель определения ассортимента выпускаемой продукции таким образом, чтобы общая прибыль фабрики была максимальной.

1.2. Решить предыдущую задачу при дополнительных условиях, налагаемых на ассортимент выпускаемой продукции:

столов - не менее 40 шт.; стульев - не менее 130 шт.;

бюро - не менее 30 шт.; книжных шкафов - не более 10 шт.

1.3. Четыре издательства используют бумагу для журналов, имеющуюся на трех оптовых базах. Суточная потребность каждого издательства в бумаге (т), запасы бумаги на базах, а также цены за перевозку одной тонны бумаги с i-й базы j-ому издательству представлены в таблице.

Потребность издательств, т / Запасы бумаги на базах, т	400	300	100	100
400	2	8	2	1
400	1	4	6	3
100	1	5	9	2

Построить модель доставки бумаги издательствам, при которой общие затраты на доставку будут минимальными.

1.4. Экспериментальная лаборатория химического завода разработала пять новых видов реактивов, которые имеют огромное значение в хозяйственной деятельности региона. Прибыль от продажи одной тонны реактива соответственно составляет 500, 800, 900, 100 и 1000 ден. ед. Но при производстве этих реактивов в атмосферу выделяются вредные вещества A, B и C. При этом нормы выбросов вещества A в месяц составляют 8000 мл, B – 1000 мл, C – 4000 мл. Выбросы этих веществ при производстве одной тонны реактива приведены в таблице.

Вредные вещества / Вид реактива	А, мл	В, мл	С, мл
1	2	1	5
2	0	4	6
3	8	1	3
4	4	6	0
5	5	0	1

Необходимо определить, в каком количестве данные реактивы можно производить, чтобы не превысить нормы выбросов вредных веществ и получить максимальную прибыль.

1.5. При выращивании зерновых культур используются три вида удобрений в четырёх климатических зонах. Увеличение урожайности при внесении на 1 га 1 кг удобрения, запасы удобрений, а также площадь посевных площадей каждой климатической зоны представлены в таблице.

Запасы удобрений, кг	Посевная площадь климатической зоны, га			
	800	900	600	700
	Увеличение урожайности при внесении 1 кг удобрения на 1 га, кг			
7000	30	40	20	10
6000	10	50	40	30
4000	40	10	10	20

Требуется распределить выделенный фонд удобрений между посевными зонами так, чтобы суммарный прирост урожайности зерновых культур за счёт внесения удобрений был максимальным.

1.6. Фирма производит некоторую продукцию и осуществляет ее рекламу двумя способами: посредством радиовещания и посредством телевидения. Стоимость проведения рекламы на телевидении составляет 100 условных денежных единиц (уде) за 1 минуту; стоимость проведения рекламы на радио – 5 уде за 1 минуту. Фирма готова выделить средства на рекламу в размере 1000 уде в месяц. Она также планирует рекламировать продукцию по радио, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем по телевидению. Опыт показал, что 1 минута телерекламы приносит в 25 раз больший сбыт продукции, а значит и получение прибыли, чем 1 минута радиорекламы.

Необходимо распределить средства фирмы на рекламу таким образом, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной.

1.7. Три завода А, В и С экспортируют в некоторые страны бесшовные трубы. Из-за низких цен на свою продукцию эти заводы обвиняются в демпинге. Поэтому утверждены объёмы квот в год для каждого завода на производство бесшовных труб на экспорт. Основная часть квоты выделена заводу А – 19500 т. Экспортные квоты на поставку 7500 т и 3000 т труб получили также заводы В и С соответственно. Следовательно, каждый завод не должен экспортировать большее количество труб, чем утверждено, для избежания антидемпинговых процедур.

Стоимость перевозки 1 т бесшовных труб и объём потребностей в этих трубах каждой страной, куда экспортируются последние, представлены в таблице:

Заводы-изготовители бесшовных труб	Объём потребностей стран в бесшовных трубах				
	1	2	3	4	5
	8000	10500	7000	6500	12000
A	54	46	40	38	40
B	53	45	39	37	39
C	55	43	38	36	38

Составить такой план перевозок бесшовных труб от заводов-изготовителей в страны, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальные и не превышали антидемпинговых квот.

1.8. На берегу Крымского побережья строится новая база отдыха «Аврора», которая будет состоять из корпусов «люкс», «высшего класса» и «среднего класса». Количество номеров в корпусах разного типа по предоставляемым услугам представлено в таблице.

Количество отдыхающих в номере	Количество номеров в разных корпусах			Необходимое количество номеров на базе отдыха
	Люкс	Высшего класса	Среднего класса	
1	2	4	6	30
2	3	6	9	40
3	4	7	10	60
4	3	5	7	50
Стоимость строительства одного корпуса (млн. грн.)	50	30	20	

Необходимо определить оптимальный план строительства корпусов базы отдыха «Аврора» таким образом, чтобы затраты на строительство были минимальными.

1.9. Процесс изготовления глюкозы и патоки на крахмалопаточном комбинате представляет собой выполнение таких операций как расщепление сырья, выжимку и варение. Время работы оборудования при выполнении каждой операции ограничено и составляет соответственно 1600, 1200 и 1400 часов. Нормы времени обработки продукции при каждой операции, а также прибыль, получаемая комбинатом от реализации единицы продукции, приведены в таблице.

Операции	Нормы затрат времени на изготовление единицы продукции, ч./кг	
	патока	глюкоза
Расщепление	0,4	0,4
Выжимка	0,3	0,4
Варение	0,7	0,2
Прибыль от единицы продукции, грн./кг	0,3	0,6

Необходимо определить план выпуска продукции, обеспечивающий комбинату максимальную прибыль.

1.10. На склад ковровых дорожек поступил заказ на куски дорожек размерами 1,2; 1,8 и 2,9 м, в количествах соответственно не менее: 16 шт., 20 шт. и 12 шт. Склад имеет в достаточном количестве дорожек в рулонах по 8 м. Необходимо провести раскрой рулонов таким образом, чтобы используемое количество рулонов было минимальным.

1.11. Необходимо распределить пять видов универсальной зерноуборочной техники для уборки урожая различных зерновых культур на пяти участках, таким образом, что бы общее время уборки урожая было минимальным. В таблице приведены время уборки урожая каждого поля каждым видом техники.

Участки / Зерноуборочная техника	1	2	3	4	5
1	3	4	2	7	5
2	4	5	6	2	3
3	8	6	5	4	4
4	2	3	8	5	6
5	9	7	2	6	2

1.12. На приобретение нового оборудования для открытия филиала фирма имеет в наличии 18 тыс. грн., причем наличная производственная площадь составляет 28 м^2. Фирма может себе позволить содержать штат из 16 работников для обслуживания данного оборудования. На рынке представлено 2 вида подобного оборудования: более мощное, стоимостью 4 тыс. грн., требующее 3 человека для обслуживания и производственную площадь 5 м^2. Данный вид оборудования позволяет производить 4 тыс. ед. продукции за смену. Второй вид оборудования, стоимостью 2,5 тыс. грн., требует 2 человека для обслуживания и производственную площадь 7 м^2. Производственная мощность этого вида оборудования составляет 3 тыс. ед. продукции за смену.

Найти такой вариант приобретения оборудования, при котором филиал будет выпускать наибольшее количество продукции.

1.13. Для нормального развития промышленного рыбоводства в хозяйстве необходимо, чтобы ежедневно рыба получала 4 вида питательных веществ в количествах соответственно 20, 15, 18 и 12 тыс. ед. Эти питательные вещества содержатся в 2-х видах кормов. Содержание питательных веществ в одном кг корма приведено в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в одном кг корма	
	I вида	II вида
A_1	4	2
A_2	3	3
A_3	3	2
A_4	4	3

Необходимо составить оптимальный рацион кормления рыб, если известно, что цена одного кг I вида корма 2 грн., а II вида – 1 грн.

1.14. За счет мелиоративных работ площадь пашни в хозяйстве возросла на 120 га. Эту площадь было решено отвести под посев двух наиболее эффективных для хозяйства культур: проса и гречихи, причем гречихи необходимо получить не менее 1000 ц. В хозяйстве имеется 800 ц. минеральных удобрений. Выращивание культур характеризуется следующими показателями:

Показатели	Просо	Гречиха
Прибыль (грн. за 1 ц)	20	40
Расход пашни (га) на 1 ц культуры	0,03	0,06
Внесение удобрений (ц) на 1 га пашни	0,6	0,2

Найти такое распределения пашни под указанные культуры, при котором получаемая прибыль будет максимальной.

1.15. В городе имеется сеть из 5 АЗС, топливо для которых поставляют 3 нефтеперерабатывающих завода (НПЗ). Известны удельные затраты на перевозку топлива от каждого НПЗ каждой АЗС (грн./т). Запасы поставщиков топлива ограничены. Известны также потребности в продукции каждой АЗС.

Запасы топлива на НПЗ, т	Объемы потребности в топливе АЗС, т			
	50	30	40	50
	Стоимость перевозки 1 т топлива, грн.			
70	8	4	6	9
60	6	5	4	8
40	4	9	7	7

Необходимо определить такой план перевозки топлива от НПЗ к АЗС, при котором общие затраты на перевозку будут минимальными.

1.16. На производство одной партии тетрадей, дневников и наборов писчей бумаги требуется соответственно 2400, 2400 и 4800 кг сырья. При этом затраты рабочего времени на производство одной партии тетрадей и дневников составляют 0,18 и 0,36 машино-часов. На производстве одной партии писчей бумаги заняты специальные автоматы в течение 3,25 часа. Всего для производства бумажной продукции завод сможет использовать не более 312 т сырья. Основное оборудование может быть занято в течение 21,6 машино-часов, а автоматы по производству писчей бумаги - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации одной партии тетрадей, дневников и наборов писчей бумаги соответственно равна 300, 220 и 400 грн. Завод должен ежедневно производить не более 100 партий тетрадей. На производство другой продукции ограничений нет.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно производить заводу, чтобы получаемая прибыль была максимальной.

1.17. В саду имеются яблони различного возраста. Новый хозяин сада стоит перед дилеммой: имеющихся у него удобрений явно не хватает на подкормку всех яблонь. Известна урожайность деревьев каждого возраста и количество удобрений, вносимых на одно дерево каждого возраста.

Вид удобрений	Возраст деревьев, лет				Всего удобрений
	8 – 13	14 – 19	20 – 25	26 – 30	
Органические удобрения, кг	1,8	4	5,5	8	100
Мочевина, г	38	78	140	180	2100
Суперфосфат, г	150	315	480	750	9900
Хлорид калия, г	50	105	150	240	3200
Урожайность с 1 дерева, кг	7	35	70	54	
Количество деревьев в саду	10	6	7	4	

Необходимо найти оптимальное количество деревьев, которые должен удобрить хозяин, чтобы урожайность была максимальной. (Так как сад находится в нечернозёмной зоне, то неудобренные деревья практически не дают урожая).

1.18. Кондитерская фабрика для производства трёх видов карамели A, B и C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т карамели данного вида, общее количество сырья каждого вида, а также прибыль от реализации 1 т карамели данного вида приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (т) на 1 т карамели			Общее количество сырья (т)
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	-	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т карамели (грн.)	4500	5800	7300	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от её реализации.

1.19. На предприятии имеется склад вместимостью 80 м^2, половину которого занимает сырьё для производства продукции. Предприятие имеет финансовые проблемы и поэтому должно получить максимальную прибыль в течение ближайших 3-х дней. Аналитический отдел прогнозирует ежедневный рост цен на производимую предприятием продукцию, получаемую из сырья, занимающего 1 м^2 места на складе: 1 день – 1000 грн., 2 день – 1200 грн., 3 день – 1500 грн.

После одного дня работы предприятие должно загрузить всю готовую продукцию на склад, т.к. заказчики забирают её только утром на следующий день. Готовая продукция, полученная из сырья, размещающегося на 1 м^2, занимает 3 м^2 места на складе.

Оптимизировать ежедневный выпуск продукции, а соответственно и ежедневное потребление сырья, таким образом, чтобы за 3 дня получить максимальную прибыль.

1.20. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определённой питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г). В таблице приведены данные о концентрации необходимых веществ в 1 кг каждого корма и себестоимость (коп./кг) этих кормов.

Питательные вещества / Виды кормов	Концентрация питательных веществ в кормах: количество кормовых единиц, кг	белок, г/кг	кальций, г/кг	фосфор, г/кг	Себестоимость кормов, коп./кг
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	3
Силос	0,5	10	2,5	1	7

Определить оптимальный рацион, чтобы общие затраты на откорм были минимальными.

1.21. Завод выпускает два вида продукции, используя при этом четыре вида сырьевых ресурсов. Нормы затрат сырья, его запасы, а также доход получаемый от выпуска единицы продукции приведены в таблице

Виды сырья	Нормы затрат на единицу продукции, кг		Запасы сырья, кг
	продукция 1 вида	продукция 2 вида	
P_1	0,3	0,4	165
P_2	0,6	0,4	240
P_3	0,8	0	280
P_4	0	0,1	120
Доход от единицы продукции, грн.	6	5	

Определить такой план выпуска продукции, при котором будет получен максимальный доход.

1.22. Кооператив, используя три типа ресурсов, реализует продукцию четырех видов. Имеющийся объем ресурсов, их затраты на продажу одной партии изделий, а также прибыль от ее реализации приведены в таблице:

Ресурсы	Затраты ресурсов на реализацию одной партии изделий, усл. ед./парт.				Общий объем ресурсов, усл. ед.
	1 вид	2 вид	3 вид	4 вид	
1	3	4	2	6	64
2	4	7	3	5	83
3	2	3	6	1	58
Прибыль от реализации одной партии изделий грн./парт.	14	15	12	17	

Определить план продажи партий изделий, обеспечивающий максимальную прибыль кооперативу.

1.23. Плановые фонды продуктов и нормативы их затрат на приготовление ста блюд четырех видов, а также получаемая от их продажи прибыль представлены в таблице.

Продукты	Нормативы затрат продуктов на приготовление 100 блюд				Плановый фонд продуктов
	1 вид блюд	2 вид блюд	3 вид блюд	4 вид блюд	
Мясо, кг	6	9	-	-	3800
Рыба, кг	3	-	4	-	4200
Молоко, л	5	-	-	20	5100
Макаронные изделия, кг	2	3	2	4	2300
Овощи, кг	4	5	3	-	6700
Прибыль от продажи 100 блюд, грн.	200	400	600	500	

Определить такую структуру приготовления блюд, которая обеспечит максимальную прибыль.

1.24. Пять строительных объектов используют песок, добываемый в трех карьерах. Суточная производительность каждого карьера, потребность в песке на объектах и расстояние от карьеров до потребителей (в километрах) представлены в таблице.

Резервы карьеров, т	Потребности строительных объектов, т				
	300	200	400	600	300
	Расстояние от карьеров до строительных объектов, км				
500	2	4	3	8	1
400	5	6	4	7	2
900	1	3	5	4	7

Составить план перевозок песка, обеспечивающий минимум перевозок в тонно-километрах.

1.25. На трех типах технологического оборудования предприятие может производить пять видов изделий, для каждого из которых задано минимально необходимое количество их выпуска. Затраты времени на единицу продукции, фонд времени по группам оборудования, а также прибыль от выпуска одного изделия приведены в таблице.

Тип оборудования	Затраты времени на производство одного изделия, ч./изд.					Фонд времени, ч.
	1 вид	2 вид	3 вид	4 вид	5 вид	
1 тип	4	3	5	1	4	2000
2 тип	2	1	3	6	2	2500
3 тип	4	3	6	2	1	1800
Минимальный план выпуска изделий, шт.	800	1200	400	950	1000	
Прибыль от единицы продукции, грн./изд.	7	6	4	3	5	

Определить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли.

1.26. С трех складов необходимо поставить муку в четыре торговые точки. Стоимость перевозки 1 т муки, резервы поставщиков, а также потребности торговых предприятий представлены в таблице.

Резервы поставщиков, т	Потребность торговых предприятий, т			
	50	30	40	50
	Стоимость перевозки 1 т груза, грн./т			
70	3	4	2	1
60	1	5	4	3
40	4	1	1	2

Составить такой план перевозок муки от поставщиков потребителям, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными.

1.27. Необходимо оптимальным образом распределить общую площадь посева (2000 га) под различные культуры, если известны объемы производственных ресурсов, нормы их затрат на один гектар, а также урожайность каждой культуры и ее цена:

Виды ресурсов	Нормы затрат ресурсов на 1 га			Ресурсные объемы по труду, час.
	пшеница	рожь	картофель	
Механизированный труд, час./га	1,5	1,4	5	8000
Ручной труд, час./га	2,5	2,2	18	9000
Цена продукции, грн./ц	10	8	6	
Урожайность, ц/га	20	22	110	

1.28. Магазин осуществляет реализацию товаров двух видов. Данные о нормозатратах ресурсов, их запасах и о прибыли от реализации единицы товара представлены в таблице.

Виды ресурсов	Затраты ресурсов на единицу товара		Объем имеющихся ресурсов
	товар 1	товар 2	
Материальные ресурсы, грн.	4	3	24000
Трудовые ресурсы, чел.-мин.	7	8	56000
Прибыль от реализации единицы товара, грн.	0,5	0,6	

Определить структуру товарооборота, исходя из условия получения максимальной прибыли.

1.29. Рулоны ткани длиной 8,5 м следует разрезать на куски 1,5; 2,4 и 3,2 м. Причем кусков по 1,5 м необходимо не менее 25 шт., по 2,4 м – не менее 16 шт. и по 3,2 м – не менее 20 шт.

Определить план раскроя ткани, при котором количество раскроенных рулонов будут минимальными.

1.30. Для производства столов, шкафов и тумбочек мебельная фабрика использует ресурсы древесины двух видов. Нормы затрат этих ресурсов, их общее количество, а также доход от реализации одного изделия приведены в таблице.

Ресурсы древесины	Нормы затрат ресурсов на одно изделие, $м^3$/изд.			Общее количество ресурсов, $м^3$
	стол	шкаф	тумбочка	
1 вида	0,3	0,2	0,1	50
2 вида	0,1	0,4	0,2	80
Доход от реализации одного изделия грн./изд.	50	80	30	

Определить сколько столов, шкафов и тумбочек должна изготовить фабрика, чтобы обеспечить наибольший доход.

1.31. Экономически выгодный откорм животных предполагает, что в их дневном рационе будет кормовых единиц не менее 100, белка не менее 2 кг, кальция не менее 300 г и фосфора не менее 150 г. Рацион состоит из трех видов кормов – А, В и С. В таблице приведены данные о концентрации необходимых веществ в кормах, а также цена этих кормов.

Вид корма	Концентрация питательных веществ в кормах				Цены кормов, коп./кг
	количество кормовых единиц, кг.	белок, г/кг	кальций, г/кг	фосфор, г/кг	
А	0,9	80	1,4	3	20
В	0,8	70	1,8	4	40
С	0,6	90	1,2	6	15

Какое количество каждого вида корма необходимо расходовать, чтобы общие затраты на откорм были минимальными.

1.32. Необходимо оптимальным образом распределить пять экскаваторов для выполнения работ на каждом из пяти строительных объектов. Себестоимость выполнения земляных работ указана в таблице.

Экскаватор	Строительный участок				
	1	2	3	4	5
1	3	4	2	7	5
2	4	5	6	2	3
3	8	6	5	4	4
4	2	3	8	5	6
5	9	7	2	6	2

1.33. Торговое предприятие для организации продажи трех видов продукции располагает ресурсами труда и площади. В таблице приведены общий объем ресурсов выделенных на квартал, а также нормативы их затрат, издержки обращения и торговая прибыль на тысячу рублей товарооборота.

Ресурсы	Нормативы затрат ресурсов на 1 тыс. грн. товарооборота			Имеющийся объем ресурсов
	продукция 1	продукция 2	продукция 3	
Труд, чел.-ч.	5	4	7	2100
Площадь, м^2	0,3	0,7	0,5	150
Торговая прибыль, грн.	90	60	70	

Составить математическую модель задачи определения квартального плана товарооборота на получения максимальной прибыли.

1.34. В городе возможно сооружение домов трех типов, каждый из которых характеризуется определенным количеством однокомнатных, двухкомнатных, трехкомнатных и четырехкомнатных квартир, а также разной себестоимостью их строительства. Соответствующая информация приведена в таблице. В ней также указано требуемое количество квартир каждого вида.

Вид квартир	Количество квартир в одном доме, шт.			Требуемое количество квартир, шт.
	1 тип дома	2 тип дома	3 тип дома	
Однокомнатные	10	56	15	2000
Двухкомнатные	30	20	60	900
Трехкомнатные	60	34	-	1800
Четырехкомнатные	20	10	5	700
Себестоимость одного дома, млн. грн.	8,3	8,35	4,5	

Составить план строительства жилых домов, обеспечивающий минимальную себестоимость всей застройки.

1.35. Процесс изготовления кожаных брюк, курток и пальто предусматривает прохождение изделий через дубильный, раскройный и пошивочный цехи. Фонд времени работы каждого из них составляет соответственно 1340, 1280, и 1520 часов. Нормы времени обработки изделий в каждом из цехов, а также прибыль, получаемая предприятием от выпуска единицы продукции, приведены в таблице.

Участки	Нормы затрат времени на единицу продукции, ч./изд.		
	брюки	куртка	пальто
Дубильный	0,6	0,7	0,8
Раскройный	0,7	0,5	0,9
Пошивочный	0,8	0,7	0,9
Прибыль от единицы продукции, грн./изд.	130	250	270

Найти план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

1.36. Ежедневно в город на рынок необходимо доставить не менее 16 тонн картофеля из трех колхозов по цене соответственно 1000, 900, 1100 грн. за 1 тонну. Для своевременной доставки картофеля необходимо в каждом колхозе на погрузку затратить не более 30 мин. Известно, что возможности колхозов составляют 12, 10, 7 т соответственно, а на погрузку 1 т. в каждом из них затрачивается 3, 5 и 4 мин.

Определить, сколько картофеля следует привозить на рынок из каждого колхоза, чтобы суммарная стоимость завезенного для продажи картофеля была минимальной.

1.37. На фабрике имеются рулоны дорожек по 15 метров. В магазин требуется поставить дорожки длиной 5 м в количестве 22 шт., длиной 4 м – 30 шт., длиной 3 м – 20 шт.

Определить какое количество рулонов и какими способами необходимо разрезать, чтобы количество раскроенных рулонов было минимальным.

1.38. Для производства столов, трюмо и тумбочек мебельный комбинат использует древесину трех видов. Запасы древесины, нормы ее расхода, плановый ассортимент продукции и ее себестоимость приведены в таблице.

Виды древесины	Нормозатраты ресурсов, м^3/изделие			Запасы древесины, м^3
	стол	трюмо	тумбочка	
1 вида	0,2	0,4	0,3	50
2 вида	0,3	0,6	0,5	70
3 вида	0,7	0,2	0,4	65
Плановый ассортимент, шт.	200	150	300	
Себестоимость единицы изделия, грн./изд.	150	180	120	

Определить оптимальный план выпуска продукции, исходя из возможности его перевыполнения по заданному ассортименту.

1.39. Две торговые базы обеспечивают четыре магазина мукой. Известны транспортные расходы на перевозку муки от каждого поставщика каждому потребителю, коп./кг.

Резервы поставщиков, кг	Объем потребностей потребителей, кг			
	900	800	1200	1100
1900	3	4	2	3
2200	2	5	1	4

Определить план закрепления магазинов за базами с тем, чтобы транспортные расходы были минимальными.

1.40. Необходимо распределить площадь посева под пшеницу и ячмень таким образом, чтобы получить максимальное количество продукции в стоимостном выражении, если известны урожайность, цена, а также затраты ресурсов механизированного и ручного труда на один гектар посева и общая величина имеющихся ресурсов.

Вид ресурсов	Нормы затрат на 1 га		Общее количество ресурсов
	пшеница	ячмень	
Механизированный труд, ч./га	1,6	1,8	4000
Ручной труд, ч./га	2,4	2,0	6000
Урожайность, ц/га	20	25	
Цена 1 ц продукции, грн.	30	25	

1.41. В студенческой столовой для изготовления бутербродов трех видов используются четыре вида ресурсов, общие объемы запасов которых и нормы расхода указаны в таблице. Известна также прибыль, получаемая столовой от реализации одной партии бутербродов каждого вида.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на одну партию бутербродов, кг/парт.			Имеющийся объем ресурсов, кг
	1 вид бутербродов	2 вид бутербродов	3 вид бутербродов	
1 вид	4	3	1	42
2 вид	2	5	4	56
3 вид	3	6	2	38
4 вид	5	7	3	40
Прибыль от реализации одной партии бутербродов, грн.	50	70	80	

Запланировать выпуск партий бутербродов в таких количествах, чтобы общая прибыль столовой была максимальной. При этом необходимо учесть, что бутербродов первого вида необходимо изготовить не менее 4 партий.

1.42. В мукомольном цехе основную технологическую линию составляют агрегат помола и участок контроля качества получаемой муки. Агрегат помола автоматически может быть настроен на выпуск либо 1 сорта муки, либо 2 сорта. Время перестройки агрегата с одного сорта на другой очень мало и может не учитываться. Известно, что если агрегат помола настроен на выпуск 1 сорта муки, то может быть получено за смену не более 100 т муки, если же настроен на 2 сорт, то можно получить за смену не более 300 т муки. Участок контроля качества может проверить за смену не более 150 т муки любого сорта. Выручка от реализации 1 т муки 1 сорта в 2 раза превышает выручку от реализации такого же количества муки 2 сорта.

Запланировать выпуск муки 1 и 2 сорта в таких количествах, чтобы суммарная выручка от реализации произведенной муки была максимальной.

1.43. Железнодорожное депо формирует составы скорых и пассажирских поездов для обеспечения перевозки пассажиров на одном из направлений. Один состав скорого поезда формируется из 1 багажного вагона, 1 почтового вагона, 5 плацкартных вагонов, 6 купейных и 3 мягких. Пассажирский состав состоит из 1 багажного вагона, 8 плацкартных, 4 купейных, 1 мягкого. Известно также, что в одном плацкартном вагоне может разместиться 58 пассажиров, в купейном – 40, в мягком – 32. Для формирования составов имеется следующий парк вагонов: багажных 12 вагонов, почтовых 8, плацкартных 81, купейных 70 и мягких 26.

Определить план формирования составов скорых и пассажирских поездов, при котором обеспечивалась бы перевозка максимального количества пассажиров.

1.44. Пищевкусовая фабрика может выпускать фруктовый сок с разливом в стеклянную, металлическую и полиэтиленовую тару. Производительность линии по выпуску сока составляет: в стеклянной таре не более 10 т, в жестяной таре – не более 8 т, в полиэтиленовой таре – не более 5 т. Известно, что себестоимость производства 1 т сока в стеклянной упаковке равна 1600 грн., в жестяной - 1000 грн., в полиэтиленовой – 1600 грн. Отпускная цена не зависит от тары и равна 4000 грн. за 1 т.

Определить программу выпуска сока в различной таре, которая обеспечивала бы фабрике максимальную прибыль.

1.45. Для откорма животных используются три продукта – $П_1$, $П_2$ и $П_3$, содержащие белок, кальций и витамины. Содержание этих питательных веществ в продуктах откорма известны и представлены в таблице.

Продукт	Содержание питательных веществ в 1 кг продукта, г/кг		
	белок	кальций	витамины
$П_1$	100	12	4
$П_2$	40	8	2
$П_3$	360	6	2

Известно, что для нормального откорма должно быть потреблено не менее 3000 г, белка, не менее 180 г кальция и не менее 60 г витаминов.

Определить оптимальный рацион кормления животных из условия минимальной стоимости, если цена 1 кг продукта $П_1$ составляет 30 коп., продукта $П_2$ – 20 коп. и $П_3$ – 50 коп.

1.46. Составить оптимальный план (минимум капитальных затрат) застройки микрорайона города жилыми домами трех различных типов. В каждом из типовых домов имеются в наличии квартиры:

Типы домов / Квартиры	Количество квартир в домах различного типа		
	1	2	3
на 2 человека	50	50	60
на 3 человека	30	100	50
на 4 человека	120	60	40

Известны стоимость одного дома: 1 типа – 804 тыс. грн.; 2 типа – 832 тыс. грн.; 3 типа – 602 тыс. грн. Учитывая демографический состав будущего населения микрорайона, необходимо, чтобы число квартир было не менее: на 2 человек – 750 квартир; на 3 человек – 1700 квартир; на 4 человек – 450 квартир.

1.47. Основной продукцией гормолокозавода является молоко, кефир, ряженка, сметана и йогурт «Снежок», на производство 1т которых требуется соответственно 1010, 1010, 2850, 9450 и 3480 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1т молока, кефира и ряженки составляют 0,18; 0,19 и 0,2 машино-часов. На расфасовке 1т сметаны и йогурта заняты специальные автоматы в течение 3,25 и 3,5 часа соответственно. Всего для производства молочной продукции завод может использовать 150 тыс. кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 25,5 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны и йогурта – в течение 20,25 часов. Прибыль от реализации 1т молока, кефира, ряженки, сметаны и йогурта соответственно равна 300 грн., 900 грн., 1 тыс. грн., 230 тыс. грн. и 220 тыс. грн. Завод должен ежедневно производить не менее 100т молока. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Определить какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно производить заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной?

1.48. Предприятие может работать по пяти технологическим процессам, причём количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за 1 ед. времени соответственно равно 300, 260, 320, 400 и 450 шт. В процессе производства учитываются следующие производственные факторы: сырьё, электроэнергия, зарплата и накладные расходы. Затраты соответствующих факторов в рублях при работе по разным технологическим процессам в течении 1 ед. времени, а также объёмы имеющихся ресурсов приведены в таблице.

Технологические процессы / Производственные факторы	1	2	3	4	5	Объёмы ресурсов
Сырьё	12	15	10	12	11	1300
Электроэнергия	0,2	0,1	0,2	0,25	0,3	30
Зарплата	3	4	5	4	2	400
Накладные расходы	6	5	4	6	4	800

Найти программу максимального выпуска продукции.

1.49. Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи используют три типа сырья: чистую шерсть, капрон и акрил. В таблице указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на 1 т пряжи (т)		Количество сырья (т)
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	0,5	0,2	600
Капрон	0,1	0,6	620
Акрил	0,4	0,2	500
Прибыль от реализации 1 т. пряжи (грн.)	11000	9000	

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

1.50. Нефтеперерабатывающий завод может использовать две различные технологии перегонки нефти для производства бензина, керосина и солярового масла. В таблице приведены в расчете на 1 т. переработанной нефти данные, показывающие выход продукции, отходы, издержки производства (стоимость нефти, заработная плата, амортизация и т.п.) и загрузку оборудования. Кроме того, указаны стоимость 1 т готовой продукции и суточный объем государственного заказа, который необходимо выполнить.

Ресурс оборудования составляет 75 машино-часов в сутки. Все отходы должны пройти через очистные сооружения, производительность которых составляет 130 т./сут. Поставки нефти и спрос на всю продукцию завода не ограничены.

Наименование продукции	Выход продукции (т)		Стоимость 1 т. готового продукта (грн.)	Суточный объем госзаказа (т.)
	Технология 1	Технология 2		
Бензин	0,6	0,3	1000	117
Керосин	0,1	0,3	500	54
Соляровое масло	-	0,3	200	
Отходы	0,3	0,1		
Издержки производства (грн.)	130	370		
Загрузка оборудования (машино-часов)	0,2	0,05		

Требуется составить суточный план производства нефтепродуктов с целью максимизации прибыли.

1.51. Цех выпускает три вида деталей, которые изготовляются на двух станках. В таблице приведены затраты станочного времени на изготовление одной детали. Задан суточный ресурс рабочего времени: 600 мин. для станка 1, 900 мин. для станка 2. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 составляет 3, 1 и 2 грн. соответственно.

Станки / Заготовки	Затраты станочного времени на изготовление одной детали (мин.)	
	1	2
1	3	6
2	9	0
3	3	3

Требуется составить суточный план производства деталей с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

1.52. Для производства трех типов изделий (А, В и С) используется сырье вида 1, 2 и 3, причем закупки сырья типа 1 и 3 ограничены возможностями поставщиков. В таблице приведены нормы затрат сырья, цены на сырье и на изделия, а также ограничения по закупке сырья.

Вид сырья	Цена 1 кг. сырья (грн.)	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг.)			Ограничения по закупке сырья (кг.)
		А	В	С	
1	20	1	3	2	3000
2	10	4	1	3	-
3	10	6	5	2	3320
Стоимость одного изделия (грн.)		180	270	170	

Требуется определить план производства продукции с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

1.53. На фабрике производится ткань двух артикулов. Любая из этих тканей может изготавливаться на станках одного из двух типов. В таблице указаны: производительность станка каждого типа при изготовлении ткани артикулов 1 и 2; суммарные мощности станочного парка фабрики в расчете на одну рабочую неделю; трудовые затраты по обслуживанию станков в минутах рабочего времени на 1 час работы станка; цена метра ткани каждого артикула.

Известно также, что недельный ресурс трудозатрат на обслуживание станков равен 6000ч.

Тип станков	Мощности (тыс. ч.)	Трудозатраты (мин./ч.)	Производительность (м./ч.)	
			Артикул 1	Артикул 2
1	30	10	20	15
2	30	6	12	6
		Цена 1 м. ткани (грн.)	18	26

Требуется составить недельный план выпуска тканей с целью максимизации стоимости изготовленной продукции.

1.54. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и Б, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В таблице приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т. чая сорта А и Б.

Ингредиенты	Нормы расхода (т./т.)		Объем запасов
	А	Б	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации 1 т. продукции (грн.)	320	290	

Требуется составить план производства чая сорта А и Б с целью максимизации суммарной прибыли.

1.55. Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1,5 млн. л. алкилата, 1,2 млн. л. крекинг-бензина и 1,3 млн. л. изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 л бензина сорта А и Б соответственно равна 900 грн. и 1200 грн.

Определить месячный план производства бензина сорта А и Б с целью максимизации стоимость выпущенной продукции.

1.56. Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трех продуктов – сена, силоса и концентратов. Эти продукты содержат питательные вещества: белок, кальций и витамины. Численные данные представлены в таблице. В расчете на одну корову суточные нормы потребления белка и кальция составляют не менее 2000 и 210 г соответственно. Потребление витаминов строго дозировано и должно быть равно 87 мг в сутки.

Продукты	Питательные вещества		
	Белок (г/кг)	Кальций (г/кг)	Витамины (мг/кг)
Сено	50	10	2
Силос	70	6	3
Концентраты	180	3	1

Составить самый дешевый рацион кормления коров, если стоимость 1 кг сена, силоса и концентрата равна соответственно 15, 20 и 60 коп.

1.57. В регионе имеются два цементных завода и три потребителя их продукции – домостроительных комбината. В таблице указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т. цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Заводы	Производство цемента в сутки	Стоимость перевозки 1 т. цемента (грн.)		
		Комбинат 1	Комбинат 2	Комбинат 3
1	40	10	15	25
2	60	20	30	30
Потребности в цементе (т./сут.)		50	20	30

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

1.58. Перед проектировщиками автомобиля поставлена задача: сконструировать самый дешевый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу. Основные характеристики материалов представлены в таблице. Общая поверхность кузова (вместе с дверьми и окнами) должна составить 14м^2; из них не менее 4м^2 и не более 5м^2 следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг.

Характеристики	Материалы		
	Металл	Стекло	Пластмасса
Стоимость (грн/м^2)	25	20	40
Масса (кг/м^2)	10	15	3

Сколько металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший проект?

1.59. В металлургический цех в качестве сырья поступает латунь (сплав меди с цинком) четырех типов с содержанием цинка 10, 20, 25 и 40% по цене 1, 2, 4 и 5 грн. за 1 кг соответственно. В каких пропорциях следует переплавлять это сырье в цехе, чтобы получить сплав (латунь), содержащий 30% цинка и при этом самый дешевый?

1.60. Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на трех станках. В таблице приведены затраты станочного времени (минут) на производство одной детали. Суточный ресурс рабочего времени станков 1, 2 и 3 составляет соответственно 890, 920 и 840 минут. Стоимость одной детали вида 1,2 и 3 равна соответственно 3, 1 и 2 грн.

Станки / Заготовки	1	2	3
1	1	3	1
2	2	0	4
3	1	2	0

Требуется составить суточный план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

1.61. Объединение «Комфорт» производит холодильники, газовые плиты, морозильные шкафы и электропечи по цене 2; 1,8; 2,5 и 1 тыс. грн. соответственно. Постоянным фактором, ограничивающим объемы производства, является фиксированная величина трудовых ресурсов – 12 тыс. чел.-ч. в месяц. Выяснилось, однако, что в ближайший месяц дефицитной будет и листовая сталь для корпусов указанных изделий, поскольку поставщики смогут обеспечить лишь 7 тыс. м^2 этого материала. Известно, что для изготовления холодильника требуется 2 м^2 листовой стали и 3 чел.-ч. рабочего времени, для газовой плиты – соответственно1,5 м^2 и 3 чел.-ч., для морозильного шкафа – 3 м^2 и 4 чел.-ч, для электропечи – 1 м^2 и 2 чел.-ч.

Требуется составить план производства изделий на данный месяц, с тем, чтобы максимизировать стоимость выпущенной продукции.

1.62. Участник экспедиции «Северный полюс» укладывает рюкзак, и ему требуется решить, какие положить продукты. В его распоряжении имеются мясо, мука, сухое молоко и сахар. В рюкзаке для продуктов осталось лишь 45 дм^3 объема, и необходимо, чтобы суммарная масса продуктов не превосходила 35 кг. Врач экспедиции рекомендовал, чтобы мяса (по массе) было больше муки, по крайней мере, в два раза, муки не меньше молока, а молока, по крайней мере, в восемь раз больше, чем сахара. Характеристики продуктов приведены в таблице.

Характеристики	Продукты			
	Мясо	Мука	Молоко	Сахар
Объем (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорийность (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Сколько и каких продуктов нужно положить в рюкзак, с тем, чтобы суммарная калорийность продуктов была наибольшей?

1.63. Металлургический цех в качестве сырья закупает латунь типов 1, 2 и 3 – различные по процентному составу сплавы меди и цинка (с некоторыми добавками) – и переплавляет это сырье в отношении 1:1:3, с тем, чтобы получить сплав, содержащий 57% меди и 34% цинка. Появилась возможность покупать сырье новых типов 4, 5 и 6. Характеристика сырья каждого типа приведена в таблице.

Тип сырья	Содержание меди(%)	Содержание цинка(%)	Стоимость (р/кг)
1	75	20	5
2	60	30	3
3	50	40	2
4	72	23	4,2
5	58	32	2
6	45	40	1

Какое сырье следует покупать теперь цеху и в каких пропорциях его переплавлять с тем, чтобы выпускать тот же сплав, расходуя на сырье как можно меньше денег?

1.64. В пекарне для выпечки четырех видов хлеба используется мука двух сортов, маргарин и яйца. Имеющееся оборудование, производственные площади и поставки продуктов таковы, что в сутки можно переработать не более 250 кг муки 1 сорта, 200 кг муки 2 сорта, 60 кг. маргарина, 1380 шт. яиц. В таблице приведены нормы расхода продуктов, а также прибыль от продажи одного кг. хлеба каждого вида.

Наименование продукта	Нормы расхода на 1 кг хлеба (по видам)			
	1	2	3	4
Мука 1 (кг)	0,5	0,5	0	0
Мука 2 (кг)	0	0	0,5	0,5
Маргарин (кг)	0,125	0	0	0,125
Яйцо (шт)	2	1	1	1
Прибыль (коп./кг)	14	12	5	6

Требуется определить суточный план выпечки хлеба, с целью максимизации прибыли.

1.65. Для рытья котлована объемом 1350 м^3 строители получили три экскаватора. Мощный экскаватор производительностью 25,5 м^3/час расходует в час 10 л. бензина. Аналогичные характеристики среднего экскаватора – 10 м^3/час и 10/3 л/час, малого - 5 м^3/час и 2 л/час. Экскаваторы могут работать все одновременно не мешая друг другу. Запас бензина у строителей ограничен и равен 540 л. Если рыть котлован только малым экскаватором, то бензина заведомо хватит, но это будет очень долго. *Каким образом следует использовать имеющуюся технику, чтобы выполнить работу при наименьшем общем времени работы всех экскаваторов?*

1.66. На звероферме могут выращиваться песцы, черно – бурые лисы, нутрии и норки. Для их питания используются три вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчете на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверя.

Вид корма	Нормы расхода кормов (кг/день)				Ресурс кормов (кг)
	Песец	Лиса	Нутрия	Норка	
1	1	2	1	2	300
2	1	4	2	0	400
3	1	1	3	2	600
Прибыль грн./шкурка	60	120	80	100	

Определить, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наибольшей.

1.67. Завод изготовляет корпуса для холодильников и комплектует их оборудованием, поставляемым без ограничений другим предприятиями. В таблице указаны нормы трудозатрат, затрат материалов для изготовления корпусов, ограничения по этим ресурсам в расчете на месяц и прибыль от реализации холодильника каждой из пяти марок.

Наименование ресурса	Марка холодильника					Объем ресурса
	1	2	3	4	5	
Трудозатраты (чел.-ч)	2	3	5	4	4	9000
Металл ($м^2$)	2	2	4	5	0	8500
Пластик ($м^2$)	1	3	2	0	4	4000
Краска (кг)	1	2	3	3	2	5000
Прибыль (грн.)	40	70	120	120	50	

Найти месячный план выпуска холодильников с целью получения максимальной прибыль.

1.68. Для серийного изготовления некоторой детали механический цех может использовать пять различных технологий ее обработки на токарном, фрезерном, строгальном и шлифовальном станках. В таблице указано время (мин.) обработки детали на каждом станке в зависимости от технологического способа, а также общий ресурс рабочего времени станков каждого вида за одну смену.

Станки	Технологические способы					Ресурс времени станков (мин)
	1	2	3	4	5	
Токарный	2	1	3	0	1	4100
Фрезерный	1	0	2	2	1	2000
Строгальный	1	2	0	3	2	5800
Шлифовальный	3	4	2	1	1	10800

Требуется определить, как следует использовать имеющиеся технологии, с тем, чтобы добиться максимального выпуска продукции.

1.69. Для приобретения оборудования для нового производственного участка выделено 20 тыс. грн. Оборудование необходимо разместить на площади, не более, чем 38 $м^2$. Предприятие может заказать оборудование двух типов - А и В - по таким данным за единицу: А - стоимость 5 тыс. грн., требует площади $8м^2$, выпускает продукции на 7 тыс. грн. за смену; В - стоимость 2 тыс. грн., требует площади $4м^2$, выпускает продукции на 3 тыс. грн. за смену.

Необходимо найти в каком количестве следует приобрести оборудование, чтобы участок получил максимальную валовую выручку.

1.70. Цех мебельного комбината выпускает трельяжи, трюмо и тумбочки под телевизоры. Норма расхода материала в расчете на одно изделие, плановая себестоимость, оптовая цена предприятия, плановый (месячный) ассортимент и трудоемкость единицы продукции приведены в таблице. Запас древесностружечных плит, досок еловых и березовых 90, 30 и 14 м^3 соответственно. Плановый фонд рабочего времени 16800 человеко-часов.

Показатели	Норма расхода на одно изделие		
	Трельяжи	Трюмо	Тумбочки
Древесностружечные плиты, м^3	0,032	0,031	0,038
Доски: еловые, м^3	0,020	0,020	0,008
Березовые, м^3	0,005	0,005	0,006
Трудоемкость, чел.-ч.	10,2	7,5	5,8
Плановая себестоимость, грн.	88,81	63,98	29,60
Оптовая цена предприятия, грн.	93,00	67,00	30,00
Плановый ассортимент, шт	350	290	1200

Исходя из необходимости выполнения плана по ассортименту и возможности его перевыполнения построить найти такие объёмы выпускаемой продукции, при которых общий объём выпускаемой продукции будет максимальным.

1.71. Используя условия предыдущей задачи, построить математическую *модель определения объёмов выпускаемой продукции, при которых получаемая прибыль будет* максимальной.

1.72. На заводе ежемесячно скапливается около 14 т. отходов металла, из которого можно штамповать большие и малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах - 600 тыс. шт., в малых – 1100 тыс. шт. (недостающее количество шайб закупается на специализированном предприятии). Оптовая цена больших шайб 119 грн. (за тысячу штук) и малых – 52 грн. Расход металла на тысячу больших шайб – 22 кг, на тысячу малых – 8 кг. Месячная возможность завода штамповки шайб составляет 440 тыс. шт. больших шайб либо 720 тыс. шт. малых.

Определить план штамповки шайб (из отходов завода), при котором стоимость закупки недостающего количества шайб будет минимальной.

1.73. Предприятие предполагает производить приборы типа А, В, С, которые будет реализовывать по цене за единицу соответственно 600, 700 и 1150 грн. Трудоемкость их производства задана соотношением 1:2:3. Ранее предприятие изготовляло только прибор типа А в количестве 900 шт. за сутки. Однако изменение объема поставок экранированного провода в планируемом году позволит выпускать любые приборы. Для укомплектования каждого прибора необходим датчик того же типа, что и тип прибора. Их предполагается получать по кооперативным поставкам в количестве, обеспечивающем в сутки сборку не более 400, 500 и 200 приборов типа А, В, С соответственно.

Найти такие объёмы производства приборов, при которых общий объём в стоимостном выражении будет максимальным.

1.74. Фабрика выпускает кожаные брюки, куртки и пальто специального назначения в ассортименте, заданном отношением 2:1:3. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка – дубильный, раскройный и пошивочный. Фабрика имеет практически неограниченную сырьевую базу, однако сложная технология предъявляет высокие требования к квалификации рабочих. Численность их в рамках планируемого периода ограничена. Время обработки изделий на каждом участке, их плановая себестоимость приведены в таблице.

Показатели	Брюки	Куртки	Пальто
Норма времени на участках, чел.-ч.			
Дубильном	0,3	0,4	0,6
Раскройном	0,4	0,4	0,7
Пошивочном	0,5	0,4	0,8
Полная себестоимость, грн.	68	215	297
Оптовая цена предприятия, грн.	97	260	400

Ограничения на фонд времени для дубильного, раскройного и пошивочного участков составляют соответственно 3360, 2688 и 5040 чел.-ч.

Учитывая заданный ассортимент, определить месячный план производства изделий, при котором прибыль будет максимальной.

1.75. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 300 тыс. грн. Его предполагается разместить на площади 45 м^2. Участок может быть оснащен оборудованием двух видов – машинами стоимостью 6 тыс. грн. (здесь и далее все показатели приводятся на единицу оборудования), размещающимися на площади 8 м^2, производительностью 8 тыс. единиц продукции за смену; машинами стоимостью 2 тыс. грн., занимаемая ими площадь 3 м^2, производительность 3 тыс. единиц продукции.

Необходимо найти в каком количестве следует приобрести оборудование, чтобы участок имел максимальную производительность.

1.76. На заготовительный участок поступили стальные прутья длиной 111см. Необходимо разрезать их на заготовки по 19, 23 и 30 см. Последних требуется соответственно 311, 215 и 190 шт.

Найти такой план раскроя прутков, при котором бует раскроено их минимальное их количество.

1.77. Мясокомбинат имеет четыре цеха, в каждом из которых может изготавливаться четыре вида колбасных изделий. Учитывая необходимость углубления специализации в цехах, решено сосредоточить выпуск в каждом цехе только по одному виду колбасных изделий. Себестоимость производства каждого из колбасных изделий (тыс. грн.) в каждом цехе различная и задана в следующей таблице:

Колбасные изделия \ Цеха	1	2	3	4
1	20	30	40	30
2	40	50	30	45
3	60	70	65	75
4	70	80	75	90

Найти такое распределение производства изделий между филиалами, чтобы общая стоимость производимых изделий была минимальной

1.78. В плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типов Д-1, Д-2, Д-3, и Д-4. Данные о количестве квартир разного типа в каждом из указанных типов домов, их плановая себестоимость, а также годовой план ввода квартир, приведены в таблице.

Показатели	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Годовой план ввода квартир
Типы квартир					
Однокомнатные	10	18	20	15	800
Двухкомнатные					
Смежные	40	-	20	-	1000
Несмежные	-	20	-	60	900
Трехкомнатные	60	90	10	-	2000
Четырехкомнатные	20	10	-	5	5000
Плановая себестоимость, млн. грн.	8,3	8,3	3,6	4,5	

Исходя из необходимости выполнения плана ввода квартир (возможно его перевыполнения) найти такой план строительства домов, при котором себестоимость строительства будет минимальной.

1.79. Производственный участок изготовляет изделия И-1, И-2, И-3 для сборочного конвейера предприятия-заказчика. Потребность в них 300, 500 и 400 шт. соответственно. Запасы металла на изделие И-1 ограничены, поэтому их можно производить не более 350 шт. Все изделия последовательно обрабатываются на станках С-1, С-2, С-3. Технология изготовления каждого изделия предусматривает три способа обработки. Норма времени на обработку, плановая себестоимость и оптовая цена предприятия на все изделия приведены в таблице. Плановый фонд времени работы станков составляет: для станков С-1 и С-3 – по 6048, для С-2 – 3932 ч.

Показатели	Изделия и способы обработки								
	И-1			И-2			И-3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Норма времени на обработку, ч									
На С-1	3	7	0	8	4	5	4	3	2
На С-2	2	3	6	3	2	0	2	3	1
На С-3	7	5	6	9	3	6	5	6	3
Плановая себестоимость, грн.	130	150	110	260	200	250	190	200	180
Оптовая цена предприятия, грн.	160			250			200		

Построить модель, определения плана загрузки станков, обеспечивающего максимальную прибыль от реализации готовой продукции.

1.80. Четыре строительных участка потребляют щебень, вырабатываемый тремя дробильными установками. Суточная потребность в щебне строительных участков и стоимость перевозки 1 т. от дробильных установок до строительных площадок приведены в таблице. Суточная производительность дробильных установок составляет 110, 75 и 90 т соответственно.

Показатели	Номер участка			
	1	2	3	4
	Цена перевозки 1 т. щебня, грн.			
От установки 1	4	3	8	5
От установки 2	9	7	5	4
От установки 3	3	6	2	8
Потребность в щебне строительного участка, т.	50	50	70	70

Построить модель для определения оптимального план закрепления строительных площадок за дробильными установками.

1.81. Торговое предприятие для организации продажи трех видов продукции располагает ресурсами труда и площади. В таблице приведены общий объем ресурсов на квартал, а также нормативы их затрат, издержки обращения и торговая прибыль на тысячу рублей товарооборота

Ресурсы	Нормативы затрат ресурсов на 1 тыс. руб. товарооборота			Имеющийся объем ресурсов
	Продукция 1	Продукция 2	Продукция 3	
Труд, чел.-ч.	5	4	7	2100
Площадь, $м^2$	0,3	0,7	0,5	150
Издержки обращения, грн.	4	7	6	
Торговая прибыль, грн.	90	60	70	

Составить математическую модель определения квартального плана товарооборота на минимум издержек обращения при фиксированном плане прибыли в 20 тыс. грн.

1.82. Сухогруз может принять на борт не более 1000 т груза, общий объем которого не должен превосходить 500 $м^3$. На причале находится груз из 8 наименований (различные механизмы и нестандартное оборудование). Вес, объем, количество и цена груза каждого наименования приведены в таблице.

Показатели	Номер груза							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Вес, т	50	100	70	91	60	75	89	67
Объем, $м^3$	45	31	25	44	37	40	29	35
Количество, шт.	5	2	6	2	3	4	1	8
Цена, тыс. грн.	1,5	2,1	1,3	1,8	1,4	1,9	2,0	1,1

Построить модель, выбора варианта загрузки судна по критерию максимальной стоимости всего груза.

1.83. На лесной склад шахты поступил заказ на партию шахтных стоек. Партия состоит из трёх видов заготовок с размерами 190, 250 и 230 см. в количествах соответственно 250, 380 и 450 шт. На лесном складе имеются в достаточном количестве брёвна длинной 8 м.

Найти такой план распила брёвен, при котором используемое количество брёвен будет минимальным.

1.84. Четыре хлебозавода потребляют в месяц 275, 175, 220 и 290 т. муки, которую поставляют им три элеватора. Месячные запасы муки на элеваторах соответственно равны 380, 340 и 300 т.

Хлебозаводы / Элеваторы	Стоимость перевозки 1 т муки от элеваторов к хлебозаводам, грн.			
	1	2	3	4
1	2,5	3,6	3,8	2,1
2	0,9	1,5	1,3	0,6
3	0,7	0,4	0,6	1,2

По приведенным данным построить модель определения объёмов поставок от элеваторов на хлебозаводы, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными

1.85. Строительной организации необходимо выполнить четыре вида земляных работ, объем которых соответственно 7000, 6500, 7600 и 8100 м^3. Для их осуществления предполагается использовать три механизма. Производительность механизмов и себестоимость 1 часа работы каждого из них приведены в таблице. Плановый фонд времени I, II, III механизмов составляет соответственно 350, 600 и 290 машино-часов.

Показатели	Механизм и виды работ											
	I механизм				II механизм				III механизм			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Производительность механизма по виду работы, м^3/ч.	20	15	16	30	14	18	35	32	15	29	40	15
Себестоимость 1 часа работы механизма по виду работ, грн.	2	5	3	6	2	4	5	7	8	3	6	3

Построить модель, нахождения плана организации работ с минимальными затратами на его осуществление.

1.86. Нефтеперерабатывающий завод получает за плановый период четыре полуфабриката – 600 тыс. л алкилата, 316 тыс. л крекинг-бензина, 460 тыс. л бензина прямой перегонки и 200 тыс. л изопентана. В результате смешивания этих ингредиентов в пропорциях 2:3:1:5; 2:4:3:4; 5:1:6:2 и 7:1:3:2 получают бензин четырех сортов Б-1, Б-2, Б-3 и Б-4. Цена его реализации соответственно 1800, 2400, 2600 и 1400 грн. за тысячу литров.

Предположив, что реализация любого сорта бензина не вызовет затруднений, построить модель определения максимального объёма производства различных сортов бензина в стоимостном выражении

1.87. Производственные мощности каждого из пяти заводов объединения позволяют в установленные сроки выполнять только один из пяти заказов, имеющихся в портфеле заказов объединения. Данные о затратах на выполнение заказов (в тыс. грн.) приведены в таблице.

Номер завода / Номер заказа	Затраты на выполнения заказов				
	1	2	3	4	5
1	15	17	16	15	14
2	13	11	12	16	15
3	9	5	8	7	10
4	20	21	19	18	22
5	13	16	15	14	13

Построить модель, определения оптимального варианта распределения заказов с минимальными затратами объединения на его выполнение.

1.88. Рацион стада крупного рогатого скота из 220 голов включает питательные вещества A, B, C, D, E. В сутки одно животное должно съедать питательных веществ различного вида не менее: 2 кг – A; 1,5 кг – B; 0,9 кг – C; 3 кг - D и 1,8 кг вида E. Однако в чистом виде указанные вещества не производятся. Они содержатся в концентратах К-1, К-2, К-3. Их цена соответственно 0,5; 0,4 и 0,9 грн. за килограмм. Содержание питательных веществ в килограмме концентрата (%) указано в таблице.

Концентраты	Продукты				
	A	B	C	D	E
К-1	15	22	0	0	4
К-2	19	17	0	14	7
К-3	5	12	25	5	8

Построить модель, минимизации затрат на покупку концентратов для рационального кормления скота.

1.89. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трёх видов в количествах, не менее соответственно 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя и величина отходов, при данном способе раскроя одного листа фанеры, приведены в таблице.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу:	
	1	2
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроит, чтобы было получено не меньше нужного количество заготовок при минимальных отходах.

1.90. Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуется данными, приведёнными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии.

Тип судна	Производительность судов (млн. тонно-миль в сутки) на линии			Общее время эксплуатации судов (сут.)
	1	2	3	
1	8	14	11	300
2	6	15	13	300
3	12	12	4	300
Заданный объём перевозок (млн. тонно-миль)	3000	5400	3300	

Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации.

1.91. На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий используется ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия, общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида приведены в таблице.

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани (м)
	1	2	3	4	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Цена одного изделия (грн.)	300	540	330	210	

Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

1.92. Производимый на пяти кирпичных заводах кирпич поступает на шесть строящихся объёктов. Ежедневное производство кирпича, потребность в кирпиче строящихся объектов, а также цена перевозки 1000 шт. кирпича с каждого завода к каждому объекту приведены в таблице.

Кирпичный завод	Цена перевозки 1 тыс. шт. кирпича к строящемуся объекту						Объём производства кирпича (тыс. шт.)
	1	2	3	4	5	6	
1	8	7	5	10	13	12	360
2	13	8	10	7	11	6	180
3	12	4	11	9	14	10	120
4	14	6	12	13	13	7	150
5	9	12	14	15	8	8	240
Потребность в кирпиче (тыс. шт.)	230	220	130	170	190	110	

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

1.93. Для производства трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (нормо-ч)				
1-го типа	2	-	4	200
2-го типа	4	3	1	500
Сырьё (кг)				
1-го вида	10	15	20	1495
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (грн.)	100	150	200	-
Выпуск (шт.)				
Минимальный	10	20	25	-
Максимальный	20	40	100	-

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготовляемой продукции максимальна.

1.94. При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляции	1	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,40	5,6	6	8	11176
Освинцование	3	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля (грн.)	1200	800	1000	1300	-

Определить такой план выпуска продукции, при котором общая прибыль от реализации производимой продукции будет максимальной.

1.95. Стальные прутья длиной 120 см. необходимо разрезать их на заготовки по 45, 35 и 50 см. Последних требуется соответственно 400, 300 и 200 шт.

Найти такой план раскроя стальных прутьев, при будет раскроено их минимальное их количество.

1.96. Из отходов производства предприятие может организовать выпуск четырёх видов продукции. Для этого оно планирует использовать два типа взаимозаменяемого оборудования. Количество изделий каждого вида, которое может быть изготовлено на соответствующем оборудовании в течение 1 ч, а также затраты, связанные с производством одного изделия, приведены в следующей таблице:

Тип оборудования	Количество производимых в течение 1 ч изделий вида				Затраты (грн.), связанные с производством в течение 1 ч изделий вида			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	8	7	4	5	2,7	2,6	2,7	2,4
2	6	8	6	4	2,6	2,7	2,6	2,5

Оборудование 1-го типа предприятие может использовать не более 80 ч, а оборудование 2-го типа – не более 60 ч. Предприятию необходимо изготовить изделий каждого вида соответственно не меньше 240, 160, 150 и 220 ед.

Определить, в течение какого времени и на каком оборудовании следует изготовлять каждое из изделий, чтобы получить не менее необходимого количества изделий при минимальных затратах на их производство.

1.97. Ежедневно каждый из трёх заводов по производству асфальта выпускает соответственно 110, 190 и 90 т асфальта. Этот асфальт используется на четырёх строительных объектах, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80т. Тарифы перевозок 1т асфальта с заводов каждому из строительных объектов заданы в следующей таблице:

Строительные объекты / Заводы	1	2	3	4
1	8	1	9	7
2	4	6	2	12
3	3	5	8	9

Составить такой план доставки асфальта на строительные объекты, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

1.98. На трёх железнодорожных станциях скопилось соответственно 120,110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на пять железнодорожных станций в количествах соответственно 80, 60, 70, 100 и 50. Тарифы на перегонку одного вагона (тыс. грн.) представлены в следующей таблице:

Станция-получатель / Станция-отправитель вагонов	1	2	3	4	5
1	2	4	1	6	7
2	3	3	5	4	2
3	8	9	6	3	4

Составить такой план перегонки вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной.

1.99. На каждом их четырёх филиалов производственного концерна могут изготовляться изделия четырёх видов. Учитывая необходимость углубления специализации, на филиалах решено сосредоточить выпуск только по одному виду изделий. Себестоимость производства каждого из изделий (тыс. грн.) на каждом филиале различная и задана в следующей таблице:

Изделия \ Филиалы	1	2	3	4
1	9	8	9	7
2	4	6	3	2
3	7	2	1	4
4	8	3	5	6

Найти такое распределение производства изделий между филиалами, чтобы общая стоимость производимых изделий была минимальной.

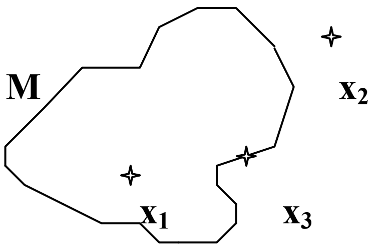
1.00. На лесной склад поступили брёвна длиной 600 см. Их необходимо распилить на заготовки по 120, 150 и 280 см. в количествах соответственно 1000, 4000 и 2000 шт.

Найти такой план распила брёвен, при котором количество распиленных брёвен будет минимальным.

Тема 2. Элементы выпуклых множеств

Под **множеством** будем понимать совокупность элементов любой природы, для которых задано правило принадлежности к данному множеству. Ниже мы будем рассматривать подмножества из евклидовых пространств.

Определение 2. ε - окрестностью точки **x** называется множество всех точек, расстояние которых до точки **x** меньше **ε**.



Определение 3. Точка $\mathbf{x_1}$ называется **внутренней точкой множества M,** если существует такая **ε** - окрестность данной точки, все точки которой принадлежат множеству **M**.

Определение 4. Точка $\mathbf{x_2}$ называется **внешней точкой множества M**, если существует такая **ε** - окрестность данной точки, все точки которой не принадлежат множеству **M**.

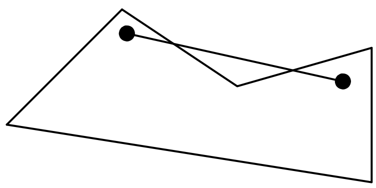
Определение 5. Точка $\mathbf{x_3}$ называется **граничной точкой множества M,** если в любой её **ε** - окрестности существуют точки как принадлежащие множеству **M**, так и не принадлежащие этому множеству.

Определение 6. Множество **M** называется **замкнутым,** если оно содержит все свои граничные точки.

Пример. $|x| < 2$- незамкнутое множество,

$|x| \leq 2$ - замкнутое множество.

Определение 7. Множество **M** называется **выпуклым,** если вместе с любыми двумя точками, принадлежащими данному множеству, оно содержит и отрезок их соединяющий.



Невыпуклое множество

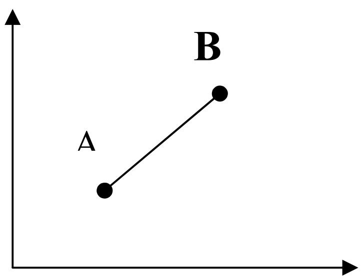
Выпуклое множество

Определение 8. Точка **x** множества **M** называется **угловой или крайней,** если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

Теорема 1. Любую точку отрезка можно представить в виде выпуклой комбинации его угловых точек:

$$\begin{cases} x = \lambda_1 A + \lambda_2 B \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$ – выпуклая комбинация угловых точек A и B.

Поясним данную теорему с помощью рисунка. Имеется отрезок прямой [A,B]. Если $\boldsymbol{\lambda_1}$=1, то $\boldsymbol{\lambda_2}$=0, так как эти коэффициенты неотрицательные и их сумма равна 1, по условию выпуклой комбинации. В этом случае точка **x** будет определять точку **A**. При уменьшении $\boldsymbol{\lambda_1}$ от 1 до 0, точка **x** будет перемещаться по отрезку от точки **A** до точки **B**. Когда $\boldsymbol{\lambda_1}$ станет равной 0 точка **x** совпадёт с точкой **B**. Таким образом, различные значения коэффициентов $\boldsymbol{\lambda_1}$ и $\boldsymbol{\lambda_2}$, удовлетворяющие условиям выпуклой комбинации, определяют конкретную точку заданного отрезка.



Теорема 2. Любую точку выпуклого замкнутого ограниченного множества можно представить в виде выпуклой комбинации его угловых точек:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1,$$
$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \cdots, \lambda_n \geq 0.$$

2.1. Задачи

В следующих задачах представить точку $\mathbf{A_0}$, в виде выпуклой комбинации угловых точек $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ выпуклого множества.

2.01.

A_1	A_2	A_3	A_0
-35	35	40	16
-30	30	20	8

2.02.

A_1	A_2	A_3	A_0
-2	18	70	56
-4	36	20	16

2.03.

A_1	A_2	A_3	A_0
-9	21	80	8
-6	14	10	1

2.04.

A_1	A_2	A_3	A_0
-18	72	40	12
-8	32	50	15

2.05.

A_1	A_2	A_3	A_0
-32	48	10	2
-36	54	60	12

2.06.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	32	60	36
-18	72	20	12

2.07.

A_1	A_2	A_3	A_0
-7	63	40	24
-9	81	80	48

2.08.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	20	30	18
0	70	90	54

2.09.

A_1	A_2	A_3	A_0
-64	16	50	45
-56	14	20	18

2.10.

A_1	A_2	A_3	A_0
-9	1	80	40
-63	7	50	25

2.11.

A_1	A_2	A_3	A_0
-45	5	40	16
-36	4	70	28

2.12.

A_1	A_2	A_3	A_0
-3	27	80	16
-2	18	20	4

2.13.

A_1	A_2	A_3	A_0
-24	56	80	16
-12	28	10	2

2.14.

A_1	A_2	A_3	A_0
-42	28	50	45
-48	32	60	54

2.15.

A_1	A_2	A_3	A_0
-30	20	70	42
-18	12	20	12

2.16.

A_1	A_2	A_3	A_0
-49	21	50	25
-7	3	50	25

2.17.

A_1	A_2	A_3	A_0
-40	10	70	28
-8	2	30	12

2.18.

A_1	A_2	A_3	A_0
-15	35	40	8
-27	63	40	8

2.19.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	32	90	72
-18	72	10	8

2.20.

A_1	A_2	A_3	A_0
-36	24	90	72
-36	24	20	16

2.21.

A_1	A_2	A_3	A_0
-20	30	30	21
-16	24	90	63

2.22.

A_1	A_2	A_3	A_0
-48	32	70	21
-42	28	20	6

2.23.

A_1	A_2	A_3	A_0
-20	30	70	63
-16	24	50	45

2.24.

A_1	A_2	A_3	A_0
-4	16	20	8
-6	24	70	28

2.25.

A_1	A_2	A_3	A_0
-7	63	80	8
-4	36	50	5

2.26.

A_1	A_2	A_3	A_0
-1	9	40	28
-8	72	10	7

2.27.

A_1	A_2	A_3	A_0
-12	8	20	12
-6	4	60	36

2.28.

A_1	A_2	A_3	A_0
-24	16	10	1
-48	32	90	9

2.29.

A_1	A_2	A_3	A_0
-16	4	70	21
-64	16	80	24

2.30.

A_1	A_2	A_3	A_0
-81	9	20	4
-72	8	50	10

2.31.

A_1	A_2	A_3	A_0
-14	56	40	32
-18	72	50	40

2.32.

A_1	A_2	A_3	A_0
-64	16	60	36
-72	18	10	6

2.33.

A_1	A_2	A_3	A_0
-27	3	30	12
-27	3	20	8

2.34.

A_1	A_2	A_3	A_0
-4	16	10	7
-8	32	40	28

2.35.

A_1	A_2	A_3	A_0
-3	7	50	30
-12	28	10	6

2.36.

A_1	A_2	A_3	A_0
-2	18	90	36
-4	36	70	28

2.37.

A_1	A_2	A_3	A_0
-81	9	40	8
-18	2	70	14

2.38.

A_1	A_2	A_3	A_0
-16	24	50	25
-20	30	30	15

2.39.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	50	60	36
0	30	60	36

2.40.

A_1	A_2	A_3	A_0
-72	8	60	18
-63	7	40	12

2.41.

A_1	A_2	A_3	A_0
-15	35	50	35
-6	14	30	21

2.42.

A_1	A_2	A_3	A_0
-36	54	90	63
-28	42	50	35

2.43.

A_1	A_2	A_3	A_0
-14	6	80	72
-21	9	60	54

2.44.

A_1	A_2	A_3	A_0
-42	28	50	45
-24	16	60	54

2.45.

A_1	A_2	A_3	A_0
-45	5	80	40
-45	5	10	5

2.46.

A_1	A_2	A_3	A_0
-24	6	70	28
-8	2	60	24

2.47.

A_1	A_2	A_3	A_0
-10	40	70	63
-10	40	10	9

2.48.

A_1	A_2	A_3	A_0
-24	36	50	25
-32	48	90	45

2.49.

A_1	A_2	A_3	A_0
-9	21	90	54
-24	56	10	6

2.50.

A_1	A_2	A_3	A_0
-6	24	50	40
-12	48	60	48

2.51.

A_1	A_2	A_3	A_0
-16	64	40	16
-12	48	70	28

2.52.

A_1	A_2	A_3	A_0
-12	28	90	18
-12	28	20	4

2.53.

A_1	A_2	A_3	A_0
-32	48	90	36
-36	54	40	16

2.54.

A_1	A_2	A_3	A_0
-6	14	10	4
-27	63	10	4

2.55.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	12	50	30
-20	30	70	42

2.56.

A_1	A_2	A_3	A_0
-16	24	30	3
-28	42	80	8

2.57.

A_1	A_2	A_3	A_0
-35	35	60	54
-35	35	10	9

2.58.

A_1	A_2	A_3	A_0
-12	48	60	18
-18	72	40	12

2.59.

A_1	A_2	A_3	A_0
-40	10	90	18
-72	18	10	2

2.60.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	10	60	48
0	70	50	40

2.61.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	70	80	56
0	10	40	28

2.62.

A_1	A_2	A_3	A_0
-6	54	20	8
-8	72	30	12

2.63.

A_1	A_2	A_3	A_0
-6	4	80	64
-24	16	10	8

2.64.

A_1	A_2	A_3	A_0
-16	24	40	16
-8	12	50	20

2.65.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	60	20	18
0	70	10	9

2.66.

A_1	A_2	A_3	A_0
-4	6	70	7
-4	6	90	9

2.67.

A_1	A_2	A_3	A_0
-36	54	80	16
-16	24	20	4

2.68.

A_1	A_2	A_3	A_0
-24	56	80	40
-3	7	60	30

2.69.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	2	50	10
-56	14	20	4

2.70.

A_1	A_2	A_3	A_0
-20	20	50	45
-45	45	50	45

2.71.

A_1	A_2	A_3	A_0
-12	48	70	35
-12	48	30	15

2.72.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	40	50	20
0	90	60	24

2.73.

A_1	A_2	A_3	A_0
-21	9	30	21
-7	3	70	49

2.74.

A_1	A_2	A_3	A_0
-3	7	40	32
-15	35	30	24

2.75.

A_1	A_2	A_3	A_0
-12	48	30	9
-16	64	10	3

2.76.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	90	50	45
0	30	90	81

2.77.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	2	60	48
-32	8	10	8

2.78.

A_1	A_2	A_3	A_0
-54	6	90	36
-9	1	70	28

2.79.

A_1	A_2	A_3	A_0
-12	18	80	16
-12	18	60	12

2.80.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	2	50	45
-64	16	80	72

2.81.

A_1	A_2	A_3	A_0
-2	8	80	8
-6	24	20	2

2.82.

A_1	A_2	A_3	A_0
-49	21	70	7
-21	9	50	5

2.83.

A_1	A_2	A_3	A_0
-48	12	80	48
-48	12	60	36

2.84.

A_1	A_2	A_3	A_0
-28	42	30	18
-20	30	80	48

2.85.

A_1	A_2	A_3	A_0
-24	56	10	5
-24	56	40	20

2.86.

A_1	A_2	A_3	A_0
-3	27	60	18
-8	72	70	21

2.87.

A_1	A_2	A_3	A_0
-2	8	40	16
-14	56	30	12

2.88.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	72	40	8
-2	18	30	6

2.89.

A_1	A_2	A_3	A_0
-10	40	60	36
-12	48	60	36

2.90.

A_1	A_2	A_3	A_0
-42	28	90	9
-12	8	30	3

2.91.

A_1	A_2	A_3	A_0
-4	16	70	42
-12	48	50	30

2.92.

A_1	A_2	A_3	A_0
-20	30	90	54
-28	42	30	18

2.93.

A_1	A_2	A_3	A_0
-49	21	40	16
-21	9	50	20

2.94.

A_1	A_2	A_3	A_0
-8	12	30	9
-24	36	50	15

2.95.

A_1	A_2	A_3	A_0
-12	8	40	28
-36	24	20	14

2.96.

A_1	A_2	A_3	A_0
-49	21	30	3
-49	21	40	4

2.97.

A_1	A_2	A_3	A_0
-16	24	50	10
-20	30	80	16

2.98.

A_1	A_2	A_3	A_0
-6	4	80	24
-18	12	80	24

2.99.

A_1	A_2	A_3	A_0
0	40	50	20
0	20	70	28

2.00.

A_1	A_2	A_3	A_0
-2	8	30	6
-8	32	50	10

Тема 3. Формы задач линейного программирования

3.1. Формы задач линейного программирования

Задачи линейного программирования могут находиться в различных эквивалентных формах. Иногда требуется, чтобы задача находилась в какой-то определённой форме. Например, для решения задачи линейного программирования симплекс-методом требуется, чтобы она находилась в канонической форме, а для решения задачи графическим методом – в стандартной форме. Поэтому необходимо знать формы задач и уметь переходить от одной её формы к другой.

Задача линейного программирования может находиться в одной из следующих форм: общей, стандартной или канонической.

Общая форма задачи линейного программирования

Найти максимум или минимум целевой функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max (\min) \qquad (3.1)$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & R_1 & a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & R_2 & a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & R_m & a_m, \end{array} \qquad (3.2)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,k}, \; k \leq n. \qquad (3.3)$$

В общей форме каждый символ **R_1, R_2, …, R_m** означает один из знаков: $\geq$ **,** $=$ или $\leq$. В такой форме задачи линейного программирования часть переменных может быть подчинена условию неотрицательности ($x_i \geq 0$), часть – условию неположительности ($x_j \leq 0$), а какие-то переменные, возможно, могут принимать любые значения.

Стандартная форма задачи линейного программирования

Найти максимум или минимум целевой функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max (\min) \qquad (3.4)$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq a_m, \end{array} \qquad (3.5)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,k}, \; k \leq n. \qquad (3.6)$$

Другими словами, задача находится в стандартной форме, если её целевая функция на нахождение минимума или максимума, неизвестные переменные могут принимать любые значения, а ограничения задачи представлены в виде неравенств.

Каноническая форма задачи линейного программирования

Найти минимум целевой функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min \qquad (3.7)$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m, \end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}. \qquad (3.9)$$

Другими словами, если целевая функция на нахождение минимума, все ограничения задачи заданы в виде уравнений и на все переменные накладываются условия неотрицательности, то задача линейного программирования находится в канонической форме. Некоторые авторы придерживаются концепции, что целевая функция задачи линейного программирования в канонической форме, должна быть на нахождение максимума. Вопрос о целевой функции не является существенным (в некоторых случаях действительно удобнее решать задачу с целевой функцией на максимум), однако наличие ограничений в виде уравнений и условия неотрицательности переменных являются обязательными для канонической формы.

3.2. Переход от одной формы задачи линейного программирования к другой

Для перехода от общей или стандартной формы к канонической используют следующие приёмы.

1. **Преобразование переменных.** Если какая-то переменная x_k неположительная ($x_k \leq 0$), то вводят новую переменную x_k' такую, что $x_k'=-x_k$. Очевидно, что $x_k' \geq 0$. После чего в каждом ограничении и целевой функции переменную x_k заменяют на $[-x_k']$.

Если какая-то переменная x_t может принимать любые значения, то её заменяют разностью двух неотрицательных переменных x_t' и x_t'', то есть полагают, что $x_t = x_t' - x_t''$, где $x_t' \geq 0$ и $x_t'' \geq 0$.

2. **Преобразование ограничений.** Если какое–либо из ограничений имеет вид неравенства, то оно преобразуется в уравнение прибавлением (неравенство имеет тип ≤) к его левой части некоторой дополнительной неотрицательной переменной или вычитанием (неравенство имеет тип ≥) такой переменной из его левой части. Эти переменные называют **балансовыми.** Балансовые переменные входят в целевую функцию с коэффициентами нуль. Номера балансовым переменным присваиваются последовательно после уже имеющихся. Если, например, система ограничений имеет 5 переменных, то первая балансовая переменная будет $\mathbf{x_6}$, а вторая – $\mathbf{x_7}$.

Пример. Неравенство $2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 4$ преобразуется в уравнение $2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 4$ вычитанием из левой части балансовой переменной $\mathbf{x_4}$, где $x_4 \geq 0$. Неравенство $7x_1 + x_2 - 5x_3 + 10x_4 \leq 6$ преобразуется в уравнение $7x_1 + x_2 - 5x_3 + 10x_4 + x_5 = 6$ прибавлением к левой части балансовой переменной $\mathbf{x_5}$, где $x_5 \geq 0$.

3. **Преобразование целевой функции.** Если задана целевая функция на нахождение максимального значения, то вместо задачи $\mathbf{z \to max}$, будем рассматривать задачу $\mathbf{z' = -z \to min}$. Очевидно, что $\mathbf{max\ z = -min\ z'}$.

Пример. Преобразовать следующую задачу линейного программирования в каноническую форму

$$z = x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &\geq 5, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 7x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 - 12x_3 + x_4 &\leq 10, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_4 \leq 0.$$

Решение.

Вводим новые переменные $x_2' = -x_2$, $x_4' = -x_4$, где $x_2' \geq 0$ и $x_4' \geq 0$. Заменяем переменные $\mathbf{x_2}$ и $\mathbf{x_4}$ соответственно на $\mathbf{-x_2'}$ и $-x_4'$ в целевой функции и в ограничениях задачи. Заменяем переменную $\mathbf{x_3}$, на которую не накладываются ограничения по знаку, разностью неотрицательных переменных $\mathbf{x_3'}$ и $\mathbf{x_3''}$, то есть $x_3 = x_3' - x_3''$.

Первое и третье ограничения преобразуем в уравнение, вводя балансовые переменные $x_5 \ge 0$ и $x_6 \ge 0$. Получаем следующую систему ограничений:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2' + 3(x_3' - x_3'') + x_4' - x_5 = 5,\\
&x_1 - x_2' + 6(x_3' - x_3'') + 7x_4' = 2,\\
&x_1 - 3x_2' - 12(x_3' - x_3'') - x_4' + x_6 \le 10,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0,\ x_4' \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0.
\end{aligned}$$

Исходную целевую функцию преобразуем в целевую функцию на нахождение минимального значения следующим образом:

$$z' = -z = -x_1 - x_2' + (x_3' - x_3'') + 5x_4' \to \min.$$

Все переменные в преобразованной задаче неотрицательные. Таким образом, мы получили задачу в канонической форме.

Для перехода от канонической формы к стандартной можно каждое из уравнений заменить системой неравенств:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = a_i \to \begin{Bmatrix} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \ge a_i \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le a_i \end{Bmatrix}$$

Другой способ состоит в приведении системы уравнений к специальному виду и дальнейшему исключению некоторых переменных.

Пример. Преобразовать в стандартную форму следующую задачу линейного программирования.

$$\begin{aligned}
&z = x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \to \max;\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3,\\
&x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 7,\\
&\qquad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

Решение.

Данное преобразование будем проводить с помощью метода Жордана-Гаусса, выделяя в каждом уравнении базисную переменную. Исходную систему линейных уравнений перед преобразованием удобно записать в виде матрицы или таблицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right).$$

Вернёмся к первоначальной форме записи.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -4 + x_3 - 4x_4 \end{cases} \qquad (3.10)$$

Учитывая, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ из (3.10) получаем:

$$\begin{cases} -1 - x_3 - 3x_4 \geq 0 \\ -4 + x_3 - 4x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (3.11), \qquad \text{то есть:} \quad \begin{cases} -x_3 - 3x_4 \geq 1 \\ x_3 - 4x_4 \geq 4 \end{cases} \quad (3.12)$$

Далее в целевую функцию **z** подставляем выражения $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ из (3.10), получаем

$$z = (-1 - x_3 - 3x_4) + (-4 + x_3 - 4x_4) - x_3 - 3x_4 = -5 - x_3 - 10x_4.$$

Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования в стандартной форме

$$z = -x_3 - 10x_4 - 5 \ \to \ \max;$$
$$-x_3 - 3x_4 \geq 1,$$
$$x_3 - 4x_4 \geq 4,$$
$$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

3.3. Задачи

1. Преобразовать следующие задачи линейного программирования в каноническую форму.

3.1.01.	**3.1.02.**
$z = 3x_1 + 3x_2 \to \min;$ $3x_1 - 4x_2 \geq 7,$ $-x_2 \leq 0,$ $3x_1 - 4x_2 = 5,$ $2x_1 - 4x_2 \leq 7,$ $x_2 \geq 0.$	$z = 4x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$ $2x_1 + 2x_3 = 3,$ $x_2 = 6,$ $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 4,$ $x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$
3.1.03.	**3.1.04.**
$z = 2x_1 - x_2 \to \min;$ $-x_2 \leq 6,$ $-4x_2 \geq 7,$ $x_1 = 5,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$	$z = -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \min;$ $-3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 7,$ $4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8,$ $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8,$ $x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$
3.1.05.	**3.1.06.**
$z = -x_1 - 3x_3 \to \max;$ $4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6,$ $-4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 8,$ $x_1 + 2x_3 \geq 8,$ $x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$	$z = -3x_1 \to \max;$ $-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5,$ $-3x_1 - 2x_2 \geq 3,$ $-x_2 - 4x_3 \leq 7,$ $x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

3.1.07.	**3.1.08.**
$z = 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to max;$ $-3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8,$ $-4x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 0,$ $x_1 - 3x_2 \leq 4,$ $x_2 \geq 0.$	$z = 3x_1 \to max;$ $x_1 + 4x_2 \geq 8,$ $x_1 + x_2 \geq 4,$ $4x_1 - x_2 = 5,$ $4x_1 - 2x_2 \geq 7,$ $x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0.$
3.1.09.	**3.1.10.**
$z = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \to min;$ $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6,$ $2x_1 \geq 3,$ $-3x_2 + x_3 \leq 3,$ $3x_1 + x_2 + x_3 = 5,$ $x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$	$z = 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to min;$ $-x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 0,$ $3x_1 - x_2 - x_3 \geq 8,$ $3x_1 + 4x_3 \leq 7,$ $2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$
3.1.11.	**3.1.12.**
$z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to min;$ $-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3,$ $4x_1 + 2x_2 \leq 7,$ $2x_1 + 3x_3 = 5,$ $-2x_1 + 2x_2 = 5,$ $x_3 \geq 0.$	$z = 3x_1 + 3x_2 \to min;$ $-4x_2 = 6,$ $x_1 \leq 7,$ $-4x_1 \leq 5,$ $x_1 + x_2 \geq 7,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$
3.1.13.	**3.1.14.**
$z = -4x_1 + x_2 + 2x_3 \to min;$ $2x_3 \geq 8,$ $4x_1 + x_3 \leq 6,$ $-4x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6,$ $x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0.$	$z = 2x_1 + 2x_2 \to min;$ $4x_2 = 0,$ $4x_1 + 2x_2 = 4,$ $4x_1 + 4x_2 \geq 0,$ $x_2 \leq 0.$
3.1.15.	**3.1.16.**
$z = 3x_2 \to min;$ $3x_1 \geq 3,$ $-x_1 + x_2 = 0,$ $4x_1 = 7,$ $x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0.$	$z = 2x_1 \to max;$ $2x_1 - 4x_2 \leq 4,$ $2x_1 - 2x_2 \leq 8,$ $3x_1 + 4x_2 = 5,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$
3.1.17.	**3.1.18.**
$z = 2x_2 + 2x_3 \to min;$ $4x_1 + 2x_3 \leq 4,$ $-2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4,$ $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 6,$ $x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$	$z = x_2 \to max;$ $2x_1 + 4x_2 \geq 6,$ $-3x_1 + 2x_2 \geq 6,$ $4x_1 - x_2 \leq 4,$ $4x_2 = 5,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$
3.1.19.	**3.1.20.**
$z = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to max;$ $-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,$ $2x_2 + 3x_3 \geq 6,$ $3x_1 - x_2 + x_3 = 5,$ $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5,$ $x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$	$z = 2x_2 \to max;$ $2x_1 + x_2 = 3,$ $x_2 \geq 2,$ $3x_1 \geq 8,$ $2x_2 = 7,$ $x_1 \geq 0.$
3.1.21.	**3.1.22.**
$z = -x_1 + 2x_3 \to max;$ $2x_1 + x_2 - x_3 = 5,$ $4x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 0,$ $2x_2 + 4x_3 \geq 6,$ $x_2 + 2x_3 = 8,$ $x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$	$z = 3x_1 - 2x_2 \to max;$ $3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5,$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 0,$ $2x_1 + x_2 \geq 3,$ $x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$
3.1.23.	**3.1.24.**
$z = 3x_1 + 2x_2 \to max;$ $x_1 - 4x_2 \geq 5,$ $x_1 + 4x_2 \leq 6,$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 8,$ $4x_2 = 7,$ $x_2 \geq 0.$	$z = 4x_1 + x_2 \to max;$ $3x_1 \geq 7,$ $-2x_1 \leq 3,$ $-2x_1 + x_2 = 4,$ $x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0.$

3.1.25.	**3.1.26.**
$\begin{array}{l} z = 3x_2 + x_3 \to \min; \\ 3x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 7, \\ 4x_3 \ge 8, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 3x_1 - 4x_2 \to \max; \\ -3x_1 + 3x_2 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$
3.1.27.	**3.1.28.**
$\begin{array}{l} z = x_1 + x_2 \to \min; \\ -3x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -2x_2 \ge 5, \\ -4x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8, \\ 2x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$
3.1.29.	**3.1.30.**
$\begin{array}{l} z = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 8, \\ -x_1 + 3x_3 = 7, \\ 4x_2 \ge 5, \\ -4x_2 + 3x_3 \ge 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 3x_1 + x_2 \to \min; \\ 4x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 7, \\ x_1 - 3x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0. \end{array}$
3.1.31.	**3.1.32.**
$\begin{array}{l} z = 2x_1 - 3x_2 \to \min; \\ 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 4x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 + 4x_2 \ge 5, \\ 3x_1 \ge 8, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$
3.1.33.	**3.1.34.**
$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \max; \\ x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min; \\ -x_2 + x_3 \le 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0. \end{array}$
3.1.35.	**3.1.36.**
$\begin{array}{l} z = 2x_2 + 4x_3 \to \max; \\ -2x_1 \le 6, \\ -3x_1 - 3x_2 + 4x_3 \ge 6, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 \le 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 2x_1 - 2x_2 \to \min; \\ -4x_1 = 5, \\ -2x_1 + x_2 \ge 8, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1 \ge 0. \end{array}$
3.1.37.	**3.1.38.**
$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min; \\ x_2 + 2x_3 \ge 7, \\ x_1 + 2x_3 \le 7, \\ 4x_1 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 \le 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = -x_1 \to \min; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ -2x_1 \ge 5, \\ -4x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 3x_1 - 3x_2 = 4, \\ x_1 \ge 0. \end{array}$
3.1.39.	**3.1.40.**
$\begin{array}{l} z = 2x_2 - 3x_3 \to \max; \\ 2x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_3 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \le 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = x_1 - x_2 \to \max; \\ -4x_1 = 0, \\ 3x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 \le 8, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$
3.1.41.	**3.1.42.**
$\begin{array}{l} z = 3x_1 \to \min; \\ 4x_1 - x_2 \ge 5, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 3x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 3x_2 - 4x_3 \to \min; \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 8, \\ -x_1 - x_3 = 6, \\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$

3.1.43.

$$\begin{aligned} & z = x_1 + 2x_2 \to \min; \\ & 2x_1 - 4x_2 \ge 5, \\ & 2x_2 \le 7, \\ & 2x_1 = 4, \\ & 2x_1 = 7, \\ & x_1 \le 0,\ x_2 \le 0. \end{aligned}$$

3.1.44.

$$\begin{aligned} & z = 2x_1 + x_2 \to \max; \\ & 2x_1 - 3x_2 \le 7, \\ & 2x_1 + x_2 = 3, \\ & -2x_1 + 3x_2 = 3, \\ & x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.45.

$$\begin{aligned} & z = -x_2 \to \min; \\ & -x_1 \ge 2, \\ & 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ & 3x_2 \le 7, \\ & x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.46.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min; \\ & x_1 + 2x_3 \ge 7, \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ & -3x_1 + x_2 - x_3 \ge 5, \\ & x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.47.

$$\begin{aligned} & z = -3x_1 - 2x_3 \to \min; \\ & -3x_1 - 3x_3 \le 0, \\ & 3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 7, \\ & -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 0, \\ & x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.48.

$$\begin{aligned} & z = 2x_2 \to \max; \\ & 3x_1 + 4x_2 = 8, \\ & -2x_1 \ge 6, \\ & -x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ & -4x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.49.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max; \\ & -4x_1 + 4x_2 = 6, \\ & -4x_1 + x_2 - 4x_3 = 8, \\ & x_1 - 3x_2 - 4x_3 \ge 6, \\ & x_1 \le 0,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.50.

$$\begin{aligned} & z = 4x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max; \\ & -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7, \\ & -x_2 - 3x_3 = 0, \\ & 3x_1 \ge 0, \\ & 4x_1 - 3x_2 + x_3 \le 4, \\ & x_1 \ge 0,\ x_3 \le 0. \end{aligned}$$

3.1.51.

$$\begin{aligned} & z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min; \\ & 2x_1 + 2x_3 \le 3, \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ & 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 \le 6, \\ & x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.52.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 + 4x_2 \to \min; \\ & 4x_1 \le 5, \\ & x_1 - 3x_2 = 4, \\ & 3x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ & -3x_1 \le 8, \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0. \end{aligned}$$

3.1.53.

$$\begin{aligned} & z = 2x_1 \to \min; \\ & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ & 2x_1 - 3x_2 - x_3 \le 6, \\ & -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \\ & -2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ & x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0. \end{aligned}$$

3.1.54.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 + x_2 \to \min; \\ & -3x_1 - 4x_3 \le 5, \\ & x_2 - 2x_3 \le 2, \\ & 3x_1 + 3x_3 \le 7, \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.55.

$$\begin{aligned} & z = -x_2 \to \min; \\ & x_1 - 4x_2 \le 5, \\ & 4x_1 - 2x_2 \le 4, \\ & 4x_2 = 6, \\ & x_1 - 2x_2 \le 8, \\ & x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.56.

$$\begin{aligned} & z = 4x_2 \to \min; \\ & 3x_1 \ge 3, \\ & -4x_2 \ge 5, \\ & x_2 \ge 8, \\ & 3x_1 - 4x_2 = 6, \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0. \end{aligned}$$

3.1.57.

$$\begin{aligned} & z = 2x_1 + 4x_2 \to \min; \\ & -3x_1 \le 0, \\ & x_1 + x_2 \ge 6, \\ & 2x_1 = 6, \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0. \end{aligned}$$

3.1.58.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 \to \min; \\ & x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 4x_2 = 7, \\ & 2x_2 = 5, \\ & 3x_1 = 7, \\ & x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.59.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 - 4x_2 \to \max; \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 7, \\ & x_1 + 3x_2 = 8, \\ & -3x_1 \ge 6, \\ & x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.60.

$$\begin{aligned} & z = x_1 + 4x_2 \to \max; \\ & 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ & 3x_1 \le 5, \\ & -4x_1 + x_2 = 6, \\ & x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.1.61.	**3.1.62.**
$z = -3x_2 \rightarrow max;$ $2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 6,$ $2x_2 \le 4,$ $x_1 - 3x_2 - 3x_3 \le 4,$ $-x_2 - x_3 \le 8,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$	$z = -2x_1 \quad 2x_3 \rightarrow max;$ $-4x_3 \ge 8,$ $x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 5,$ $4x_1 - 2x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$
3.1.63.	**3.1.64.**
$z = 2x_1 + 3x_3 \rightarrow min;$ $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4,$ $-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 6,$ $x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 7,$ $-3x_1 - 3x_3 \ge 0,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$	$z = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \rightarrow max;$ $2x_1 = 5,$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 8,$ $-x_1 + 3x_3 \le 7,$ $-3x_1 + 2x_2 = 3,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$
3.1.65.	**3.1.66.**
$z = -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \rightarrow max;$ $4x_1 - x_2 - x_3 \le 6,$ $3x_2 - 4x_3 \ge 0,$ $4x_1 - x_2 \le 5,$ $x_1 \le 0,\ x_3 \ge 0.$	$z = 4x_2 \rightarrow min;$ $2x_1 + 3x_2 \ge 4,$ $-3x_2 \le 5,$ $x_1 \le 4,$ $x_1 \le 0.$
3.1.67.	**3.1.68.**
$z = 2x_1 + 4x_3 \rightarrow min;$ $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 4,$ $2x_1 - 3x_2 = 5,$ $-x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 5,$ $x_2 + x_3 = 2,$ $x_1 \le 0.$	$z = 2x_3 \rightarrow min;$ $x_1 + x_3 \le 5,$ $-3x_1 - 2x_2 = 4,$ $4x_1 - x_2 + 3x_3 \le 8,$ $x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$
3.1.69.	**3.1.70.**
$z = -2x_1 - 2x_2 \rightarrow min;$ $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4,$ $x_1 - 3x_2 - x_3 \le 5,$ $-x_1 + 2x_3 \le 6,$ $4x_1 - 2x_2 \ge 0,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$	$z = 3x_3 \rightarrow max;$ $2x_1 + x_3 = 8,$ $2x_2 + 3x_3 \ge 6,$ $x_1 - 4x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$
3.1.71.	**3.1.72.**
$z = 3x_2 \rightarrow max;$ $x_1 + 2x_2 \ge 3,$ $4x_2 = 4,$ $3x_1 + x_2 \ge 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0.$	$z = -4x_2 \rightarrow max;$ $3x_1 - x_2 = 6,$ $2x_1 + 4x_2 = 5,$ $x_2 = 3,$ $-2x_1 + 3x_2 \ge 4,$ $x_2 \ge 0.$
3.1.73.	**3.1.74.**
$z = 2x_2 \rightarrow max;$ $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 6,$ $3x_1 + x_2 + x_3 \ge 0,$ $x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$	$z = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow max;$ $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7,$ $3x_1 + 3x_3 \ge 5,$ $x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0.$
3.1.75.	**3.1.76.**
$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow min;$ $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3,$ $2x_1 \ge 4,$ $-x_1 + 2x_3 \le 3,$ $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 7,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$	$z = -2x_2 - 2x_3 \rightarrow min;$ $-x_1 + 2x_3 \ge 8,$ $-4x_2 + 3x_3 \ge 7,$ $4x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$
3.1.77.	**3.1.78.**
$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow min;$ $4x_2 + 2x_3 \ge 5,$ $-4x_1 \ge 6,$ $-2x_1 + x_2 - 4x_3 = 6,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$	$z = 4x_1 + 4x_3 \rightarrow max;$ $4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4,$ $-4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 7,$ $-4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 6,$ $x_1 \ge 0.$

3.1.79.	**3.1.80.**
$z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \min;$ $4x_1 = 4,$ $-4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4,$ $3x_2 + 3x_3 \geq 7,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$	$z = 4x_1 + 2x_2 \to \min;$ $3x_1 = 0,$ $x_1 + 4x_2 \geq 7,$ $3x_1 - 3x_2 \geq 8,$ $x_1 + 3x_2 \geq 5,$ $x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0.$
3.1.81.	**3.1.82.**
$z = x_1 + 2x_3 \to \min;$ $2x_2 - 3x_3 \leq 0,$ $-4x_2 \geq 8,$ $3x_1 + x_2 = 0,$ $2x_1 - x_2 - x_3 \geq 2,$ $x_2 \geq 0.$	$z = -2x_1 \to \min;$ $-4x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7,$ $x_1 \geq 3,$ $4x_1 - 2x_3 \geq 7,$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 6,$ $x_2 \leq 0.$
3.1.83.	**3.1.84.**
$z = -x_1 - 2x_3 \to \min;$ $x_3 = 5,$ $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0,$ $-x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5,$ $3x_2 \leq 6,$ $x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$	$z = 4x_2 \to \min;$ $-x_1 + x_2 = 3,$ $-3x_2 \geq 5,$ $3x_1 + x_2 \geq 4,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$
3.1.85.	**3.1.86.**
$z = x_1 + x_2 \to \max;$ $2x_1 + 3x_2 \geq 8,$ $4x_1 = 7,$ $3x_1 + 4x_2 \geq 7,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 8,$	$z = 4x_3 \to \min;$ $4x_1 + x_2 \leq 7,$ $-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 0,$ $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4,$ $-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7,$ $x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$
3.1.87.	**3.1.88.**
$z = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max;$ $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 7,$ $-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 0,$ $2x_2 \geq 3,$ $x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$	$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$ $x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 6,$ $3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3,$ $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \leq 3,$ $x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$
3.1.89.	**3.1.90.**
$z = x_3 \to \min;$ $-2x_1 + x_3 \geq 8,$ $x_1 + 2x_2 = 4,$ $x_1 + 3x_3 \geq 7,$ $-4x_1 - 2x_2 = 5,$ $x_2 \leq 0.$	$z = 3x_1 + x_2 \to \min;$ $-4x_1 \geq 8,$ $x_2 = 3,$ $2x_1 = 8,$ $x_2 \leq 0.$
3.1.91.	**3.1.92.**
$z = x_2 \to \min;$ $4x_2 \geq 4,$ $x_1 + 4x_2 = 7,$ $3x_1 + 2x_2 \geq 8,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$	$z = -2x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_3 = 4,$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6,$ $3x_1 - 2x_2 \leq 0,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$
3.1.93.	**3.1.94.**
$z = -x_2 + 3x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5,$ $-4x_2 - 4x_3 = 5,$ $x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 7,$ $2x_1 - x_2 \geq 2,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$	$z = 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max;$ $-2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4,$ $x_1 + 3x_3 = 5,$ $x_2 + x_3 \geq 5,$ $x_2 - 2x_3 = 7,$ $x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$
3.1.95.	**3.1.96.**
$z = -x_1 + x_2 \to \max;$ $2x_1 = 5,$ $-3x_1 + 3x_3 \geq 5,$ $3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 7,$ $x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$	$z = 3x_1 - 3x_2 \to \max;$ $4x_1 + 2x_2 = 8,$ $3x_2 \geq 3,$ $4x_1 + 4x_2 \geq 7,$ $x_1 \geq 0.$

3.1.97.	3.1.98.
$z = 2x_1 - 3x_2 \to \min;$ $4x_1 + 4x_2 \ge 0,$ $-4x_1 + 4x_2 \le 4,$ $3x_1 + 2x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0.$	$z = x_2 \to \min;$ $3x_1 + x_2 \ge 0,$ $x_1 - 2x_2 \le 7,$ $4x_2 = 6,$ $3x_1 + 3x_2 = 3,$ $x_2 \ge 0.$
3.1.99.	**3.1.00.**
$z = -3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $4x_2 - x_3 \le 8,$ $4x_1 - x_2 - x_3 \le 4,$ $2x_1 = 4,$ $x_2 \le 0,\ x_3 \le 0.$	$z = 2x_1 - x_2 \to \min;$ $3x_1 + 3x_2 \ge 0,$ $2x_1 = 6,$ $3x_1 + 2x_2 \ge 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0.$

2. Преобразовать следующие задачи линейного программирования в стандартную форму.

3.2.01.	3.2.02.
$z = 3x_2 - 3x_4 \to \min;$ $2x_3 - 4x_5 = 4,$ $x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 6,$ $x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_3 + 2x_4 + 4x_5 \to \max;$ $x_1 - 2x_3 + x_5 = 6,$ $-3x_1 + 2x_2 - x_4 = 4,$ $-4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.03.	**3.2.04.**
$z = -3x_1 - 4x_3 + 4x_5 \to \max;$ $2x_1 - 4x_3 + x_4 = 5,$ $-x_2 - 3x_3 + x_5 = 8,$ $3x_1 + 4x_2 - 3x_5 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 4x_1 - 4x_3 \to \min;$ $-x_1 + x_2 + 4x_5 = 0,$ $x_1 + x_3 + x_4 = 4,$ $-4x_4 + x_5 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.05.	**3.2.06.**
$z = -x_1 + 2x_4 - 2x_5 \to \max;$ $-3x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 7,$ $3x_1 + 2x_3 + x_5 = 4,$ $x_2 + 3x_4 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$ $x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 6,$ $2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
3.2.07.	**3.2.08.**
$z = x_2 + 3x_4 + x_5 \to \max;$ $x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6,$ $2x_2 + x_3 - x_4 = 5,$ $2x_1 + 3x_4 - 4x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max;$ $x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6,$ $4x_3 + 3x_4 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
3.2.09.	**3.2.10.**
$z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max;$ $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,$ $4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$ $-x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 7,$ $2x_2 - 4x_5 = 6,$ $2x_1 + x_3 + x_4 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.11.	**3.2.12.**
$z = -x_3 + 4x_5 \to \min;$ $x_2 + 2x_4 = 4,$ $-3x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 4,$ $2x_1 - 3x_3 + x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to \max;$ $x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5,$ $x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

3.2.13.	**3.2.14.**
$z = x_2 + 3x_4 - 4x_5 \to \min;$ $x_1 - 2x_4 - x_5 = 2,$ $3x_1 + x_3 + x_5 = 7,$ $x_2 - 4x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 3x_1 + 2x_4 \to \min;$ $-2x_1 + 4x_3 = 7,$ $x_2 - 4x_3 + 4x_5 = 7,$ $3x_1 + x_4 + x_5 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.15.	**3.2.16.**
$z = -x_2 + 2x_4 \to \max;$ $3x_1 + x_2 + x_3 = 6,$ $x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 7,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max;$ $x_2 + 4x_3 = 4,$ $-4x_1 - 4x_3 + x_5 = 4,$ $-2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.17.	**3.2.18.**
$z = -3x_1 + 4x_3 \to \max;$ $4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 7,$ $4x_1 - x_2 + 3x_5 = 4,$ $4x_3 + x_4 + 3x_5 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_2 - 3x_3 - 3x_5 \to \max;$ $2x_2 + x_4 + 2x_5 = 6,$ $3x_1 - 3x_5 = 7,$ $-4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.19.	**3.2.20.**
$z = 3x_1 - 3x_2 - 4x_4 \to \min;$ $-2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5,$ $x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -2x_1 + 3x_4 + 3x_5 \to \min;$ $2x_1 + 2x_4 = 7,$ $2x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 4,$ $x_2 + 3x_3 + x_5 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.21.	**3.2.22.**
$z = 4x_1 + 3x_2 - x_4 \to \min;$ $2x_2 - 4x_3 + x_4 = 5,$ $-4x_1 + 3x_2 + x_5 = 6,$ $4x_1 - 4x_3 + 4x_5 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max;$ $x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 8,$ $-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
3.2.23.	**3.2.24.**
$z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 \to \max;$ $3x_1 + 3x_2 = 5,$ $2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -2x_1 - 2x_2 + 4x_4 \to \min;$ $3x_1 + 2x_2 = 3,$ $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
3.2.25.	**3.2.26.**
$z = 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \min;$ $x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$ $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -4x_1 + 4x_2 + x_5 \to \min;$ $3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6,$ $x_1 + 4x_3 - x_5 = 6,$ $3x_2 + 3x_4 + 4x_5 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.27.	**3.2.28.**
$z = 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \to \max;$ $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 4,$ $2x_2 + 2x_4 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -x_3 + 3x_4 + 4x_5 \to \max;$ $3x_2 + 2x_4 = 6,$ $x_1 - 4x_2 + x_5 = 6,$ $x_3 + 4x_4 - x_5 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.29.	**3.2.30.**
$z = x_2 + x_4 + 2x_5 \to \min;$ $2x_2 - 4x_4 + x_5 = 5,$ $x_2 + x_3 + x_4 = 5,$ $x_1 + 2x_5 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_1 - 2x_4 \to \min;$ $x_2 + 3x_5 = 7,$ $x_1 + 3x_3 + 4x_5 = 5,$ $x_2 + 4x_3 + x_4 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.2.31.

$$\begin{aligned} z &= -3x_2 + x_3 + x_5 \to \max; \\ & x_2 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ & x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 7, \\ & x_3 + x_5 = 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.32.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 2x_4 \to \min; \\ & x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ & 2x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.33.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 \to \min; \\ & -x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.34.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min; \\ & x_2 + 3x_5 = 4, \\ & 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 4, \\ & x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.35.

$$\begin{aligned} z &= -x_1 - x_3 + 3x_4 \to \max; \\ & -4x_2 + x_5 = 0, \\ & x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ & 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.36.

$$\begin{aligned} z &= -2x_2 - 2x_3 + 4x_5 \to \max; \\ & -3x_1 - 2x_2 + 4x_5 = 0, \\ & -3x_1 + x_2 = 5, \\ & x_3 + x_4 - 3x_5 = 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.37.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min; \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ & 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.38.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 2x_4 \to \max; \\ & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7, \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.39.

$$\begin{aligned} z &= 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max; \\ & -4x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ & 3x_1 - 3x_2 = 6, \\ & x_1 + x_4 + x_5 = 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.40.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \min; \\ & 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ & 4x_1 + 4x_2 = 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.41.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 2x_5 \to \max; \\ & 4x_2 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ & 4x_1 + x_2 + 4x_4 = 0, \\ & 4x_1 + x_3 = 7, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.42.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 4x_2 + 4x_4 \to \min; \\ & -2x_1 + x_3 + x_5 = 7, \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ & 3x_2 + x_4 - 3x_5 = 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.43.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max; \\ & x_1 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ & x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.44.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max; \\ & 2x_1 - 2x_3 - x_4 = 8, \\ & -3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.45.

$$\begin{aligned} z &= 4x_2 + 2x_4 + 2x_5 \to \max; \\ & 4x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 6, \\ & -2x_1 + x_3 + 4x_5 = 0, \\ & 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.46.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + x_2 + 2x_4 \to \min; \\ & x_1 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ & 4x_2 - 3x_3 + x_5 = 8, \\ & 4x_2 - x_4 + 3x_5 = 7, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.47.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 4x_3 + 3x_5 \to \min; \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ & -2x_2 + x_4 = 5, \\ & 3x_1 - 3x_3 + x_5 = 7, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.48.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - x_5 \to \min; \\ & -2x_3 - x_5 = 0, \\ & 2x_1 + 4x_3 + 4x_5 = 4, \\ & -3x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.49.

$$\begin{aligned} z &= 2x_2 + 4x_4 + 2x_5 \to \max; \\ & x_2 + x_3 + x_5 = 5, \\ & -x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ & x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.50.

$$\begin{aligned} z &= 4x_3 - 3x_4 - x_5 \to \min; \\ & 3x_1 + x_3 - 3x_4 = 5, \\ & 4x_1 + x_2 = 6, \\ & 2x_4 + x_5 = 0, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.51.

$$\begin{aligned} z = x_3 + 4x_4 - 2x_5 &\to \min; \\ 4x_4 + x_5 &= 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 7, \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.52.

$$\begin{aligned} z = 3x_3 - x_4 + 3x_5 &\to \min; \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7, \\ -4x_2 + 4x_5 &= 6, \\ x_1 - 4x_4 + 4x_5 &= 0, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.53.

$$\begin{aligned} z = 4x_2 + 4x_5 &\to \min; \\ x_2 + x_4 &= 8, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 &= 7, \\ x_1 - 3x_3 + 2x_5 &= 0, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.54.

$$\begin{aligned} z = -x_1 + 2x_2 + x_5 &\to \min; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= 5, \\ 4x_3 + 4x_4 &= 7, \\ x_2 + 4x_3 + x_5 &= 4, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.55.

$$\begin{aligned} z = 3x_1 - 4x_2 + 2x_5 &\to \max; \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 7, \\ 4x_2 + 3x_4 + 2x_5 &= 6, \\ x_1 + 4x_4 &= 7, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.56.

$$\begin{aligned} z = 2x_1 - x_3 &\to \max; \\ -3x_3 + x_4 - 4x_5 &= 6, \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6, \\ 2x_1 + x_5 &= 3, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.57.

$$\begin{aligned} z = 3x_2 + 4x_3 - x_4 &\to \max; \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 8, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 &= 6, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3.2.58.

$$\begin{aligned} z = -x_3 + x_4 &\to \min; \\ x_2 + 2x_4 &= 5, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_5 &= 4, \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 4, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.59.

$$\begin{aligned} z = x_3 + 4x_4 - x_5 &\to \min; \\ -x_4 + x_5 &= 7, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.60.

$$\begin{aligned} z = 4x_2 + x_4 &\to \min; \\ 3x_1 + 4x_4 &= 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3.2.61.

$$\begin{aligned} z = x_3 - x_4 &\to \max; \\ -x_1 + x_3 + x_5 &= 6, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ x_2 + 4x_3 - 2x_5 &= 6, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.62.

$$\begin{aligned} z = -4x_2 - 4x_3 + 3x_5 &\to \min; \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 &= 3, \\ x_1 + x_5 &= 5, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 &= 5, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.63.

$$\begin{aligned} z = 3x_1 + 4x_3 - 3x_5 &\to \min; \\ -4x_3 + 4x_4 &= 0, \\ -2x_2 + 4x_4 + x_5 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.64.

$$\begin{aligned} z = x_1 - 4x_2 - 3x_4 &\to \max; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 8, \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 5, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3.2.65.

$$\begin{aligned} z = -4x_3 + x_4 - x_5 &\to \max; \\ x_4 + 2x_5 &= 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6, \\ 4x_2 + x_3 + 4x_5 &= 4, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

3.2.66.

$$\begin{aligned} z = -3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 &\to \min; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -3x_1 + x_3 + x_4 &= 6, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3.2.67.

$$\begin{aligned} z = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &\to \max; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 6, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3.2.68.

$$\begin{aligned} z = 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 &\to \min; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 4x_2 &= 4, \end{aligned}$$
$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

3.2.69.	3.2.70.
$z = -x_1 - 3x_4 + 4x_5 \to \max;$ $-2x_3 - x_4 + 2x_5 = 5,$ $x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 8,$ $x_1 + 2x_3 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 4x_1 - 4x_2 - 4x_4 \to \max;$ $4x_2 - 2x_3 = 5,$ $-2x_2 - 2x_4 + x_5 = 3,$ $x_1 + x_3 + x_4 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.71.	**3.2.72.**
$z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min;$ $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7,$ $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 2x_1 - x_4 + 4x_5 \to \max;$ $3x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 7,$ $-x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 5,$ $x_2 + 2x_3 + x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.73.	**3.2.74.**
$z = 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min;$ $2x_1 + 3x_3 = 5,$ $-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 3x_2 + x_3 - 2x_5 \to \min;$ $2x_1 - 4x_2 + 4x_5 = 0,$ $4x_2 + x_4 = 0,$ $-x_1 + x_3 - 2x_5 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.75.	**3.2.76.**
$z = 4x_2 - 4x_3 - x_5 \to \max;$ $-3x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 0,$ $-x_3 + x_4 + x_5 = 2,$ $x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_1 + 2x_4 + x_5 \to \min;$ $4x_1 + 2x_2 = 7,$ $4x_1 + 4x_2 + x_5 = 7,$ $x_3 + x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.77.	**3.2.78.**
$z = 2x_2 + x_5 \to \max;$ $3x_1 + x_2 + x_4 = 4,$ $-4x_1 + x_2 + 2x_5 = 5,$ $x_3 - 3x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 \to \min;$ $4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6,$ $2x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
3.2.79.	**3.2.80.**
$z = x_2 - 4x_5 \to \min;$ $-x_1 + 2x_2 - 3x_5 = 6,$ $x_2 + x_3 - 2x_4 = 8,$ $4x_1 + 3x_4 - 3x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -4x_3 + x_4 - x_5 \to \min;$ $4x_4 - 4x_5 = 4,$ $x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 5,$ $x_2 + x_3 + 4x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.81.	**3.2.82.**
$z = -3x_3 + 3x_4 \to \max;$ $x_1 - 4x_3 + x_4 = 7,$ $x_2 + x_3 = 6,$ $2x_2 - 3x_4 + x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -4x_1 - 4x_5 \to \max;$ $x_1 + x_3 - 3x_4 = 8,$ $4x_2 + x_3 = 7,$ $2x_2 - 2x_4 + x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.83.	**3.2.84.**
$z = 4x_1 + 4x_2 - 2x_4 \to \max;$ $x_4 - x_5 = 8,$ $x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$ $4x_2 + 3x_3 + x_5 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -x_1 + 4x_2 + 3x_4 \to \max;$ $x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 5,$ $-x_1 + x_4 + 2x_5 = 8,$ $4x_1 - 4x_3 - 2x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
3.2.85.	**3.2.86.**
$z = -3x_2 + x_4 \to \max;$ $2x_1 + x_3 + x_5 = 8,$ $x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 4,$ $x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 3,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_1 + 3x_4 + 4x_5 \to \min;$ $3x_1 + 2x_3 - x_5 = 5,$ $3x_1 + x_3 + x_4 = 4,$ $x_2 - 3x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.2.87.

$$\begin{aligned} z = -x_1 + 4x_2 + x_4 &\to \min;\\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0,\\ -3x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 7,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.88.

$$\begin{aligned} z = 3x_1 - 3x_2 - x_4 &\to \min;\\ -2x_2 + 3x_5 &= 3,\\ x_1 + x_4 + 3x_5 &= 7,\\ 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.89.

$$\begin{aligned} z = 4x_2 + 2x_3 - x_5 &\to \min;\\ x_2 + x_5 &= 4,\\ -3x_1 - x_3 + 4x_4 &= 6,\\ -3x_1 + 3x_3 + x_4 &= 5,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.90.

$$\begin{aligned} z = -2x_1 + x_3 + 3x_5 &\to \min;\\ x_4 + x_5 &= 5,\\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4,\\ x_2 + x_3 - 3x_5 &= 5,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.91.

$$\begin{aligned} z = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 &\to \max;\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 6,\\ 3x_1 - 4x_4 &= 5,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.92.

$$\begin{aligned} z = 3x_2 + 4x_3 - x_4 &\to \min;\\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3,\\ 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 8,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.93.

$$\begin{aligned} z = -4x_1 + 3x_2 + 2x_4 &\to \min;\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4,\\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8,\\ -4x_1 + 3x_4 + x_5 &= 6,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.94.

$$\begin{aligned} z = 3x_2 + 3x_4 - x_5 &\to \min;\\ 4x_2 + x_4 + 3x_5 &= 5,\\ -2x_1 + x_3 &= 4,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_5 &= 4,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.95.

$$\begin{aligned} z = -4x_1 + 4x_3 - 2x_5 &\to \max;\\ x_1 + 3x_5 &= 4,\\ x_2 + 3x_4 + 4x_5 &= 4,\\ 4x_1 + x_3 + 3x_4 &= 5,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.96.

$$\begin{aligned} z = x_1 + 4x_2 - 2x_4 &\to \max;\\ x_1 - 3x_3 + x_4 &= 5,\\ 4x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0,\\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_5 &= 7,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.97.

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\to \min;\\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 7,\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3.2.98.

$$\begin{aligned} z = 3x_2 - x_4 - 2x_5 &\to \max;\\ x_1 + 4x_3 - 3x_5 &= 5,\\ x_3 - 4x_4 &= 8,\\ x_2 + x_4 - x_5 &= 5,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.99.

$$\begin{aligned} z = 4x_1 - x_3 + 3x_5 &\to \max;\\ 4x_2 - 2x_4 + 4x_5 &= 8,\\ -x_2 + 4x_3 + 3x_5 &= 6,\\ x_1 + 4x_3 + 4x_4 &= 6,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

3.2.00.

$$\begin{aligned} z = -x_2 + 4x_3 - 2x_4 &\to \max;\\ x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= 8,\\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 6,\\ 2x_2 + 2x_4 + x_5 &= 0,\\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

Тема 4. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Графический метод их решения

4.1. Геометрическая интерпретация

Определение 1. Значения неизвестных переменных, удовлетворяющие всем ограничениям задачи линейного программирования, называются **допустимыми значениями переменных или планами**.

Определение 2. Множество всех планов задачи линейного программирования называется **областью допустимых значений переменных (ОДЗ).**

Определение 3. План задачи линейного программирования, при котором целевая функция принимает минимальное (или максимальное) значение на ОДЗ называется **оптимальным.**

Рассмотрим построение ОДЗ на плоскости в двухмерном пространстве. Имеем следующее неравенство:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_1.$$

Геометрическим решением такого неравенства является полуплоскость. Для определения данной полуплоскости необходимо построить прямую, которая разбивает всю плоскость на две полуплоскости. Этой разделяющей прямой соответствует следующее уравнение:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1.$$

Для построения прямой необходимо знать две точки. Если $b_1 \neq 0$, то ими будут точки пересечения с осями координат.

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = b_1/a_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = b_1/a_1 \end{cases}.$$

Если $b_1=0$, то искомая прямая проходит через начало координат, и, следовательно, первой точкой является точка (0,0). Необходимо определить вторую точку. Для этого присваивается какое-либо значение любой из переменных и с помощью данного уравнения вычисляется значение другой переменной. Через полученные две точки проводится прямая. Её целесообразно отметить номером соответствующего ограничения.

Теперь необходимо определить, какая из двух полученных полуплоскостей удовлетворяет нашему неравенству. Выбирается любая точка на одной из полуплоскостей. Она не должна принадлежать разделяющей прямой. Координаты данной точки подставляются в неравенство. Если неравенство истинное, то данная полуплоскость и будет геометрическим решением неравенства. В противном случае, геометрическим решением неравенства будет противоположная полуплоскость.

Найденная полуплоскость отмечается штрихами.

Аналогично находятся геометрические решения всех ограничений задачи. Областью допустимых значений будет многоугольник, полученный с помощью пересечения всех полуплоскостей.

Таким образом, геометрически решить задачу линейного программирования означает найти среди всех точек ОДЗ такую точку (точки), при которой (которых) целевая функция принимает своё экстремальное значение.

Рассмотрим целевую функцию $z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix}$.

Запишем целевую функцию в векторной форме, в виде скалярного произведения векторов

$$z = (\bar{c}; \bar{x}) \to \min(\max), \text{ где } \bar{c} = (c_1; c_2) \text{ и } \bar{x} = (x_1; x_2). \qquad (*)$$

Вектор $\bar{c}$ называется направляющим вектором или градиентом целевой функции.

$$\bar{c} = \text{grad}\,(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = (c_1; c_2).$$

Поскольку целевая функция линейная, то частные производные равны коэффициентам целевой функции при соответствующих переменных. Направляющий вектор показывает направление скорейшего возрастания целевой функции.

Если присвоить целевой функции некоторое значение, то она геометрически будет определять некую прямую линию. Присваивая **z** различные значения, мы будем иметь семейство параллельных прямых, которые называются изоцелями целевой функции.

Рассмотрим взаимное расположение направляющего вектора и изоцелей. Если в (*) положить z = 0, то скалярное произведение векторов будет равно нулю, что означает перпендикулярность векторов. Таким образом, все изоцели перпендикулярны направляющему вектору.

Определение. Прямая называется опорной к множеству **М**, если она имеет с множеством **М** хотя бы одну общую точку и все точки множества **М** расположены по одну сторону от этой прямой.

Построим произвольную изоцель, проходящую через область допустимых значений переменных. При решении задачи на нахождение максимального значения целевой функции исходную изоцель необходимо мысленно перемещать в направлении направляющего вектора, пока она не станет опорной. При нахождении минимального значения изоцель необходимо перемещать в противоположном направлении.

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая трёх переменных. В этом случае изоцелями будут плоскости, геометрическим решением неравенств будут полупространства, ОДЗ будет многогранником.

Так как трёхмерное пространство необходимо изображать на плоскости в двухмерном пространстве, то геометрически можно представить и найти решения только наиболее простых задач с тремя переменными.

4.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод является наглядным и простым методом решения задач линейного программирования. Однако область его применения ограничена размерностью задачи. Если задача представлена в стандартной форме, то количество переменных должно быть не более трёх. Если исходная представлена в канонической форме, то она должна быть предварительно преобразована к стандартной форме.

Можно оценить возможность решения такой задачи. Пусть задача в канонической форме имеет **n** переменных и **m** ограничений. Задача может быть решена графическим методом, если $n - m \le 3$, когда все уравнения системы линейно независимы или в общем случае, если $n - r \le 3$, где r – количество линейно независимых уравнений, или ранг матрицы, состоящей из коэффициентов при переменных в уравнениях системы ограничений.

Алгоритм графического метода

1. Проверяется находится ли исходная ЗЛП в стандартной форме, если нет, то задачу необходимо преобразовать к стандартной форме.

2. Определяется количество неизвестных переменных. Если это количество больше трёх, то задача не может быть решена графическим методом. Существуют другие эффективные методы решения таких задач.

3. Строится область допустимых значений переменных для ЗЛП.

4. Строится направляющий вектор $\bar{c}$.

5. Перпендикулярно направляющему вектору через ОДЗ проводится исходная изоцель.

6. Проводится мысленное перемещение исходной изоцели в направлении вектора $\bar{c}$, если определяется максимальное значение целевой функции или в противоположном направлении, если определяется её минимальное значение, до тех пор, пока изоцель не станет опорной к ОДЗ. Точки пересечения опорной изоцели и ОДЗ и будут оптимальными точками задачи.

7. Для определения координат оптимальной точки, необходимо решить систему соответствующих линейных уравнений.

8. Для нахождения оптимального значения целевой функции, необходимо оптимальные значения переменных подставить в целевую функцию и вычислить её значение.

Пример. Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$$z = x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min).$$

$$2x_1 - x_2 \le 9,$$
$$3x_1 - x_2 \ge 0,$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 13,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение.

Задача находится в стандартной форме и имеет две переменные и, следовательно, может быть решена графическим методом.

Строим ОДЗ для переменных задачи.

1. $2x_1 - x_2 = 9$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -9 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 9/2 \\ x_2 = 0. \end{cases}$

По этим двум точкам строим прямую. Определяем, какая из полуплоскостей является решением данного неравенства. Для этого подставляем координаты любой точки, не принадлежащей прямой, в первое неравенство. Для простоты вычислений возьмём точку (0;0). Получим: $2 \times 0 - 0 \le 9$. Такое неравенство является истинным и, следовательно, полуплоскость, на которой расположена точка (0;0), является искомой.

2. $3x_1 - x_2 = 0$ Данная прямая проходит через начало координат, поэтому необходимо взять одну точку (0;0), а вторую – любую другую, удовлетворяющую данному уравнению. Например, точку (1;3).

3. $-x_1 + 3x_2 = 13$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 13/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -13 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

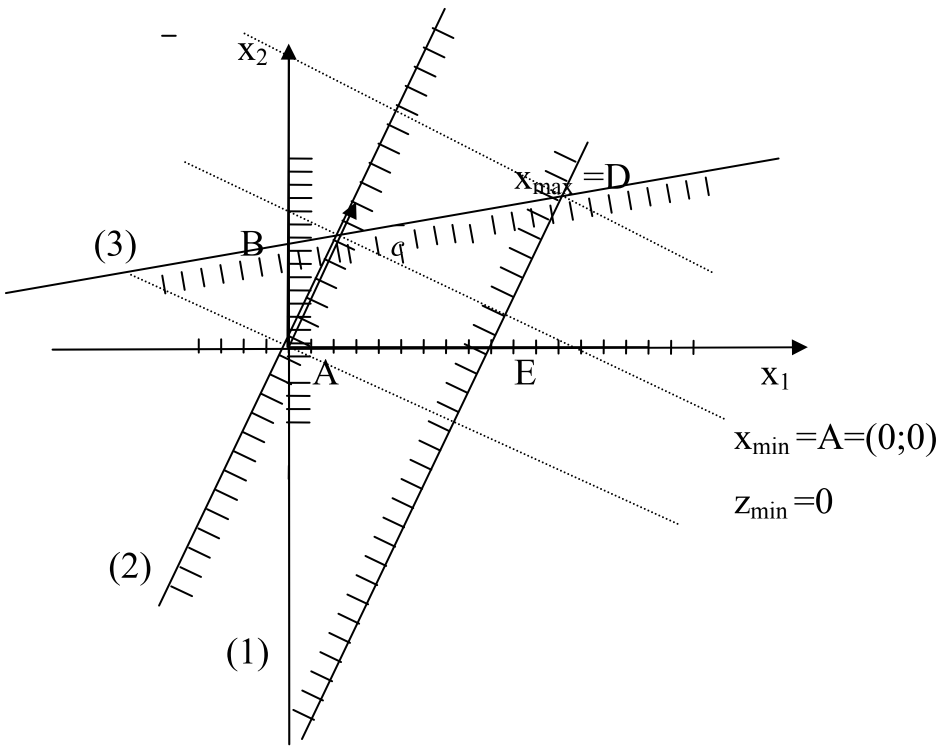
4. $x_1 \ge 0$ – это правая полуплоскость системы координат.

5. $x_2 \ge 0$ – это верхняя полуплоскость системы координат.

Найдём пересечение всех построенных полуплоскостей. Это будет многоугольник ABDE.

Построим направляющий вектор $\bar{c} = (1;3)$ и исходную изоцель. Сначала решаем задачу на нахождение максимального значения целевой функции. Для этого мысленно перемещаем изоцель в направлении градиента целевой функции. Она станет опорной в точке D. Решая систему из двух соответствующих уравнений, находим оптимальные значения переменных: $D = X_{max} = (8;7)$, $z_{max} = 29$.

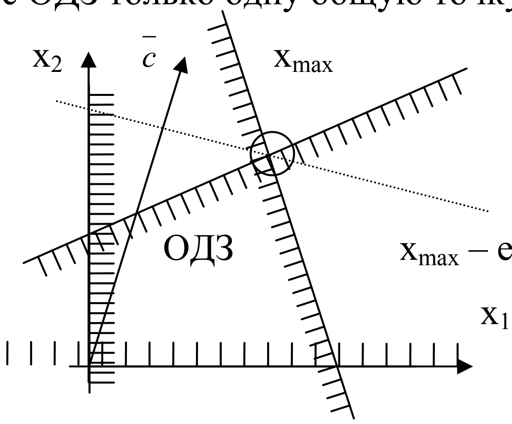
Для решения задачи на нахождение минимального значения целевой функции перемещаем исходную изоцель в направлении противоположном градиенту целевой функции.. Изоцель станет опорной в точке (0;0). Таким образом, $x_{min} = A = (0;0)$, $z_{min} = 0$.



4.3. Типы оптимальных решений задач линейного программирования при решении графическим методом

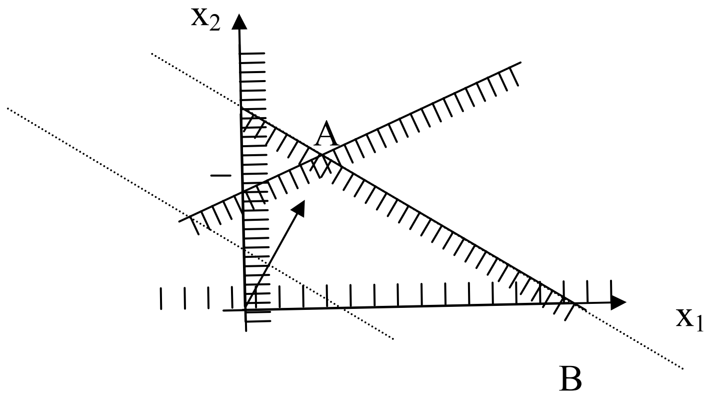
При решении задач линейного программирования графическим методом возможны следующие случаи.

1. Единственность оптимального решения. В этом случае опорная изоцель имеет с ОДЗ только одну общую точку.



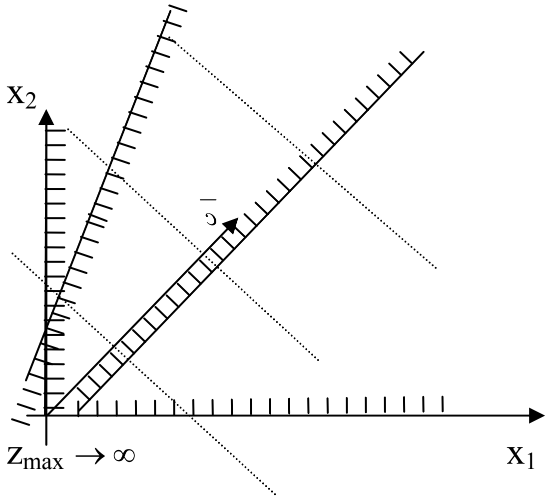
x_{max} – единственная оптимальная точка

2. Альтернативный оптимум (множество оптимальных решений). В этом случае опорная изоцель совпадает с одной из сторон ОДЗ многоугольника в двухмерном пространстве, а в трёхмерном пространстве с одной из граней многогранника.

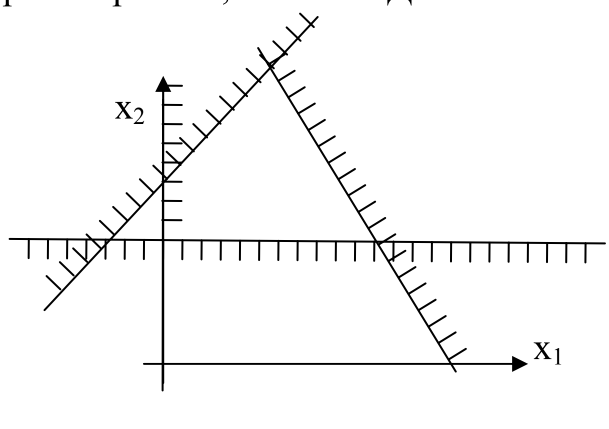


В данном случае целевая функция достигает своего максимального значения в любой точке отрезка [A;B]: $x_{max} \in [A;B]$ и записывается в виде выпуклой комбинации $x_{max} = \lambda \cdot A + (1-\lambda)\cdot B$, $0 \le \lambda \le 1$.

3. Задача линейного программирования не имеет оптимального решения, так как целевая функция не ограничена сверху, если требуется найти максимум целевой функции (или снизу, если требуется найти минимум).

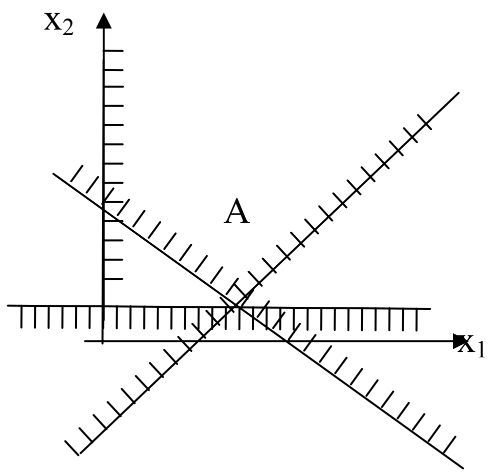


4. Задача линейного программирования не имеет решения, так как система ограничений противоречива, то есть ОДЗ=$\varnothing$.



ОДЗ=$\varnothing$.

5. Если ОДЗ состоит из одной точки, то в этой точке **z** принимает своё максимальное и минимальное значение.



$x_{max} = x_{min} = A$

4.4. Задачи

1. Решить следующие задачи линейного программирования графическим методом.

4.1.01.	**4.1.02.**	**4.1.03.**
$z = 2x_1 + x_2 \to \max;$ $-4x_2 \le 7,$ $2x_1 + 2x_2 \ge 0,$ $2x_1 - 4x_2 \le 8,$ $-4x_1 + 4x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	$z = 2x_2 \to \min;$ $-x_1 + x_2 \ge 7,$ $-3x_1 + 3x_2 \le 3,$ $3x_1 + 3x_2 \le 3,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -x_2 \to \min;$ $4x_1 \le 5,$ $4x_2 \le 7,$ $4x_1 + 4x_2 \le 6,$ $3x_1 - 2x_2 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.04.	**4.1.05.**	**4.1.06.**
$z = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 5,$ $4x_1 + 2x_2 \le 8,$ $-3x_1 \le 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 2x_1 \to \min;$ $x_1 - 4x_2 \ge 7,$ $-4x_1 + 4x_2 \le 0,$ $x_1 + 3x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 \to \min;$ $x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $x_1 + 2x_2 \ge 8,$ $2x_1 - x_2 \ge 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.07.	**4.1.08.**	**4.1.09.**
$z = 2x_1 + 4x_2 \to \min;$ $x_1 - 3x_2 \le 8,$ $-4x_1 + 2x_2 \ge 5,$ $-2x_1 + 2x_2 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -4x_1 \to \max;$ $4x_2 \le 6,$ $-4x_2 \le 8,$ $3x_1 + 4x_2 \ge 0,$ $-3x_1 + x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 \to \max;$ $4x_1 + 2x_2 \le 4,$ $4x_1 + 3x_2 \le 5,$ $2x_1 - x_2 \le 4,$ $3x_1 + 2x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.10.	**4.1.11.**	**4.1.12.**
$z = 4x_1 + 4x_2 \to \min;$ $-3x_1 + 2x_2 \le 7,$ $4x_1 - 2x_2 \le 7,$ $3x_2 \ge 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + 2x_2 \to \min;$ $4x_1 \ge 0,$ $2x_1 + 3x_2 \ge 6,$ $-x_1 + 3x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$ $3x_2 \le 4,$ $2x_1 - 2x_2 \le 6,$ $2x_1 + 3x_2 \le 6,$ $4x_1 + 2x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.13.	**4.1.14.**	**4.1.15.**
$z = -4x_1 \to \max;$ $2x_1 \ge 8,$ $4x_1 + 2x_2 \le 4,$ $-x_1 + 3x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + 4x_2 \to \min;$ $x_2 \le 6,$ $x_1 + 2x_2 \le 8,$ $-2x_2 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -4x_2 \to \min;$ $-4x_1 + 3x_2 \le 5,$ $4x_1 + 3x_2 \ge 6,$ $3x_1 \le 3,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.16.	**4.1.17.**	**4.1.18.**
$z = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$ $3x_1 + 3x_2 \ge 4,$ $2x_1 + 4x_2 \le 5,$ $x_1 + 3x_2 \le 6,$ $x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 4x_1 - x_2 \to \min;$ $4x_2 \le 5,$ $2x_1 + 4x_2 \le 0,$ $2x_1 \le 3,$ $-4x_1 + 2x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -4x_1 + 4x_2 \to \min;$ $x_1 - 3x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 7,$ $4x_1 + x_2 \ge 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4.1.19.	**4.1.20.**	**4.1.21.**
$z = x_2 \to \min;$ $3x_1 + 4x_2 \ge 8,$ $x_1 - 2x_2 \le 0,$ $-2x_1 + 4x_2 \ge 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -3x_2 \to \max;$ $4x_1 - 2x_2 \ge 5,$ $3x_1 + x_2 \le 5,$ $4x_1 + x_2 \ge 4,$ $-4x_1 + 4x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -x_2 \to \max;$ $4x_1 - x_2 \ge 5,$ $x_1 + 4x_2 \le 8,$ $-3x_1 + 3x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.22.	**4.1.23.**	**4.1.24.**
$z = -3x_2 \to \min;$ $3x_2 \ge 6,$ $3x_1 \le 4,$ $x_1 + 2x_2 \ge 2,$ $3x_1 \le 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_2 \to \min;$ $2x_2 \le 5,$ $x_1 + 4x_2 \le 7,$ $2x_1 + x_2 \ge 3,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -3x_1 + x_2 \to \min;$ $x_1 + 4x_2 \le 6,$ $3x_1 + 4x_2 \le 4,$ $4x_1 + 4x_2 \le 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.25.	**4.1.26.**	**4.1.27.**
$z = 4x_1 \to \min;$ $-3x_1 + 2x_2 \le 3,$ $2x_1 + 3x_2 \ge 4,$ $x_1 - 3x_2 \le 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$ $3x_2 \ge 5,$ $-2x_2 \le 8,$ $x_1 - 4x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + 3x_2 \to \min;$ $-4x_1 + x_2 \le 7,$ $x_1 + 2x_2 \le 5,$ $x_1 + 3x_2 \ge 0,$ $2x_1 + x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.28.	**4.1.29.**	**4.1.30.**
$z = 3x_1 - 3x_2 \to \min;$ $-3x_1 + 2x_2 \le 3,$ $3x_1 + x_2 \le 5,$ $x_1 + x_2 \ge 1,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 - x_2 \to \min;$ $x_1 + 2x_2 \le 5,$ $4x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $-x_1 + x_2 \le 6,$ $4x_1 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -2x_1 + 2x_2 \to \min;$ $x_1 \le 5,$ $3x_2 \ge 6,$ $2x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.31.	**4.1.32.**	**4.1.33.**
$z = x_1 + 3x_2 \to \min;$ $-x_1 + 4x_2 \ge 6,$ $-3x_2 \le 4,$ $2x_1 + x_2 \le 8,$ $3x_1 - 3x_2 \ge 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \ge 0,$ $4x_2 \le 4,$ $3x_1 + 4x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + 4x_2 \to \max;$ $-x_1 \le 6,$ $x_1 + 4x_2 \le 6,$ $x_1 - 3x_2 \le 5,$ $-2x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.34.	**4.1.35.**	**4.1.36.**
$z = 2x_1 - x_2 \to \min;$ $-4x_1 + 4x_2 \le 6,$ $-x_1 + 3x_2 \le 5,$ $3x_1 - x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -4x_1 + 4x_2 \to \max;$ $x_1 + x_2 \le 7,$ $2x_1 \le 4,$ $3x_1 \ge 3,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -4x_2 \to \max;$ $-x_1 \ge 4,$ $2x_1 + x_2 \ge 5,$ $-3x_2 \ge 8,$ $-2x_1 + 4x_2 \ge 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.37.	**4.1.38.**	**4.1.39.**
$z = 3x_1 \to \max;$ $2x_1 \le 7,$ $x_1 + 2x_2 \ge 5,$ $4x_1 \le 4,$ $3x_2 \ge 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 4x_1 - x_2 \to \min;$ $3x_1 - 2x_2 \ge 3,$ $x_1 \ge 5,$ $-4x_1 + 4x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 4,$ $4x_1 - 2x_2 \ge 4,$ $4x_1 + 3x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.40.	**4.1.41.**	**4.1.42.**
$z = -4x_1 \to \max;$ $4x_1 \ge 5,$ $2x_1 + 4x_2 \le 7,$ $x_2 \le 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 2x_2 \to \min;$ $-3x_1 + 2x_2 \ge 3,$ $2x_1 - 3x_2 \le 5,$ $x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 - 4x_2 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \le 5,$ $x_1 + x_2 \le 4,$ $3x_1 \ge 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.43.	**4.1.44.**	**4.1.45.**
$z = -4x_1 + 2x_2 \to \min;$ $x_1 - 3x_2 \le 3,$ $3x_1 - 4x_2 \le 4,$ $-3x_1 + 2x_2 \ge 7,$ $3x_1 + 4x_2 \ge 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$ $2x_2 \ge 5,$ $2x_1 - 3x_2 \le 7,$ $4x_1 + 3x_2 \ge 8,$ $-3x_1 + x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 \to \max;$ $x_2 \ge 4,$ $2x_1 + x_2 \le 7,$ $4x_1 - x_2 \le 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4.1.46.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 \to \min; \\ -3x_1 + 4x_2 &\ge 6, \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 5, \\ 3x_1 &\le 3, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.47.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 \to \min; \\ 3x_1 - x_2 &\le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ -4x_1 + 3x_2 &\ge 6, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.48.

$$\begin{aligned} z &= -4x_2 \to \max; \\ 4x_1 &\le 6, \\ x_1 + 3x_2 &\ge 4, \\ 2x_2 &\ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.49.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - 2x_2 \to \max; \\ 2x_1 - 3x_2 &\ge 4, \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 4, \\ 4x_1 + 3x_2 &\ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.50.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - x_2 \to \min; \\ x_1 - x_2 &\le 3, \\ -3x_1 &\le 4, \\ -4x_1 + x_2 &\le 7, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.51.

$$\begin{aligned} z &= -3x_2 \to \min; \\ 2x_1 &\ge 4, \\ 2x_1 &\le 6, \\ x_1 + 2x_2 &\le 7, \\ 2x_1 - x_2 &\le 5, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.52.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 - 3x_2 \to \min; \\ 2x_2 &\le 5, \\ -3x_1 + 3x_2 &\ge 0, \\ -4x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.53.

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 4x_2 &\le 4, \\ x_1 + 3x_2 &\le 3, \\ 4x_1 - 2x_2 &\le 7, \\ x_1 + 3x_2 &\le 6, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.54.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 4x_2 \to \min; \\ x_1 + x_2 &\ge 6, \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 7, \\ 4x_2 &\le 7, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.55.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 \to \max; \\ 2x_2 &\le 8, \\ 4x_1 - x_2 &\le 5, \\ 3x_1 - 3x_2 &\le 5, \\ 4x_1 - 2x_2 &\ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.56.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 \to \max; \\ -4x_1 + 3x_2 &\le 4, \\ -x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ 2x_1 &\le 6, \\ x_1 + 3x_2 &\ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.57.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 \to \min; \\ 3x_2 &\ge 3, \\ -2x_2 &\le 7, \\ -x_1 + x_2 &\ge 4, \\ 2x_1 - 4x_2 &\le 8, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.58.

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 4x_2 \to \max; \\ -4x_1 + 2x_2 &\ge 6, \\ -x_2 &\le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 4, \\ 4x_1 - 2x_2 &\le 8, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.59.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + x_2 \to \min; \\ x_1 + 3x_2 &\ge 5, \\ 4x_1 - 4x_2 &\le 6, \\ 4x_1 - x_2 &\le 6, \\ x_1 + 3x_2 &\ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.60.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 4x_2 \to \min; \\ -4x_1 + x_2 &\ge 4, \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 7, \\ 4x_1 + x_2 &\le 7, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.61.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 \to \min; \\ -4x_1 + 2x_2 &\ge 6, \\ 4x_1 &\ge 4, \\ 3x_1 - 4x_2 &\le 0, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.62.

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 3x_2 \to \max; \\ -x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ 3x_1 - 3x_2 &\le 0, \\ 3x_2 &\ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.63.

$$\begin{aligned} z &= x_1 \to \max; \\ x_2 &\le 3, \\ 4x_1 + x_2 &\ge 7, \\ x_1 - 3x_2 &\le 3, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.64.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 2x_2 \to \min; \\ 2x_1 &\le 2, \\ -x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ 3x_1 - 4x_2 &\le 8, \\ x_1 - 3x_2 &\le 4, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.65.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - x_2 \to \max; \\ -4x_1 + 4x_2 &\le 8, \\ 4x_1 + 3x_2 &\ge 6, \\ -2x_1 + 3x_2 &\le 0, \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.66.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 \to \max; \\ 3x_2 &\ge 4, \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 7, \\ -2x_1 + 2x_2 &\ge 6, \\ 2x_1 &\le 6, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.67.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 2x_2 \to \max; \\ 2x_2 &\le 4, \\ 2x_1 &\le 6, \\ x_1 + 3x_2 &\le 4, \\ 4x_2 &\le 6, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.68.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - 2x_2 \to \min; \\ 2x_2 &\ge 2, \\ 2x_2 &\le 6, \\ x_1 - x_2 &\ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.69.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 \to \min; \\ 4x_1 + 2x_2 &\ge 5, \\ -4x_1 + 4x_2 &\ge 5, \\ -3x_1 + 4x_2 &\ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.70.

$$\begin{aligned} z &= -2x_2 \to \min; \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 &\ge 3, \\ -2x_1 + x_2 &\le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 0, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.71.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \to \min; \\ -3x_2 &\le 5, \\ -4x_1 + 4x_2 &\le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.72.

$$\begin{aligned} z &= x_2 \to \max; \\ 3x_2 &\ge 6, \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 4, \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 7, \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 6, \\ x_1 \ge 0,\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4.1.73.	4.1.74.	4.1.75.
$z = -2x_2 \to \min;$ $x_2 \le 5,$ $x_1 - 4x_2 \ge 5,$ $-3x_2 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -4x_1 + 4x_2 \to \max;$ $-3x_1 + 2x_2 \le 4,$ $-x_1 + 4x_2 \le 7,$ $4x_1 + 4x_2 \ge 7,$ $x_1 + 4x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -3x_1 + 2x_2 \to \min;$ $-4x_1 + 3x_2 \le 8,$ $x_1 + 4x_2 \le 6,$ $3x_2 \le 5,$ $3x_1 + x_2 \le 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.76.	**4.1.77.**	**4.1.78.**
$z = 3x_1 + 3x_2 \to \min;$ $4x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 2,$ $-3x_2 \le 3,$ $4x_1 + 3x_2 \ge 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 - 3x_2 \to \max;$ $4x_1 + 3x_2 \ge 7,$ $4x_1 \le 0,$ $4x_1 - 3x_2 \le 0,$ $x_1 + x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 5,$ $-2x_1 \le 0,$ $4x_1 \ge 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.79.	**4.1.80.**	**4.1.81.**
$z = -x_1 + 4x_2 \to \min;$ $4x_1 + 3x_2 \ge 0,$ $x_1 - 3x_2 \le 6,$ $4x_1 + 4x_2 \le 4,$ $x_1 + 3x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 4x_1 + 4x_2 \to \max;$ $3x_2 \le 7,$ $2x_1 + 4x_2 \le 6,$ $-2x_1 \le 3,$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -2x_1 + x_2 \to \min;$ $2x_1 - 4x_2 \le 4,$ $-x_1 + 3x_2 \le 5,$ $4x_1 \ge 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.82.	**4.1.83.**	**4.1.84.**
$z = x_1 + 3x_2 \to \min;$ $-4x_1 + 4x_2 \ge 6,$ $4x_1 + 4x_2 \ge 7,$ $-4x_1 + 3x_2 \ge 4,$ $-2x_1 + 4x_2 \ge 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_2 \to \min;$ $x_1 - 4x_2 \le 0,$ $4x_1 - 3x_2 \le 8,$ $4x_1 + 2x_2 \ge 5,$ $-3x_1 + 3x_2 \ge 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -3x_1 \to \max;$ $3x_2 \ge 4,$ $2x_1 + x_2 \ge 4,$ $-4x_1 + 3x_2 \le 4,$ $-3x_1 + x_2 \ge 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.85.	**4.1.86.**	**4.1.87.**
$z = 4x_1 + 3x_2 \to \min;$ $2x_2 \le 3,$ $4x_1 + 3x_2 \ge 8,$ $-4x_1 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -x_2 \to \min;$ $-2x_1 + 4x_2 \ge 6,$ $-x_1 + 4x_2 \ge 7,$ $2x_1 - x_2 \le 3,$ $3x_1 + x_2 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 4x_2 \to \min;$ $-x_1 + 4x_2 \ge 8,$ $4x_2 \le 8,$ $3x_1 - x_2 \le 3,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.88.	**4.1.89.**	**4.1.90.**
$z = x_1 + x_2 \to \max;$ $2x_1 - 4x_2 \le 6,$ $x_2 \le 1,$ $3x_2 \le 6,$ $x_1 + 3x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + x_2 \to \min;$ $4x_1 - 4x_2 \le 7,$ $4x_1 - x_2 \le 8,$ $-2x_1 + 4x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 - x_2 \to \max;$ $-4x_1 \le 7,$ $-x_1 + x_2 \ge 6,$ $4x_1 - 3x_2 \le 6,$ $4x_1 - 2x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.91.	**4.1.92.**	**4.1.93.**
$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + 4x_2 \ge 7,$ $x_1 + x_2 \le 7,$ $3x_1 - x_2 \le 8,$ $x_1 + 3x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 \le 4,$ $-3x_1 + 4x_2 \le 5,$ $2x_1 + x_2 \ge 0,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 4x_1 + 3x_2 \to \min;$ $x_1 \ge 0,$ $4x_2 \ge 5,$ $3x_1 + x_2 \ge 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.94.	**4.1.95.**	**4.1.96.**
$z = -4x_1 + 2x_2 \to \max;$ $3x_1 - x_2 \ge 7,$ $-4x_1 + 3x_2 \le 4,$ $2x_1 \ge 2,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$ $2x_2 \le 2,$ $3x_1 - 4x_2 \ge 4,$ $x_1 + 4x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 - 3x_2 \to \min;$ $4x_1 \ge 8,$ $4x_1 - 3x_2 \le 8,$ $x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
4.1.97.	**4.1.98.**	**4.1.99.**
$z = 4x_1 + 4x_2 \to \max;$ $-3x_2 \le 4,$ $2x_1 + 4x_2 \le 5,$ $-4x_1 \ge 8,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = -2x_2 \to \min;$ $4x_1 - 3x_2 \ge 7,$ $2x_1 - x_2 \le 7,$ $2x_1 + 4x_2 \ge 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + 4x_2 \to \max;$ $x_1 + 3x_2 \le 6,$ $3x_1 - x_2 \le 6,$ $4x_1 + 3x_2 \ge 6,$ $-3x_1 + 3x_2 \le 6,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4.1.00.
$z = 2x_1 \to \max;$ $4x_1 + 3x_2 \le 7,$ $3x_1 + 4x_2 \ge 5,$ $3x_1 - 4x_2 \le 4,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. Решить следующие задачи линейного программирования графическим методом, предварительно преобразовав их к стандартному виду.

4.2.01.	**4.2.02.**
$z = x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max;$ $-2x_1 + 4x_3 = 4,$ $2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -2x_2 - 3x_3 + 4x_5 \to \max;$ $4x_1 - x_2 + 4x_5 = 7,$ $3x_3 + x_4 - x_5 = 6,$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.03.	**4.2.04.**
$z = -x_3 - 4x_4 - 2x_5 \to \min;$ $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 2,$ $x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0,$ $2x_1 + x_3 + 3x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -3x_4 - 4x_5 \to \max;$ $4x_4 - x_5 = 4,$ $-3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 4,$ $x_1 + x_2 - 3x_3 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.05.	**4.2.06.**
$z = -3x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max;$ $3x_1 - 3x_2 + x_4 = 7,$ $3x_1 + x_3 + x_5 = 7,$ $-x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -x_1 - 2x_2 + 4x_4 \to \min;$ $3x_1 + 4x_3 + 2x_5 = 5,$ $4x_1 + x_4 + x_5 = 7,$ $x_2 + 4x_3 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.07.	**4.2.08.**
$z = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \max;$ $-4x_1 + 4x_3 + x_5 = 6,$ $2x_1 - x_3 + 2x_4 = 0,$ $x_2 + 2x_4 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_4 + 4x_5 \to \min;$ $-3x_1 + 4x_3 + 2x_5 = 6,$ $2x_1 + x_2 - 3x_4 = 6,$ $x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.09.	**4.2.10.**
$z = 3x_3 - 2x_5 \to \max;$ $3x_1 + x_2 + x_4 = 5,$ $-3x_1 + 3x_3 + x_5 = 6,$ $4x_3 + 4x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -2x_1 + 4x_2 + 2x_5 \to \min;$ $2x_2 + 2x_4 = 0,$ $2x_3 + 3x_4 + x_5 = 6,$ $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.11.	**4.2.12.**
$z = 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \to \max;$ $3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4,$ $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \to \min;$ $-x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5,$ $-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
4.2.13.	**4.2.14.**
$z = -3x_1 + 3x_2 - 3x_4 \to \min;$ $x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0,$ $-x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 2x_4 - 3x_5 \to \max;$ $-3x_1 + x_3 + 3x_5 = 7,$ $-2x_3 + x_4 + 2x_5 = 7,$ $3x_1 + x_2 + 4x_4 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.15.	**4.2.16.**
$z = -4x_2 + x_4 \to \min;$ $3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 4,$ $x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 6,$ $3x_2 + x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max;$ $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 7,$ $3x_2 + 3x_4 = 3,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

4.2.17.

$$\begin{aligned} z &= x_2 + x_3 + x_5 \to \min; \\ 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 7, \\ -4x_2 + 2x_3 - 2x_5 &= 6, \\ x_1 + 3x_2 &= 5, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.18.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min; \\ 2x_2 + 3x_3 &= 8, \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.19.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min; \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.20.

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 3x_3 + x_5 \to \min; \\ -2x_1 - x_4 - x_5 &= 7, \\ x_2 - 4x_4 &= 7, \\ -4x_1 + x_3 + 3x_5 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.21.

$$\begin{aligned} z &= -4x_2 - 3x_3 - 2x_5 \to \min; \\ 4x_1 + 4x_2 + x_5 &= 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3, \\ -2x_3 + x_4 &= 8, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.22.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_4 + 2x_5 \to \min; \\ x_1 + 4x_3 - 2x_5 &= 7, \\ -4x_2 + x_4 + x_5 &= 5, \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.23.

$$\begin{aligned} z &= -4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \min; \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_4 &= 5, \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 &= 7, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.24.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + x_3 + 3x_4 \to \min; \\ x_2 + x_3 - 3x_5 &= 8, \\ 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 8, \\ x_1 + x_4 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.25.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_4 &= 7, \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.26.

$$\begin{aligned} z &= 2x_2 - 2x_4 + 2x_5 \to \min; \\ -4x_2 + 3x_4 + x_5 &= 7, \\ 2x_3 + 4x_4 &= 7, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.27.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 2x_3 + x_5 \to \max; \\ x_2 - 4x_3 + x_5 &= 6, \\ 3x_1 + 4x_4 + 4x_5 &= 8, \\ 4x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.28.

$$\begin{aligned} z &= 3x_2 + x_3 + 3x_5 \to \min; \\ 2x_3 + 4x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 &= 5, \\ -4x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.29.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min; \\ 3x_1 + x_3 - 3x_4 &= 4, \\ 2x_3 + x_5 &= 4, \\ -4x_1 + x_2 - 4x_4 &= 8, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.30.

$$\begin{aligned} z &= x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 \to \min; \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 5, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.31.

$$\begin{aligned} z &= 4x_2 - x_3 + 4x_5 \to \min; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - 2x_4 + x_5 &= 0, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.32.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 - 3x_3 \to \max; \\ x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.33.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max; \\ -4x_1 - 4x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.34.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + x_2 + 4x_4 \to \min; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.35.	**4.2.36.**
$z = 4x_1 + 3x_4 - x_5 \to \max;$ $x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 6,$ $4x_1 - x_3 - x_4 = 5,$ $-4x_1 - 2x_3 + 3x_5 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_2 + x_3 + 2x_5 \to \min;$ $x_2 + 2x_3 + x_4 = 7,$ $-x_1 - x_3 + x_5 = 0,$ $4x_1 + x_2 + 3x_5 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.37.	**4.2.38.**
$z = 2x_1 + x_2 + 2x_5 \to \max;$ $3x_3 - x_4 - x_5 = 0,$ $2x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 4,$ $x_1 - x_2 - x_4 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \to \min;$ $x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7,$ $-4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
4.2.39.	**4.2.40.**
$z = x_1 + 2x_2 + 2x_4 \to \max;$ $x_2 + x_3 = 7,$ $3x_1 + x_4 + x_5 = 7,$ $2x_1 + 4x_2 + x_4 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max;$ $4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6,$ $x_1 - 4x_4 = 0,$ $x_2 - x_3 + x_5 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.41.	**4.2.42.**
$z = -x_1 - 3x_3 + 2x_5 \to \min;$ $-x_2 + x_3 + x_5 = 3,$ $2x_1 + x_3 + 4x_4 = 4,$ $4x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -x_1 + x_4 - 2x_5 \to \min;$ $4x_2 + x_3 = 4,$ $4x_2 - 3x_4 + 4x_5 = 0,$ $x_1 + 3x_4 + 3x_5 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.43.	**4.2.44.**
$z = 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \min;$ $x_2 - 3x_3 - 3x_5 = 3,$ $x_1 + 4x_4 - 4x_5 = 5,$ $x_3 + 4x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_3 + 2x_4 + 4x_5 \to \min;$ $x_1 - 3x_4 = 0,$ $-x_2 + x_4 - x_5 = 4,$ $-x_2 + x_3 - 2x_5 = 2,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.45.	**4.2.46.**
$z = 3x_2 - 3x_3 + 4x_5 \to \min;$ $x_1 + x_5 = 3,$ $-2x_1 + x_2 + x_4 = 4,$ $x_3 + 4x_5 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 3x_1 - 3x_4 - 2x_5 \to \min;$ $-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7,$ $-3x_2 + x_4 - 2x_5 = 0,$ $-2x_1 + 3x_3 + 3x_5 = 7,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.47.	**4.2.48.**
$z = -2x_2 + 4x_3 + 4x_5 \to \min;$ $3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5,$ $4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5,$ $3x_1 - 2x_4 + x_5 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -2x_1 + 3x_3 - 4x_4 \to \max;$ $2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6,$ $3x_1 + x_2 + x_5 = 8,$ $4x_1 - x_3 - 3x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.49.	**4.2.50.**
$z = -4x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 \to \min;$ $-2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6,$ $-3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 4x_3 + x_4 - 4x_5 \to \min;$ $x_1 - x_2 + 4x_3 = 5,$ $-x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 6,$ $x_2 + x_4 + 2x_5 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.51.	**4.2.52.**
$z = 3x_2 + 2x_4 \to \min;$ $-2x_1 + x_2 + x_5 = 5,$ $x_2 + 2x_3 + x_4 = 5,$ $x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min;$ $3x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 7,$ $-x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

4.2.53.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 \to \min;\\ &x_2 + x_3 + x_4 = 7,\\ &4x_1 + 2x_3 = 6,\\ &-4x_1 + 4x_4 + x_5 = 4,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.54.

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min;\\ &3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6,\\ &2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 7,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.55.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 2x_4 + 2x_5 \to \min;\\ &2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0,\\ &-4x_1 + 3x_3 - x_5 = 5,\\ &-4x_1 - 3x_2 + x_5 = 5,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.56.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 4x_4 \to \min;\\ &4x_1 + 2x_5 = 8,\\ &x_1 + x_3 + 2x_5 = 6,\\ &x_2 + x_4 = 5,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.57.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_3 + 3x_4 \to \min;\\ &-3x_2 - 2x_4 + x_5 = 6,\\ &-3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0,\\ &2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.58.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_4 + 3x_5 \to \max;\\ &3x_2 - 4x_4 = 4,\\ &x_4 + x_5 = 8,\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.59.

$$\begin{aligned} z &= -4x_3 + 2x_5 \to \min;\\ &-2x_3 + x_4 + 3x_5 = 3,\\ &x_1 + 4x_2 + 2x_5 = 4,\\ &2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.60.

$$\begin{aligned} z &= -3x_3 - x_4 \to \max;\\ &-4x_2 + x_4 + 3x_5 = 4,\\ &2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,\\ &4x_1 - 2x_4 + x_5 = 5,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.61.

$$\begin{aligned} z &= 3x_2 - 3x_4 - 4x_5 \to \min;\\ &4x_2 - x_4 = 7,\\ &x_1 + x_3 + 3x_4 = 6,\\ &2x_2 + x_5 = 8,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.62.

$$\begin{aligned} z &= -x_1 + x_4 \to \max;\\ &-2x_1 + x_4 + x_5 = 7,\\ &3x_1 - x_2 - 2x_5 = 7,\\ &x_2 + x_3 = 5,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.63.

$$\begin{aligned} z &= 4x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;\\ &-4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7,\\ &-x_3 + 3x_4 + x_5 = 3,\\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 0,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.64.

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 3x_3 - 3x_4 \to \min;\\ &x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,\\ &2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.65.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 - x_2 + 3x_5 \to \max;\\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5,\\ &x_4 + 4x_5 = 4,\\ &4x_1 + x_3 + 4x_5 = 4,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.66.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - 2x_3 \to \max;\\ &-3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6,\\ &4x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,\\ &3x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 5,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.67.

$$\begin{aligned} z &= -x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to \min;\\ &x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 5,\\ &x_3 + x_5 = 7,\\ &4x_1 + x_2 - 3x_4 = 6,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.68.

$$\begin{aligned} z &= -x_1 + 2x_2 \to \max;\\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8,\\ &-3x_2 + x_3 + 4x_4 = 4,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

4.2.69.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 2x_3 \to \max;\\ &-3x_2 + x_3 = 5,\\ &-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4,\\ &2x_1 - 2x_4 + x_5 = 4,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.70.

$$\begin{aligned} z &= 4x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max;\\ &x_1 - x_4 = 6,\\ &x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 7,\\ &x_3 + 2x_4 + x_5 = 8,\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

4.2.71.	**4.2.72.**
$z = 3x_1 + 3x_4 + x_5 \to \max;$ $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6,$ $3x_1 + 4x_3 + 3x_5 = 8,$ $-4x_2 + x_4 + 2x_5 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to \max;$ $-3x_2 + x_3 + 4x_4 = 8,$ $x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
4.2.73.	**4.2.74.**
$z = 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max;$ $4x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 6,$ $x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0,$ $2x_1 + 3x_2 + x_5 = 7,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 3x_1 + x_2 + 3x_4 \to \max;$ $x_2 + x_3 = 7,$ $x_1 + x_4 = 3,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
4.2.75.	**4.2.76.**
$z = -x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min;$ $3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4,$ $2x_2 - 4x_3 + x_5 = 6,$ $x_1 - 4x_4 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 \to \min;$ $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,$ $-4x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 5,$ $-x_3 - 2x_4 + x_5 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.77.	**4.2.78.**
$z = 3x_1 + 2x_4 \to \min;$ $x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7,$ $x_1 + 3x_3 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 3x_1 + 3x_4 + x_5 \to \max;$ $3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6,$ $3x_1 + 3x_2 = 8,$ $-x_3 + x_4 + x_5 = 3,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.79.	**4.2.80.**
$z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max;$ $3x_1 - 4x_3 + 3x_4 = 7,$ $2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max;$ $3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6,$ $-x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
4.2.81.	**4.2.82.**
$z = -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max;$ $x_4 + x_5 = 7,$ $4x_1 + 3x_2 = 6,$ $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_2 + 3x_4 + 2x_5 \to \min;$ $x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7,$ $2x_1 - x_4 + x_5 = 0,$ $4x_1 + 3x_3 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.83.	**4.2.84.**
$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max;$ $3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 6,$ $-4x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -3x_1 - 4x_2 + 2x_5 \to \max;$ $x_2 + 2x_3 + 4x_5 = 7,$ $x_1 + 3x_3 + x_4 = 8,$ $2x_2 + 2x_5 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.85.	**4.2.86.**
$z = 3x_3 + 4x_4 + x_5 \to \min;$ $x_1 + x_3 = 7,$ $x_2 + 3x_4 - 3x_5 = 4,$ $4x_4 - 2x_5 = 0,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_3 + x_4 + x_5 \to \min;$ $-x_1 + x_3 + 4x_4 = 6,$ $-x_1 - 2x_2 = 8,$ $-3x_2 + 3x_4 + x_5 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$
4.2.87.	**4.2.88.**
$z = -3x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \max;$ $x_2 + x_3 + x_4 = 8,$ $-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6,$ $-2x_1 + x_5 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$ $4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

4.2.89.

$$
\begin{aligned}
z = -2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &\to \max;\\
2x_3 + x_5 &= 6,\\
2x_1 + 3x_3 - x_5 &= 0,\\
x_1 + x_2 + x_4 &= 7,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.90.

$$
\begin{aligned}
z = 4x_3 + x_5 &\to \max;\\
-4x_2 + 3x_3 - 4x_5 &= 6,\\
3x_1 + 3x_2 + x_5 &= 8,\\
-3x_1 + 4x_3 + x_4 &= 5,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.91.

$$
\begin{aligned}
z = -2x_2 + 2x_3 - x_5 &\to \max;\\
x_3 + 3x_4 + x_5 &= 5,\\
-2x_1 - x_2 + 2x_4 &= 4,\\
2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.92.

$$
\begin{aligned}
z = -3x_2 - 2x_3 + 3x_5 &\to \max;\\
x_1 + x_3 &= 3,\\
4x_1 + 3x_2 + x_4 &= 5,\\
-3x_2 + x_4 + x_5 &= 6,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.93.

$$
\begin{aligned}
z = -3x_1 + 4x_3 + x_4 &\to \min;\\
x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 8,\\
3x_1 + 4x_5 &= 5,\\
2x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.94.

$$
\begin{aligned}
z = 4x_1 + x_3 - x_4 &\to \max;\\
-x_1 + x_2 + x_5 &= 3,\\
x_4 - 4x_5 &= 8,\\
4x_1 + x_3 &= 7,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.95.

$$
\begin{aligned}
z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 &\to \min;\\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8,\\
2x_2 + x_4 + 3x_5 &= 0,\\
-2x_1 - 3x_4 - 4x_5 &= 8,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.96.

$$
\begin{aligned}
z = -3x_1 - x_2 - 3x_4 &\to \min;\\
3x_1 + 2x_2 - 3x_5 &= 6,\\
2x_2 + x_4 + 3x_5 &= 4,\\
-2x_1 + x_3 &= 6,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.97.

$$
\begin{aligned}
z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 &\to \min;\\
-3x_3 + x_4 + x_5 &= 6,\\
x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 6,\\
4x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 8,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.98.

$$
\begin{aligned}
z = 4x_1 + x_3 + 3x_4 &\to \min;\\
x_1 + x_2 + 4x_4 &= 7,\\
3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 7,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.
\end{aligned}
$$

4.2.99.

$$
\begin{aligned}
z = -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\to \max;\\
4x_4 + x_5 &= 8,\\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 4,\\
3x_1 + x_4 + x_5 &= 6,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

4.2.00.

$$
\begin{aligned}
z = -2x_1 + 3x_3 + 3x_4 &\to \min;\\
3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 4,\\
x_4 + 2x_5 &= 5,\\
-3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7,\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

Тема 5. Решение задач линейного программирования симплексным методом

Если задача линейного программирования имеет значительное количество переменных, то она не может быть решена графическим методом. Для решения таких задач используются другие методы, в частности метод последовательного «улучшения» решения задачи – **симплексный метод (или симплекс-метод).**

5.1. Свойства решений задач линейного программирования

Симплекс–метод основан на ряде следующих теорем.

Теорема 1. *О множестве планов задачи линейного программирования* Множество всех планов задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Доказательство.

Возьмём два произвольных плана задачи линейного программирования и докажем, что любая точка, являющаяся выпуклой комбинацией данных планов, также будет её планом. Запишем ограничения задачи в матричном виде.

$$A \cdot \overline{x} = \overline{A_0},$$
$$\overline{x} \geq 0, \quad где:$$

А – матрица коэффициентов при переменных в ограничениях задачи;

A_0 – вектор правых частей ограничений задачи.

Возьмём два произвольных плана $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$.

$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$
$A \cdot \overline{x_1} = \overline{A_0}$	$A \cdot \overline{x_2} = \overline{A_0}$
$\overline{x_1} \geq 0.$	$\overline{x_2} \geq 0.$

План, являющийся выпуклой комбинацией данных точек, запишется в следующем виде:

$$\overline{x} = \lambda \cdot \overline{x_1} + (1-\lambda) \cdot \overline{x_2}, 0 \leq \lambda \leq 1. \qquad (*)$$

Подставим данную точку в левую часть системы ограничений

$$A \cdot \overline{x} = A \cdot (\lambda \cdot \overline{x_1} + (1-\lambda) \cdot \overline{x_2}) = \lambda \cdot \underbrace{A \cdot \overline{x_1}}_{A_0} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{A \cdot \overline{x_2}}_{A_0} = A_0 \cdot (\lambda + 1 - \lambda) = A_0.$$

Полученная точка $\overline{x}$ удовлетворяет ограничениям задачи. Остаётся доказать неотрицательность координат точки $\overline{x}$.

Рассмотрим выпуклую комбинацию (*). Так как $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – планы задачи по предположению, то их координаты неотрицательные.

Так как скаляры λ и $(1-\lambda)$ неотрицательные (по условию выпуклости), то произведение неотрицательных скаляров на неотрицательные векторы будет неотрицательными векторами. Сумма неотрицательных векторов есть вектор неотрицательный. Следовательно, координаты вектора $\overline{x}$ неотрицательные.

Таким образом, точка $\overline{x}$ удовлетворяет ограничениям задачи и условиям неотрицательности, поэтому является планом задачи и, следовательно, ОДЗ есть множество выпуклое.

Теорема 2. *О целевой функции задачи линейного программирования*

Целевая функция задачи линейного программирования принимает своё оптимальное значение в одной из угловых точек области допустимых значений переменных.

Если целевая функция принимает своё оптимальное значение в нескольких угловых точках, то такое же значение она принимает и в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных угловых точек.

Определение. План $\overline{x}$, положительным координатам которого соответствуют линейно независимые векторы, называется ***опорным планом ЗЛП***.

Теорема 3. *Достаточные условия угловой точки*

Пусть система векторов $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$ (k $\le$ n) в разложении $\overline{A_1}x_1+\overline{A_2}x_2+\ldots+\overline{A_n}x_n = \overline{A_0}$ (**) является линейно независимой и такой, что $\overline{A_1}x_1+\overline{A_2}x_2+\ldots+\overline{A_k}x_k=\overline{A_0}$, где все $x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,k},\ \ (k \le n)$, то точка $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_k,0,0,\ldots,0)$ является угловой точкой ОДЗ.

Теорема4. *Необходимые условия угловой точки*

Пусть точка $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является угловой точкой ОДЗ, тогда векторы в разложении (**), соответствующие положительным значениям переменных будут линейно независимыми.

Следствия из теорем

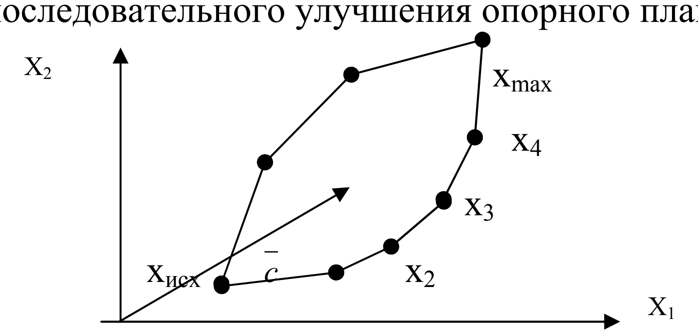
Следствие 1. Опорный план имеет не более **m** положительных координат. Если он имеет ровно **m** положительных координат, то такой опорный план называется невырожденным, в противном случае – вырожденным.

Следствие 2. Каждая угловая точка ОДЗ является опорным планом.

5.2. Идея решения задач линейного программирования симплекс-методом

Теорема 1 утверждает, что ОДЗ задачи линейного программирования является выпуклым множеством. Теорема 2 утверждает, что целевая функция принимает своё оптимальное значение в одной из угловых точек. Таким образом, можно найти все угловые точки и вычислить значения целевой функции в этих точках. Оптимальной будет та точка, в которой целевая функция принимает своё минимальное или максимальное значение. Однако количество угловых точек, в зависимости от размерности задачи, может быть очень значительным, но не более C_n^m. Поэтому найти все угловые точки даже с помощью компьютера бывает невозможно.

Симплекс-метод является целенаправленным перебором части угловых точек (метод последовательного улучшения опорного плана).



Для решения задачи симплекс-методом мы должны ответить на два вопроса:

1. Является ли очередной опорный план оптимальным; если не является, то указать к какому опорному плану необходимо перейти.

2. Как перейти от одного опорного плана к другому.

5.3. Переход от одного опорного плана к другому

Пусть задача линейного программирования находится в канонической форме и имеет исходный опорный план. Не теряя общности, предположим, что векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ являются единичными, то есть базисными.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad & + a_{1m+1}x_{m+1} + a_{1m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ x_2 \quad & + a_{2m+1}x_{m+1} + a_{2m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m & + a_{mm+1}x_{m+1} + a_{mm+2}x_{m+2} + \ldots + a_{mn}x_n = a_m, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}.$$

В этом случае вектор правых частей системы уравнений можно разложить по векторам данного базиса следующим образом:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0 \tag{1}$$

Тогда исходный опорный план будет записан в виде вектора:

$$\overline{x_0} = (a_1; a_2; \ldots; a_m; 0; 0; \ldots; 0).$$

Для перехода к новому опорному плану, необходимо один из свободных векторов $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_n$ ввести в базис, а какой-то из базисных векторов вывести из него. Для введения в базис выберем вектор, имеющий хотя бы одну положительную координату.

Пусть таким вектором будет вектор A_{m+1}. Разложим его по векторам того же базиса

$$x_{1\,m+1}A_1 + x_{2\,m+1}A_2 + \ldots + x_{m\,m+1}A_m = A_{m+1}. \tag{2}$$

Умножим соотношение (2) на некоторую положительную величину $\theta \geq 0$ и вычтем из соотношения (1)

$$(x_1 - \theta x_{1\,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2\,m+1})A_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{m\,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \tag{3}$$

Следующий вектор будет решением системы ограничений

$$\overline{x_1} = (x_1 - \theta x_{1m+1}; x_2 - \theta x_{2m+1}; \ldots; x_m - \theta x_{mm+1}; \theta; 0; 0; \ldots; 0), \tag{4}$$

если все координаты данного вектора будут неотрицательными. Рассмотрим **i**-тую координату $x_i - \theta x_{i\,m+1} \geq 0$.

Если $x_{i\,m+1} \le 0$, то эта координата будет неотрицательной. Пусть $x_{im+1} \succ 0$. Тогда необходимо выбрать значение θ таким, чтобы данная координата не стала отрицательной. Для этого решим неравенство и получим $\theta \le \frac{x_i}{x_{im+1}}$. Для неотрицательности всех координат, у которых $x_{im+1} \succ 0$ необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\theta \le \min_{x_{im+1} \succ 0} \left\{ \frac{x_i}{x_{im+1}} \right\}. \tag{5}$$

Если выполняется соотношение (5), то все координаты вектора $\overline{x_1}$ в (4) будут неотрицательными, следовательно, $\overline{x_1}$ является планом задачи, поскольку он содержит **m+1** неотрицательных координат.

Для того чтобы план $\overline{x_1}$ был опорным планом задачи линейного программирования, необходимо наличие одной из координат равной нулю.

Пусть минимум в соотношении (5) был получен при i = 1.

Тогда если $\theta = \min\limits_{x_{im+1} \succ 0} \left\{ \frac{x_i}{x_{im+1}} \right\}$, (6)

то первая координата вектора $\overline{x_1}$ станет равной нулю.

Соотношение (6) называется **симплексным отношением**. Таким образом, мы перешли от исходного опорного плана $\overline{x_0}$ (базисные векторы A_1, A_2,…, A_m) к опорному плану $\overline{x_1}$ (базисные векторы A_2,A_3,…,A_m,A_{m+1}).

5.4. Критерий оптимальности задачи линейного программирования

Теорема1:Если для некоторого вектора A_j выполняется соотношение $z_j - c_j \succ 0$, то план $\overline{x_0}$ не является оптимальным и можно перейти к плану $\overline{x_1}$ такому, что $z(x_1) \le z(x_0)$.

Здесь: $z_j = (\overline{c}, A_j)$ – скалярное произведение векторов,

$\overline{c}$ – вектор, состоящий из коэффициентов при базисных переменных целевой функции **z**,

c_j – коэффициент целевой функции **z** при переменной $\mathbf{x_j}$.

Теорема 2. Если для всех векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ некоторого опорного плана $\overline{x_0}$ выполняется соотношение $z_j - c_j \leq 0$, то опорный план $\overline{x_0}$ является оптимальным. Величины $(z_j - c_j)$ – называются **оценками** соответствующих векторов.

Таким образом, данное следствие теоремы позволяет установить является ли очередной опорный план оптимальным и, если не является, то согласно теореме, мы можем перейти к другому опорному плану, при котором значение целевой функции будет меньше. Для этого в базис, согласно теореме, необходимо ввести вектор A_j, имеющий положительную оценку.

Замечание. В теореме и следствии предполагается, что задача находится в канонической форме с целевой функцией на минимум. Однако симплекс–методом можно решать и задачи в канонической форме с целевой функцией на максимум. В этом случае при анализе значений оценок используется их противоположный смысл, то есть план будет оптимальным, если все оценки положительные и нулевые.

5.5.Описание симплексной таблицы

Симплекс-метод является табличным методом решения задачи линейного программирования, то есть исходную задачу решаем в виде таблицы и переход к следующему опорному плану осуществляется с помощью построения новой симплексной таблицы.

Пусть задача линейного программирования задана в канонической форме и имеется исходный опорный план. Предположим для определённости, что векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ являются базисными, тогда:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min.$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &+ a_{1m+1}x_{m+1} + a_{1m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1n}x_n = a_1,\\
x_2 \qquad &+ a_{2m+1}x_{m+1} + a_{2m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{2n}x_n = a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m &+ a_{mm+1}x_{m+1} + a_{mm+2}x_{m+2} + \ldots + a_{mn}x_n = a_m,\\
&x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Для данной задачи построим исходную симплексную таблицу.

Б	$С_Б$	A_o	A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_n
			c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n
A_1	c_1	a_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1n}
A_2	c_2	a_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_m	a_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mn}
$z_j - c_j$		$z(X_{Бо})$	0	0	…	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	…	$z_n - c_n$

В заголовке столбцов записываются все векторы системы ограничений и соответствующие коэффициенты при переменных целевой функции. Столбец $\mathbf{A_0}$ состоит из правых частей уравнений. На пересечении 4-го, 5-го,…, **n**-го столбцов и первых **m** строк записываются коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях.

Столбец **Б** (базис) определяет базисные векторы, причём они записываются в той последовательности, в какой выражены базисные переменные в системе ограничений.

Столбец $\mathbf{С_Б}$ определяет коэффициенты целевой функции при соответствующих базисных переменных.

Последняя строка $z_j - c_j$ называется **индексной** или **оценочной** и определяет оценки соответствующих векторов, за исключением первой и второй клетки. Значения клеток индексной строки при опорном плане $X_{Бо}=(a_1;a_2;\ldots;\ a_m,\ ;\ 0;\ 0;\ldots;0)$ вычисляются следующим образом:

$z(X_{Бо}) = (С_Б;A_o) = c_1a_1 + c_2a_2 +\ldots+ c_ma_m,$

$z_{m+1}\text{-}c_{m+1} = (С_Б,A_{m+1}) - c_{m+1},$

. . .

$z_n - c_n=(С_Б,A_n) - c_n.$

Оценки всех базисных векторов всегда равны нулю.

5.6. Алгоритм симплексного метода

При решении задачи линейного программирования симплексным методом необходимо выполнить следующую последовательность действий.

1. Проверяется, находится ли задача линейного программирования в канонической форме. Если нет, то необходимо её преобразовать.

2. Проверяется наличие исходного опорного плана. При его отсутствии задача не может быть решена обычным симплекс–методом. Существуют другие модифицированные методы для решения таких задач.

3. Проводится построение исходной симплексной таблицы.

4. Проверяются значение оценок в индексной строке. Если нет положительных оценок, то выписывается оптимальное решение и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выполняется пункт 5.

5. В базис вводится вектор, которому соответствует наибольшая положительная оценка. Данный столбец называется разрешающим.

6. Из базиса выводится вектор, которому соответствует наименьшее симплексное отношение (см. 5.3). Данная строка называется разрешающей строкой.

7. Строится новая симплексная таблица. Соответствующим образом изменяются столбцы **Б** и **$C_Б$.** Остальная часть таблицы заполняется из предыдущей с помощью гауссовских преобразований, причём индексная строка считается **m+1** строкой и также преобразуется с помощью гауссовских преобразований. Переходим на выполнение пункта 4 данного алгоритма.

После построения каждой таблицы можно проверить правильность вычислений с использованием формул вычисления оценок приведённых в предыдущем параграфе.

Пример. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования

$$z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max.$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1, \\ x_1 + x_2 \quad &\le 2, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 &= 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Решение.

1. Задачу необходимо привести к каноническому виду:

$$z' = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min.$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1, \\ x_1 + x_2 \quad + x_5 &= 2, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad &= 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

2. Задача имеет исходный опорный план: $X_{Бо}$=(0;0;1;1;2). Строим исходную симплексную таблицу:

Б	$C_Б$	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
			-2	1	-3	2	0	
A_3	-3	1	**-1**	1	1	0	0	1-я таблица
A_5	0	2	**1**	1	0	0	1	
A_4	**2**	**1**	**1**	**-1**	**0**	**1**	**0**	
Z'_j-c_j		-1	**7**	-6	0	0	0	
A_3	-3	2	0	**0**	1	1	0	2-я таблица
A_5	**0**	**1**	**0**	**2**	**0**	**-1**	**1**	
A_1	-2	1	1	**-1**	0	1	0	
Z'_j-c_j		-8	0	**1**	0	-7	0	
A_3	-3	2	0	0	1	1	0	3-я таблица
A_2	1	1/2	0	1	0	-1/2	1/2	
A_1	-2	3/2	1	0	0	1/2	1/2	
Z'_j-c_j		−17/2	0	0	0	−13/2	−1/2	

Рассмотрим первую таблицу. Критерием оптимальности являются неположительные оценки в индексной строке. В таблице имеются положительные оценки, следовательно, данный опорный план не является оптимальным. Наибольшая положительная оценка в индексной строке соответствует вектору $\mathbf{A_1}$. Вводим в базис вектор $\mathbf{A_1}$. Для определения вектора, выводимого из базиса, вычисляется симплексное отношение:

$$\theta = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right\} = 1.$$

Минимум достигается в строке $\mathbf{A_4}$, поэтому выводим из базиса вектор $\mathbf{A_4}$. Переходим ко второй таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы **Б** и $\mathbf{C_Б}$. Делаем пересчет остальных строк таблицы по методу Жордана–Гаусса. Третья строка переписывается без изменения, так как разрешающий элемент равен единице. Третья (разрешающая) строка новой (второй) таблицы умножается на 1 и прибавляется к первой строке старой таблицы. Результат записывается в качестве первой строки новой таблицы. Затем разрешающая строка умножается на (–1) и прибавляется ко второй строке старой таблицы. Результат записывается в качестве второй строки новой таблицы. И, наконец, третья (разрешающая) строка новой таблицы умножается на (–7) и прибавляется к индексной строке старой таблицы. Результат записывается в качестве индексной строки новой таблицы. Необходимо проверить правильность проведённых преобразований. Для этого получим значения элементов новой индексной строки с помощью формул, приведённых в предыдущем параграфе. Если значения некоторых элементов не совпадают с полученными значениями с помощью метода Жордана–Гаусса, то при проведении преобразований допущена ошибка, которую необходимо устранить.

Рассматриваем индексную строку второй таблицы. Положительная оценка в ней соответствует вектору $\mathbf{A_2}$. Вводим в базис вектор $\mathbf{A_2}$. Симплексное отношение считать не нужно, так как в данном столбце имеется единственное положительное число, соответствующее вектору $\mathbf{A_5}$. Выводим из базиса вектор $\mathbf{A_5}$. Переходим к третьей таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы **Б** и $\mathbf{C_Б}$. Выполняем пересчет остальных строк таблицы по методу Жордана–Гаусса.

Рассматриваем индексную строку третьей таблицы. Поскольку оценки в индексной строке отрицательные и нулевые, то полученный опорный план является оптимальный, а значение целевой функции $\mathbf{z'}$ является минимальным. Напомним, что вычислять оптимальное значение целевой функции не нужно, оно находится во второй клетке индексной строки последней симплексной таблицы – $z_{min} = -17/2$. Из последней симплексной таблицы выписываем оптимальные значения переменных $X_{min} = (3/2;\ 1/2;\ 2;\ 0;\ 0)$ Поскольку исходная задача была преобразована, запишем её ответ: $X_{max} = (3/2;\ 1/2;\ 2;\ 0)$ $z_{max} = 17/2$.

5.7. Типы оптимальных решений задач линейного программирования при решении симплекс-методом

При решении задач симплекс-методом возможны следующие виды оптимальных решений.

1. Единственность. Если оценки всех свободных векторов строго отрицательные, то полученный опорный план является оптимальным и единственным.

2. Альтернативный оптимум (множество оптимальных решений). Если среди неположительных оценок свободных векторов имеется хотя бы одна нулевая, то полученный опорный план будет оптимальным, но не единственным. В этом случае можно перейти к другим опорным планам (вводятся в базис векторы, которым соответствуют нулевые оценки) и, затем, общее оптимальное решение записать в виде выпуклой комбинации полученных оптимальных опорных планов.

3. Задача линейного программирования не имеет оптимального решения, так как целевая функция не ограничена снизу. Если в симплекс-таблице имеется положительная оценка, а все элементы данного столбца отрицательны и нулевые, то данный вектор можно ввести в базис. Однако никакой из базисных векторов нельзя из него вывести. Следовательно, дальнейшее уменьшение целевой функции возможно только при переходе к неопорному плану.

4. Задача линейного программирования не имеет оптимального решения, так как система ограничений противоречива. Поскольку при решении задачи обычным симплекс–методом должен быть исходный опорный план, то система линейных уравнений заведомо непротиворечива. Следовательно, такой случай не может встретиться при решении обычным симплекс-методом.

5. ОДЗ задачи линейного программирования состоит из одной точки. Решение такой задачи является тривиальным и может быть получено без использования симплекс-метода.

5.8. Симплекс-метод с искусственным базисом

Если задача линейного программирования находится в канонической форме, но исходный опорный план отсутствует, то такая задача не может быть решена обычным симплекс-методом. Для решения такой задачи может использоваться один из следующих способов:

I способ. Выделение исходного опорного плана с помощью метода Жордана–Гаусса.

Необходимо отдельно выписать систему линейных уравнений задачи и с помощью метода Жордана–Гаусса выделить некоторое неотрицательное базисное решение (опорный план). Для этого при выборе разрешающей строки необходимо использовать симплексное отношение. Затем, используя преобразованную систему линейных уравнений, можно решать задачу обычным симплекс-методом.

II способ. Симплекс-метод с искусственным базисом.

Пусть задача линейного программирования находится в канонической форме, однако, не во всех уравнениях имеются базисные переменные, то есть исходный опорный план отсутствует. В этом случае в уравнения без базисных переменных необходимо добавить с коэффициентом +1 некоторую неотрицательную переменную, которая называется **искусственной**. Не следует путать искусственные переменные с балансовыми переменными, которые добавляются в неравенства и входят в целевую функцию с коэффициентами нуль.

Пример. Пусть имеется следующее уравнение $5x_1 + x_2 = 5$, переменные $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ являются свободными. Добавим в это уравнение неотрицательную искусственную переменную $\mathbf{x_3}$: $5x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

Для того чтобы решения этих двух уравнений совпадали необходимо, чтобы искусственная переменная $\mathbf{x_3}$ стала равной нулю. Для этого такая переменная должна выйти из базиса и стать свободной. С этой целью данную искусственную переменную необходимо добавить в целевую функцию с очень большим положительным числом (так как целевая функция на нахождения минимума). Это число обозначается латинской буквой **M**. Его можно считать равным $+\infty$. В связи с этим иногда метод искусственного базиса называют **M**–методом. Такое преобразование исходной задачи называется построением расширенной задачи. Если решается задача с целевой функцией на нахождение максимума, то искусственные переменные входят в целевую функцию с коэффициентом (**–M**).

Таким образом, в расширенной задаче мы имеем опорный план, хотя некоторые из базисных переменных и являются искусственными.

Строится исходная симплекс–таблица, в которой индексная строка разбивается на две, поскольку оценки состоят из двух слагаемых. В верхней строке записывается слагаемое оценки без **М**, в нижней – коэффициенты при **М**. Знак оценки определяется знаком коэффициента при **М**, независимо от величины и знака слагаемого без **М**, так как **М** очень большое положительное число.

Таким образом, для определения вектора, который вводится в базис необходимо провести анализ нижней индексной строки. Если искусственный вектор выводится из базиса, то соответствующий столбец в последующих симплексных таблицах можно не вычислять, если нет необходимости в получении решения двойственной задачи (см. следующую тему).

После того, как все искусственные векторы будут выведены из базиса, нижняя строка будет иметь все нулевые элементы, за исключением оценок, соответствующих искусственным векторам. Они будут равны (–1). Такую строку можно удалить из рассмотрения и дальнейшее решение проводить обычным симплекс-методом, если нет необходимости в получении решения двойственной задачи (см. следующую тему).

Пример. Решить следующую задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} &z = -5x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min. \\ &x_1 + x_2 \geq 4, \\ &5x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ &x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}. \end{aligned}$$

Решение.

Приведём исходную задачу к канонической форме.

$$\begin{aligned} &z = -5x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2 \quad -x_4 = 4, \\ &5x_1 + x_2 + x_3 \quad = 14, \\ &x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}. \end{aligned}$$

Исходного опорного плана нет, так как балансовая переменная $\mathbf{x_4}$ входит в первое уравнение с коэффициентом (–1), и, следовательно, не является базисной. Смотрим расширенную задачу.

$$\begin{aligned} &z = -5x_1 + x_2 + x_3 + Mx_5 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2 \quad -x_4 + x_5 = 4, \\ &5x_1 + x_2 + x_3 \quad =14, \\ &x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}. \end{aligned}$$

Решаем расширенную задачу.

Б	$C_Б$	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
			-5	1	1	0	M	
A_5	M	4	**1**	1	0	-1	1	1-я
A_3	**1**	**14**	**5**	**1**	**1**	**0**	**0**	таблица
Z_j-C_j		14	**10**	0	0	0	0	
	M	4	**1**	1	0	-1	0	
A_5	**M**	**6/5**	**0**	**4/5**	**-1/5**	**-1**	**1**	2-я
A_1	-5	14/5	1	**1/5**	1/5	0	0	таблица
Z_j-C_j		-14	0	**-2**	-2	0	0	
	M	6/5	0	**4/5**	-1/5	-1	0	
A_2	1	3/2	0	1	-1/4	-5/4	-	3-я
A_1	-5	5/2	1	0	1/4	1/4	-	таблица
Z_j-C_j		-11	0	0	-5/2	-5/2	-	
	M	0	0	0	0	0	-	

В первой таблице положительные оценки имеют два вектора, можно вводить в базис любой из них, так как эти оценки имеют одинаковый коэффициент при **M**. Введём в базис, например, вектор $\mathbf{A_1}$. Для определения вектора, выводимого из базиса, вычисляется симплексное отношение

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{14}{5}\right\} = \frac{14}{5}.$$

Минимум достигается в строке $\mathbf{A_3}$, поэтому выводим из базиса этот вектор. Переходим к построению второй таблицы. Вносим соответствующие изменения в столбцы **Б** и $\mathbf{C_Б}$. Делаем пересчет остальных столбцов таблицы по методу Жордана–Гаусса.

Рассматриваем нижнюю индексную строку второй таблицы. Положительная оценка в ней соответствует вектору $\mathbf{A_2}$. Вводим в базис этот вектор. Для определения вектора, выводящегося из базиса, вычисляется симплексное отношение

$$\theta_2 = min\left\{\frac{6/5}{4/5}, \frac{14/5}{1/5}\right\} = \frac{3}{2}.$$

Минимум достигается в строке $\mathbf{A_3}$, поэтому выводим из базиса искусственный вектор $\mathbf{A_5}$, который в следующей таблице можно не рассчитывать, поскольку не требуется нахождение решения двойственной задачи. Переходим к построению третьей таблицы. Вносим соответствующие изменения в столбцы **Б** и $\mathbf{C_Б}$. Делаем пересчет остальных столбцов таблицы по методу Жордана–Гаусса. Так как опорный план уже не содержит искусственных векторов, то вторая индексная строка содержит нулевые значения. Дальнейшее решение осуществляется обычным симплексным методом с одной индексной строкой.

Рассматриваем индексную строку третьей таблицы. Поскольку оценки индексной строки отрицательные и нулевые, то полученный опорный план является оптимальным, а значение целевой функции **z** является минимальным.

$z_{min} = -11$; $x_{min} = (5/2;\ 3/2;\ 0;\ 0)$.

Замечание. Исходная задача линейного программирования может не иметь решения, так как система ограничений противоречива в двух случаях:

1. Если при решении задачи симплекс-методом с искусственным базисом получается, что расширенная задача не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу при наличии искусственных векторов в базисе.
2. Если получено оптимальное решение расширенной задачи при наличии искусственных векторов в базисе.

5.9. Задачи

5.1. Решить следующие задачи линейного программирования симплекс-методом.

5.1.01.	**5.1.02.**
$z = x_2 + x_4 \to \max;$ $x_1 - 2x_2 + x_4 = 5,$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 3x_1 + 2x_3 - 3x_4 \to \max;$ $x_1 + x_4 - 4x_5 = 5,$ $x_2 - 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 3,$ $x_3 - 4x_5 - x_6 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
5.1.03.	**5.1.04.**
$z = 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 - x_5 \to \min;$ $-3x_1 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3,$ $2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = x_2 + 4x_3 + 4x_4 \to \max;$ $x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$ $x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0,$ $-3x_3 \le 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
5.1.05.	**5.1.06.**
$z = 3x_1 + 3x_2 + x_4 - 2x_5 \to \max;$ $x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 6,$ $x_3 + 3x_4 = 7,$ $2x_2 + 2x_4 + x_5 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 3x_2 \to \max;$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$ $2x_1 + x_2 \le 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

5.1.07.	**5.1.08.**
$z = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 \to \min;$ $x_2 - 2x_3 = 6,$ $x_3 + x_4 + 4x_5 = 6,$ $x_1 + x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 3x_1 - x_2 + 2x_4 \to \min;$ $3x_2 + 2x_3 \le 5,$ $x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 7,$ $x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
5.1.09.	**5.1.10.**
$z = x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 \to \max;$ $-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$ $2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z=4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 \to \min;$ $x_1 + 4x_2 + 4x_5 + x_6 = 4,$ $2x_2 + x_4 + 2x_5 = 4,$ $x_3 + 4x_5 + 2x_6 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
5.1.11.	**5.1.12.**
$z = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max;$ $x_1 + 2x_3 - x_4 = 2,$ $x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 4x_3 + 4x_4 - x_5 \to \min;$ $2x_1 + x_2 = 7,$ $-4x_1 + x_3 - x_5 = 5,$ $2x_1 + x_4 + 2x_5 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.13.	**5.1.14.**
$z = 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max;$ $x_1 - x_2 - 3x_4 \le 4,$ $-x_2 + x_3 + 3x_4 = 5,$ $3x_1 \le 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z=x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 4x_6 \to \min;$ $-3x_1 + 3x_4 + x_5 = 5,$ $-2x_1 + x_3 + 4x_6 = 4,$ $-x_1 + x_2 + 4x_4 + 4x_6 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
5.1.15.	**5.1.16.**
$z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \max;$ $x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 3,$ $4x_4 \le 6,$ $x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_5 \to \max;$ $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 8,$ $x_2 - 3x_3 + 4x_5 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.17.	**5.1.18.**
$z = x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \min;$ $4x_2 + x_5 = 7,$ $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$ $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 4x_1 - 3x_2 - 3x_4 + 2x_5 \to \max;$ $x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3,$ $2x_1 + x_2 - 4x_4 - x_5 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.19.	**5.1.20.**
$z = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \min;$ $2x_1 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 3,$ $2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 4x_1 + 4x_2 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \to \min;$ $x_3 - 4x_4 + x_5 - 4x_6 = 5,$ $x_1 - 4x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 6,$ $x_2 + 4x_4 - 4x_5 + x_6 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
5.1.21.	**5.1.22.**
$z = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 - 3x_6 \to \max;$ $-x_4 + 4x_5 + x_6 = 6,$ $x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8,$ $x_1 + 3x_4 - 2x_5 = 3,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$	$z = x_1 - 4x_4 + x_6 \to \min;$ $x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 7,$ $-2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3,$ $x_1 + x_6 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
5.1.23.	**5.1.24.**
$z = -3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min;$ $x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 5,$ $x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 3,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -x_2 + 2x_4 \to \max;$ $-3x_2 + x_3 + 4x_4 \le 7,$ $4x_2 - 4x_3 \le 6,$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

5.1.25.

$$\begin{array}{l} z = -4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_5 \to \min; \\ -2x_2 - 3x_3 + x_6 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.26.

$$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 + 4x_6 \to \min; \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 8, \\ x_1 + 3x_3 = 6, \\ -4x_2 + 4x_3 + x_5 + 4x_6 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.27.

$$\begin{array}{l} z = -4x_1 - x_3 - 4x_4 \to \max; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$$

5.1 28.

$$\begin{array}{l} z = -3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 3x_6 \to \min; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_5 = 6, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 + 4x_5 = 6, \\ 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.29.

$$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$$

5.1.30.

$$\begin{array}{l} z = 4x_1 + 4x_2 + 4x_4 \to \min; \\ x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$$

5.1.31.

$$\begin{array}{l} z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min; \\ x_1 + x_5 = 5, \\ 3x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_5 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{array}$$

5.1.32.

$$\begin{array}{l} z = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_5 - 4x_6 \to \min; \\ x_2 + 3x_3 + 2x_5 + 4x_6 = 8, \\ x_1 + 4x_6 = 4, \\ -2x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.33.

$$\begin{array}{l} z = 4x_1 + x_2 + 4x_4 + 2x_5 \to \max; \\ x_1 + x_3 - 4x_5 = 7, \\ -2x_1 + x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_2 + 2x_5 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{array}$$

5.1.34.

$$\begin{array}{l} z = x_1 + x_3 + 3x_4 \to \max; \\ -4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 4, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 \le 3, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 - x_4 = 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$$

5.1.35.

$$\begin{array}{l} z = -2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \to \min; \\ 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 8, \\ x_1 + 3x_4 = 6, \\ 3x_2 - 4x_3 + x_5 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.36.

$$\begin{array}{l} z = 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_6 \to \max; \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_5 + x_6 = 4, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_5 = 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.37.

$$\begin{array}{l} z = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min; \\ x_3 + 2x_5 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{array}$$

5.1.38.

$$\begin{array}{l} z = x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max; \\ x_1 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 = 3, \\ x_2 + 2x_4 + 4x_5 - x_6 = 4, \\ x_3 - 4x_5 + x_6 = 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.39.

$$\begin{array}{l} z = x_1 - x_2 - 4x_4 - 2x_5 \to \max; \\ -x_1 + x_3 - 2x_5 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + x_4 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{array}$$

5.1.40.

$$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 \to \min; \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{array}$$

5.1.41.

$$\begin{array}{l} z = 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min; \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_3 + 2x_4 \le 0, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$$

5.1.42.

$$\begin{array}{l} z = -3x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 \to \min; \\ 4x_3 + 3x_4 + x_5 - 4x_6 = 8, \\ x_1 + 4x_3 - x_6 = 4, \\ x_2 + x_4 + 2x_6 = 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.43.

$$\begin{array}{l} z = x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \min; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_6 = 4, \\ x_1 - 3x_4 = 4, \\ 4x_3 + 4x_4 + x_5 + 3x_6 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{array}$$

5.1.44.

$$\begin{array}{l} z = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$$

5.1.45.	**5.1.46.**
$z = -4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to \max;$ $x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8,$ $x_1 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -2x_1 + 3x_3 + x_4 \to \max;$ $x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 5,$ $x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
5.1.47.	**5.1.48.**
$z = -x_1 - 2x_2 + x_4 - 4x_5 \to \max;$ $4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 4,$ $2x_1 + x_2 + 4x_5 + 2x_6 = 7,$ $2x_1 + x_3 + x_5 - 2x_6 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$	$z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 6,$ $x_1 + 2x_3 + x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
5.1.49.	**5.1.50.**
$z = 3x_3 - x_4 + 4x_5 \to \max;$ $x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 7,$ $x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \min;$ $x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5,$ $-3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.1.51.	**5.1.52.**
$z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 \to \min;$ $2x_1 \le 0,$ $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 4,$ $-x_2 - x_3 + 4x_4 \le 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -x_1 - 4x_4 - 2x_5 \to \min;$ $-2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4,$ $x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 6,$ $x_2 - 4x_4 + x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.53.	**5.1.54.**
$z = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 \to \min;$ $-3x_1 - 2x_4 + x_6 = 7,$ $x_1 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 4,$ $2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$	$z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min;$ $x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 5,$ $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.55.	**5.1.56.**
$z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 + 3x_6 \to \max;$ $-4x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0,$ $x_2 + x_3 + 4x_6 = 6,$ $x_1 + 2x_3 - 4x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$	$z = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 + 3x_6 \to \max;$ $2x_2 + x_3 - 4x_5 + 4x_6 = 0,$ $x_2 + x_4 - 3x_6 = 4,$ $x_1 - x_2 + x_5 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
5.1.57.	**5.1.58.**
$z = -2x_3 \to \min;$ $-x_2 + 4x_3 + x_4 = 8,$ $x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 2x_1 + 4x_2 + x_4 - 3x_5 \to \max;$ $-2x_2 + 4x_4 + x_5 = 0,$ $x_1 + 2x_4 = 6,$ $x_2 + x_3 = 3,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.59.	**5.1.60.**
$z = 3x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min;$ $4x_2 + x_3 + 3x_4 = 7,$ $x_1 + x_2 + 4x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max;$ $3x_2 + x_3 \le 5,$ $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.1.61.	**5.1.62.**
$z = -x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 + x_6 \to \max;$ $x_1 - x_4 + x_6 = 5,$ $x_3 + 3x_4 - 2x_6 = 4,$ $x_2 + x_4 + x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$	$z = 4x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_5 \to \min;$ $3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7,$ $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.63.	**5.1.64.**
$z = -4x_1 + 3x_4 + x_5 \to \min;$ $2x_1 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 7,$ $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 3x_6 \to \max;$ $x_1 - 2x_2 + 2x_5 = 7,$ $x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3,$ $3x_2 + 4x_4 + 3x_5 + x_6 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

5.1.65.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min; \\ 2x_1 - x_4 + x_5 &= 8, \\ 2x_1 + x_3 &= 4, \\ x_2 + 2x_4 &= 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

5.1.66.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 + 4x_6 \to \min; \\ -x_2 + x_4 + 2x_6 &= 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3, \\ -4x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 &= 8, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,6}. \end{aligned}$$

5.1.67.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 \to \min; \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\le 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &\le 0, \\ -3x_1 + 4x_4 &\le 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

5.1.68.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 3x_3 + 4x_4 \to \max; \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

5.1.69.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min; \\ x_3 + x_4 - 3x_5 &= 4, \\ x_2 + 4x_5 &= 4, \\ x_1 + 4x_5 &= 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

5.1.70.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_6 \to \min; \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 &= 7, \\ x_2 + 4x_4 + x_6 &= 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,6}. \end{aligned}$$

5.1.71.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \to \min; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 - 4x_3 &= 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

5.1.72.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 - 4x_3 \to \max; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 5, \\ -x_2 + x_3 &= 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

5.1.73.

$$\begin{aligned} z &= -4x_2 - 4x_3 + x_4 + 3x_5 \to \max; \\ -4x_2 + x_3 + x_5 &= 4, \\ 4x_2 + x_4 - 3x_5 &= 8, \\ x_1 + x_5 &= 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

5.1.74.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 \to \min; \\ x_1 + x_2 &= 0, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

5.1.75.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 \to \min; \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 &= 7, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ 4x_4 + x_5 &= 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

5.1.76.

$$\begin{aligned} z &= x_1 - x_2 - x_4 \to \min; \\ 3x_2 + 2x_4 &\le 5, \\ x_1 + 4x_4 &= 6, \\ 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

5.1.77.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 + 4x_5 - 3x_6 \to \min; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 5, \\ -2x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 5, \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 + x_6 &= 0, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,6}. \end{aligned}$$

5.1.78.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 + x_4 + 4x_5 \to \min; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_3 + x_5 &= 6, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

5.1.79.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_5 \to \max; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_5 + 4x_6 &= 4, \\ -x_2 + x_3 - 2x_5 + 3x_6 &= 5, \\ x_4 - 4x_5 &= 4, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,6}. \end{aligned}$$

5.1.80.

$$\begin{aligned} z &= 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min; \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 &= 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,6}. \end{aligned}$$

5.1.81.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 \to \max; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &\le 6, \\ 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 &\le 7, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 &\le 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

5.1.82.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 \to \max; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 &= 6, \\ -x_1 + x_4 + x_5 &= 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

5.1.83.

$$\begin{aligned} z &= 3x_3 \to \min; \\ 3x_1 - 4x_2 &\le 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

5.1.84.

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \min; \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &\le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &\le 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

5.1.85.	**5.1.86.**
$z = -4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max;$ $x_1 + 2x_3 = 8,$ $-4x_2 + 4x_3 + x_5 = 4,$ $2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min;$ $2x_2 + x_3 + 3x_5 = 7,$ $x_1 - x_2 - 2x_5 = 6,$ $2x_2 + x_4 + 4x_5 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.87.	**5.1.88.**
$z = x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_5 \to \min;$ $-4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 4,$ $x_1 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 \to \min;$ $4x_3 - 3x_4 + x_6 = 4,$ $3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5,$ $4x_1 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
5.1.89.	**5.1.90.**
$z = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min;$ $2x_1 + x_4 = 6,$ $2x_2 + x_3 = 3,$ $-2x_1 + x_2 \le 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max;$ $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8,$ $-x_2 + 3x_4 \le 7,$ $-3x_1 - 3x_2 + 4x_4 \le 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
5.1.91.	**5.1.92.**
$z = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \to \min;$ $4x_1 + x_2 + 3x_4 \le 6,$ $-x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 0,$ $-3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -x_2 + 3x_3 + x_5 \to \min;$ $x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 5,$ $x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.93.	**5.1.94.**
$z = 3x_1 + x_2 + 2x_4 \to \min;$ $2x_2 + x_3 = 2,$ $x_1 + 4x_2 + x_4 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 3x_2 + 4x_4 + 3x_5 \to \min;$ $x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 3,$ $2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.95.	**5.1.96.**
$z = -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 \to \min;$ $x_1 + x_2 + 4x_4 - 3x_5 = 4,$ $x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = -2x_1 + 3x_2 + 3x_4 \to \max;$ $x_3 + 3x_4 = 5,$ $x_1 + 2x_2 + x_4 = 5,$ $-4x_2 + 3x_4 + x_5 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.97.	**5.1.98.**
$z = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \min;$ $x_1 + 3x_2 = 7,$ $x_3 + 3x_4 = 6,$ $-x_2 + x_4 + x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_1 + x_3 + 2x_5 \to \min;$ $4x_3 + x_4 = 6,$ $x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,$ $-3x_2 + 4x_3 + x_5 = 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
5.1.99.	**5.1.00.**
$z = 4x_1 + x_2 + 4x_4 - 3x_5 \to \min;$ $-3x_1 + 3x_2 + x_4 = 4,$ $-x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$z = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$ $-3x_3 + x_4 - 2x_5 = 4,$ $x_2 + 4x_3 - x_5 = 4,$ $x_1 - 2x_3 + 2x_5 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

5.2. Решить следующие задачи линейного программирования симплекс-методом.

5.2.01.	**5.2.02.**
$z = 3x_1 \to \min;$ $x_1 + 4x_2 = 5,$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$	$z = 3x_1 - 4x_2 + x_4 \to \min;$ $-x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 6,$ $4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4,$ $x_1 - 2x_2 - 3x_4 \ge 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

5.2.03.

$$\begin{aligned}&z = x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max;\\&2x_1 - 2x_2 - x_3 \le 2,\\&-x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 0,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.04.

$$\begin{aligned}&z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min;\\&-4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 7,\\&2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 6,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.05.

$$\begin{aligned}&z = 3x_2 + 4x_3 \to \max;\\&x_1 + 2x_3 \le 3,\\&3x_1 + x_3 \ge 6,\\&-4x_1 + x_2 + x_3 = 5,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.06.

$$\begin{aligned}&z = x_1 + 4x_2 \to \max;\\&x_2 \ge 2,\\&x_1 + x_2 = 4,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.07.

$$\begin{aligned}&z = 4x_1 + 4x_2 \to \max;\\&x_1 - x_2 = 3,\\&3x_2 \ge 8,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.08.

$$\begin{aligned}&z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;\\&2x_1 + x_2 = 5,\\&2x_1 + x_2 \ge 4,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.09.

$$\begin{aligned}&z = -x_3 \to \max;\\&2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5,\\&-x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 5,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.10.

$$\begin{aligned}&z = 3x_1 + 4x_2 \to \min;\\&3x_1 \ge 7,\\&2x_1 + x_2 = 6,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.11.

$$\begin{aligned}&z = 2x_1 - 3x_2 \to \min;\\&x_1 - 4x_2 = 6,\\&3x_1 - 2x_2 \ge 4,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.12.

$$\begin{aligned}&z = x_1 + 2x_4 \to \min;\\&4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4,\\&4x_1 + 3x_4 \le 5,\\&-3x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 8,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.\end{aligned}$$

5.2.13.

$$\begin{aligned}&z = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \max;\\&3x_1 + 2x_2 = 8,\\&x_1 - x_2 + x_3 = 7,\\&3x_2 \ge 3,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.14.

$$\begin{aligned}&z = -4x_1 + 4x_3 \to \min;\\&-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 8,\\&3x_1 + 2x_2 = 4,\\&4x_1 + 4x_2 \ge 5,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.15.

$$\begin{aligned}&z = x_1 + 4x_2 \to \min;\\&-x_1 - x_2 + 4x_3 \le 5,\\&4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 7,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.16.

$$\begin{aligned}&z = -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 \to \max;\\&-4x_2 + 2x_3 = 5,\\&3x_2 + 2x_3 \ge 8,\\&x_1 + 4x_2 = 4,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.17.

$$\begin{aligned}&z = x_1 + 4x_3 \to \max;\\&3x_1 - 2x_3 \ge 0,\\&2x_1 + x_2 - x_3 = 3,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.18.

$$\begin{aligned}&z = 4x_1 + 3x_2 \to \min;\\&2x_1 + x_2 = 7,\\&4x_1 \ge 7,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.19.

$$\begin{aligned}&z = 3x_1 + x_2 \to \max;\\&x_1 + x_2 = 8,\\&3x_1 \ge 0,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.20.

$$\begin{aligned}&z = 3x_2 \to \min;\\&4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7,\\&2x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 6,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

5.2.21.

$$\begin{aligned}&z = 3x_1 - 2x_2 \to \min;\\&-x_1 + x_2 = 0,\\&3x_1 + 4x_2 \ge 4,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.22.

$$\begin{aligned}&z = 2x_1 - x_2 \to \min;\\&-2x_1 + x_2 = 7,\\&x_1 + 2x_2 \ge 5,\\&x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{aligned}$$

5.2.23.	**5.2.24.**
$\begin{aligned} z &= 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max; \\ & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 8, \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 0, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min; \\ & -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \le 3, \\ & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$
5.2.25.	**5.2.26.**
$\begin{aligned} z &= 4x_2 \to \min; \\ & 2x_1 + 4x_2 = 7, \\ & 2x_1 + 4x_2 \ge 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 4x_2 \to \max; \\ & 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ & 3x_1 - 2x_2 \ge 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$
5.2.27.	**5.2.28.**
$\begin{aligned} z &= 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min; \\ & -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ & 4x_1 - x_2 \ge 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 2x_1 \to \max; \\ & 3x_1 + x_2 = 6, \\ & 4x_1 \ge 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$
5.2.29.	**5.2.30.**
$\begin{aligned} z &= -3x_1 + x_2 - x_3 \to \max; \\ & 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 6, \\ & -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 \to \max; \\ & x_1 + 2x_2 = 4, \\ & 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$
5.2.31.	**5.2.32.**
$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \min; \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ & 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 4x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max; \\ & -4x_1 - 3x_2 = 4, \\ & 4x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$
5.2.33.	**5.2.34.**
$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max; \\ & -2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ & -4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 0, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 3x_1 + x_2 \to \min; \\ & 4x_2 - 3x_3 \ge 4, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$
5.2.35.	**5.2.36.**
$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 4x_2 \to \max; \\ & x_1 + x_2 = 4, \\ & 3x_2 \ge 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min; \\ & 3x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$
5.2.37.	**5.2.38.**
$\begin{aligned} z &= 4x_2 \to \min; \\ & x_1 + x_2 = 6, \\ & 3x_1 - 2x_2 \ge 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 4x_2 \to \max; \\ & 3x_1 \ge 4, \\ & 2x_1 + x_2 = 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$
5.2.39.	**5.2.40.**
$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 2x_2 \to \max; \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ & x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max; \\ & x_1 + 3x_2 \le 5, \\ & -x_1 + 3x_3 = 7, \\ & -4x_1 - 4x_2 + 3x_3 \ge 5, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$
5.2.41.	**5.2.42.**
$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 3x_2 \to \max; \\ & 2x_2 - x_3 = 6, \\ & -x_2 + x_3 \ge 3, \\ & x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} z &= 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 \to \min; \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ & 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ & -x_2 + 4x_3 \ge 6, \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$

5.2.43.	**5.2.44.**
$z = 2x_1 - 3x_2 \to \min;$ $4x_1 + x_2 = 7,$ $3x_1 + 4x_2 \geq 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}.$	$z = -x_1 - 3x_2 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7,$ $-x_1 + x_2 + x_3 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.2.45.	**5.2.46.**
$z = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max;$ $3x_3 \leq 7,$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8,$ $2x_2 \geq 2,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 3x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 = 6,$ $x_1 + x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}.$
5.2.47.	**5.2.48.**
$z = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min;$ $x_1 + x_2 + x_3 = 5,$ $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5,$ $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 7,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 3x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$ $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7,$ $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 7,$ $x_1 + 4x_2 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.2.49.	**5.2.50.**
$z = 3x_2 - x_3 + 3x_4 \to \min;$ $x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5,$ $-x_1 - 3x_2 + 3x_4 \leq 6,$ $4x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -x_1 - x_2 \to \max;$ $x_1 - 3x_3 \leq 7,$ $x_1 - 2x_2 - x_3 = 7,$ $3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.2.51.	**5.2.52.**
$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min;$ $-3x_1 + x_3 = 4,$ $x_1 + 3x_3 + 2x_4 \geq 8,$ $3x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max;$ $4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8,$ $x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$ $-2x_1 + 2x_2 + 2x_4 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
5.2.53.	**5.2.54.**
$z = 4x_1 \to \min;$ $-4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$ $x_1 + x_3 = 4,$ $3x_1 + 4x_3 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max;$ $3x_1 + 3x_3 \leq 5,$ $x_2 - 2x_3 + x_4 = 7,$ $3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
5.2.55.	**5.2.56.**
$z = -2x_1 \to \min;$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7,$ $2x_2 + 4x_3 = 5,$ $4x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min;$ $4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4,$ $-x_1 - 2x_3 \leq 3,$ $4x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.2.57.	**5.2.58.**
$z = -4x_1 + x_2 \to \max;$ $4x_2 \geq 8,$ $x_1 + x_2 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}.$	$z = 4x_2 - 4x_3 \to \max;$ $3x_1 + 3x_3 \leq 7,$ $4x_2 + 4x_3 \leq 7,$ $3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.2.59.	**5.2.60.**
$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min;$ $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7,$ $-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4,$ $x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$ $-4x_1 + x_2 - 4x_3 = 4,$ $3x_1 + 3x_2 \geq 5,$ $-x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

5.2.61.	**5.2.62.**
$z = 4x_1 \to \min;$ $2x_2 + x_3 = 7,$ $2x_1 + 2x_2 = 4,$ $2x_1 + x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = -3x_1 + 3x_2 \to \min;$ $2x_1 + 2x_2 = 4,$ $x_1 - x_2 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$
5.2.63.	**5.2.64.**
$z = -x_2 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 = 2,$ $3x_1 + 2x_2 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$	$z = -4x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$ $-2x_1 - x_2 + x_3 = 3,$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8,$ $3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$
5.2.65.	**5.2.66.**
$z = 2x_1 - 4x_2 - x_3 \to \max;$ $4x_1 - 2x_3 = 7,$ $x_2 + x_3 = 0,$ $x_1 \geq 1,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = 3x_1 - x_2 + 4x_3 \to \min;$ $2x_1 - 2x_2 = 4,$ $3x_1 + 4x_2 \geq 6,$ $-4x_1 + x_3 = 7,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$
5.2.67.	**5.2.68.**
$z = x_1 + 3x_2 \to \min;$ $x_1 - 2x_2 = 4,$ $3x_1 \geq 3,$ $-2x_1 - x_2 + x_3 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = 3x_2 + 2x_3 \to \min;$ $-3x_2 - 4x_3 \leq 5,$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4,$ $4x_1 + 3x_3 + x_4 \geq 8,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$
5.2.69.	**5.2.70.**
$z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min;$ $4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0,$ $-4x_1 + 4x_2 - 4x_3 \leq 0,$ $4x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = 3x_1 + x_3 \to \max;$ $2x_2 + x_3 \leq 3,$ $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 7,$ $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$
5.2.71.	**5.2.72.**
$z = -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \max;$ $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6,$ $-x_2 \leq 5,$ $4x_1 + 3x_3 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = x_1 + 3x_2 \to \max;$ $4x_2 \geq 4,$ $x_1 + x_2 = 2,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$
5.2.73.	**5.2.74.**
$z = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max;$ $-x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 4,$ $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8,$ $4x_1 - 4x_2 + 4x_3 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \to \max;$ $x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5,$ $x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 8,$ $2x_3 - 4x_4 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$
5.2.75.	**5.2.76.**
$z = 3x_1 - 3x_2 \to \max;$ $-x_1 + 4x_2 = 5,$ $-2x_1 + x_2 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$	$z = -2x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max;$ $3x_1 + 3x_2 \leq 4,$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 2,$ $3x_1 + 4x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$
5.2.77.	**5.2.78.**
$z = 3x_2 + 2x_3 \to \min;$ $4x_1 + x_3 \leq 0,$ $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6,$ $x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = -x_3 \to \max;$ $x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5,$ $-3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$

5.2.79.	**5.2.80.**
$z = -4x_2 \to \min;$ $x_1 + 4x_2 = 7,$ $3x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$	$z = 3x_1 - 4x_3 + 2x_4 \to \max;$ $3x_1 - 3x_3 + x_4 \leq 0,$ $4x_1 + x_2 + 2x_4 = 6,$ $-2x_1 + 3x_3 - 3x_4 \geq 8,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$
5.2.81.	**5.2.82.**
$z = x_1 - 4x_2 \to \max;$ $3x_1 - x_2 \leq 5,$ $4x_1 + 3x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$	$z = x_1 + 3x_2 \to \min;$ $-4x_1 + x_2 + x_3 = 7,$ $-2x_2 + 3x_3 = 4,$ $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$
5.2.83.	**5.2.84.**
$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$ $4x_1 + 3x_2 \leq 6,$ $-x_1 + 3x_2 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$	$z = -3x_2 - 4x_3 - 3x_4 \to \max;$ $-4x_1 + 4x_3 + 4x_4 \leq 7,$ $2x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 8,$ $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$
5.2.85.	**5.2.86.**
$z = 2x_2 + x_3 \to \min;$ $3x_1 \leq 6,$ $x_1 - 4x_2 + x_3 = 5,$ $4x_1 + 2x_2 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min;$ $4x_1 + x_4 \leq 4,$ $x_1 + x_2 - 3x_3 = 5,$ $-x_1 + 3x_3 - 4x_4 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$
5.2.87.	**5.2.88.**
$z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min;$ $3x_1 + x_3 = 4,$ $3x_1 - 2x_2 \leq 5,$ $-4x_1 - 4x_2 \geq 7,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$ $2x_1 + 4x_2 = 4,$ $4x_1 + 3x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$
5.2.89.	**5.2.90.**
$z = 3x_1 - x_3 \to \max;$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7,$ $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 8,$ $3x_1 + 2x_2 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = x_1 + 3x_3 \to \min;$ $4x_1 + x_2 + x_3 = 0,$ $2x_1 + 2x_2 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$
5.2.91.	**5.2.92.**
$z = 3x_2 + 2x_3 \to \min;$ $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7,$ $-x_2 + 4x_3 = 4,$ $2x_2 + 4x_3 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = x_1 + 3x_3 - 2x_4 \to \min;$ $-3x_2 + 2x_4 \geq 6,$ $x_3 = 8,$ $x_1 + x_2 - 3x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$
5.2.93.	**5.2.94.**
$z = -2x_1 \to \min;$ $-x_1 + 2x_2 \leq 5,$ $x_1 + 3x_2 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$	$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min;$ $3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0,$ $-4x_1 + 4x_3 + 3x_4 \leq 4,$ $4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 8,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$
5.2.95.	**5.2.96.**
$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3,$ $3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 0,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$	$z = 4x_1 + 2x_2 \to \min;$ $x_1 + 4x_2 = 7,$ $4x_2 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,2}.$

5.2.97.	**5.2.98.**
$z = x_2 + x_3 \to \min;$ $x_2 - x_3 \le 8,$ $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5,$ $x_2 + 4x_3 \ge 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = x_1 \to \max;$ $x_2 + 3x_3 = 4,$ $2x_2 + 3x_3 \ge 0,$ $x_1 - x_2 + 4x_3 = 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
5.2.99.	**5.2.00.**
$z = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min;$ $x_1 - 4x_3 = 0,$ $4x_2 - 3x_3 \le 6,$ $2x_2 + 2x_3 \ge 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;$ $-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3,$ $x_2 - x_3 \le 4,$ $-2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 7,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

Тема 6. Двойственность в линейном программировании

6.1. Построение двойственных задач

С каждой задачей линейного программирования связана двойственная задача. Рассмотрим построение двойственной задачи и её экономический смысл на следующем примере.

Исходная задача.

Предприятие выпускает **n** видов изделий с использованием **m** видов ресурсов. Удельные затраты ресурсов на производство единицы изделия известны и обозначаются a_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$. Заданы также ограничения по количественному использованию ресурсов A_i, и стоимость единицы изделий c_j.

Найти план производства продукции, обеспечивающий её максимальное производство в стоимостном выражении.

Введём неизвестные переменные x_j – количество выпускаемых изделий **j**-го вида.

$$
\begin{aligned}
&z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max,\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m,\\
&x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.
\end{aligned}
$$

Двойственная задача.

Предположим, что предприятие решило продать имеющиеся ресурсы и необходимо установить стоимость единицы ресурсов каждого вида. С одной стороны, покупатель стремится приобрести ресурсы по более низким ценам. С другой – предприятие должно получить доход от продажи ресурсов не менее того, который оно имело при производстве изделий. Введём неизвестные переменные y_i – стоимость единицы ресурсов **i**-го вида $i = \overline{1,m}$.

$$
\begin{aligned}
&F = A_1 y_1 + A_2y_2 + \ldots + A_my_m \rightarrow \min,\\
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1,\\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n,\\
&y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.
\end{aligned}
$$

Исходная и двойственная задачи называются парой двойственных задач, и порой неважно какая из задач является исходной, а какая двойственной.

Правила построения двойственных задач

1) Количество переменных двойственной задачи равняется количеству ограничений исходной задачи.

2) Коэффициентами при переменных в целевой функции **F** двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи.

3) Если в исходной задаче требуется определить минимальное значение целевой функции **z**, то в двойственной – требуется определить максимальное значение целевой функции **F** и наоборот.

4) Матрицей коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи является транспонированная матрица этих коэффициентов исходной задачи.

5) Правыми частями ограничений двойственной задачи являются коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи.

6) Определение типов ограничения двойственной задачи.

Определение 1. Если целевая функция задачи на минимум, то неравенства типа «больше или равно» называются **«правильными»**, а неравенства типа «меньше или равно» – **«неправильными».** Если целевая функция задачи на максимум, то неравенства типа «меньше или равно» называются **«правильными»,** а неравенства типа «больше или равно» называются **«неправильными».**

Определение 2. Если на некоторую переменную накладываются ограничения «больше или равно» нуля, то такая переменная называется **«правильной»,** если «меньше или равно» – **«неправильной»**.

Типы ограничения двойственной задачи определяются исходя из значений соответствующих переменных исходной задачи.

Если переменная $\mathbf{x_j}$ исходной задачи является «правильной», то **j**-е ограничение двойственной задачи также является «правильным» относительно своей целевой функции.

Если $\mathbf{x_j}$ – «неправильная», то $\mathbf{j}$-е ограничение также будет «неправильным» относительно своей целевой функции.

Если переменная $\mathbf{x_j}$ исходной задачи может принимать любые значения, то $\mathbf{j}$-е ограничение двойственной задачи будет уравнением.

7) Определение значений переменных двойственной задачи. Значения двойственных переменных определяются исходя из типов соответствующих ограничений исходной задачи:

Если $\mathbf{i}$-е ограничение исходной задачи является «правильным» неравенством относительно своей целевой функции, то переменная $\mathbf{y_i}$ будет также «правильной» переменной.

Если $\mathbf{i}$-е ограничение исходной задачи является «неправильным» неравенством относительно своей целевой функции, то переменная $\mathbf{y_i}$ будет также «неправильной» переменной.

Если $\mathbf{i}$-е ограничение исходной задачи задано в виде уравнения, то переменная $\mathbf{y_i}$ может принимать любые значения.

Пример. Для следующей задачи линейного программирования построить двойственную задачу.

$$
\begin{array}{lr}
z = -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, & \\
-x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 \le -5, & y_1 \\
2x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 = \ 3, & y_2 \\
\qquad 2x_2 - x_3 + x_4 \ge \ 8, & y_3 \\
x_1 \le 0,\ x_3 \ge 0. &
\end{array}
$$

Используя вышеприведённые правила, построим двойственную задачу.

$$
\begin{array}{l}
F = -5y_1 + 3y_2 + 8y_3 \rightarrow \min, \\
-y_1 + 2y_2 \qquad \le -3, \\
\qquad -y_2 + 2y_3 = 1, \\
2y_1 \qquad - y_3 \ge -1, \\
-y_1 + 3y_2 + y_3 = 1, \\
y_1 \ge 0,\ y_3 \le 0.
\end{array}
$$

6.2. Нахождение оптимального решения двойственной задачи

Если найдено оптимальное решение одной из пары двойственных задач, то автоматически можно получить оптимальное решение другой задачи. Имеются несколько теорем двойственности, которые позволяют это сделать.

Первая теорема двойственности.

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача также имеет оптимальное решение, причём $z_{max} = F_{min}$ ($z_{min} = F_{max}$).

Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена на ОДЗ, то другая задача не имеет решения, так как система ограничений противоречива.

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения по причине противоречивости системы ограничений, то другая – не имеет решения либо по той же причине, либо из-за неограниченности целевой функции.

Согласно условиям теоремы, можно найти оптимальное решение двойственной задачи или установить её неразрешимость.

Рассмотрим, как найти оптимальные значения двойственных переменных. Оптимальный план исходной задачи линейного программирования можно найти с помощью формулы $X^{*}=D^{-1}A_0$.

Матрица $\mathbf{D^{-1}}$ состоит из компонент-векторов, которые входят в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

Так как матрица коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов исходной задачи, то оптимальное решение двойственной задачи линейного программирования имеет вид $Y^{*}=C_б{*}D^{-1}$.

При решении задач необязательно пользоваться этой формулой. Значение двойственных переменных определяются с помощью индексной строки последней симплексной таблицы.

Обратную матрицу не находят, если в исходной задаче имеется полный единичный базис. Чтобы найти $\mathbf{y_1}$, необходимо с помощью первого уравнения исходной симплексной таблицы определить столбец, в котором находится базисная переменная этого уравнения.

Оптимальное значение $\mathbf{y_1}$ вычисляется следующим образом: к числу, которое находится на пересечении найденного столбца и индексной строки последней симплекс-таблицы прибавляется число, которое находится на пересечении этого же столбца и строки коэффициентов при переменных целевой функции.

Аналогично, чтобы найти $\mathbf{y_2}$ необходимо в соответствующем столбце взять число, которое находится в индексной строке последней симплекс–таблицы и к нему прибавить число, которое стоит в этом же столбце и строке коэффициентов при переменных целевой функции. Таким образом находятся оптимальные значения всех двойственных переменных. Оптимальное значение целевой функции двойственной задачи, согласно первой теореме двойственности, совпадает с оптимальным значением целевой функции исходной задачи и выписывается из первой клетки индексной строки последней симплексной таблицы.

Пример. Для следующей задачи линейного программирования построить двойственную задачу и, решив одну из них, записать оптимальные решения для обеих.

$$
\begin{array}{ll}
z = 5x_1 - 7x_2 - x_3 \to \max, & \\
2x_1 - x_2 - x_3 \le 2, & y_1 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, & y_2 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1, & y_3 \\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. &
\end{array}
$$

Решение.

Запишем двойственную задачу:

$$
\begin{array}{l}
F = 2y_1 + y_2 + y_3 \to \min, \\
2y_1 + y_2 + y_3 \ge 5, \\
-y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -7, \\
-y_1 + y_2 + 2y_3 \ge -1, \\
y_1 \ge 0,\ y_3 \le 0.
\end{array}
$$

Приведём исходную задачу к канонической форме с целевой функцией на максимум. Это делается для того, чтобы стандартно определить оптимальное решение двойственной задачи.

$$
\begin{array}{l}
z = 5x_1 - 7x_2 - x_3 \to \max, \\
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\
x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\
x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1, \\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.
\end{array}
$$

Задача не имеет исходного опорного плана, поэтому решим её с помощью симплекс–метода с искусственным базисом.

$$z' = 5x_1 - 7x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7 \to \max,$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \quad x_5 + x_7 = 1,$$
$$x_j \geq 0, j=\overline{1,7}.$$

Б	$C_Б$	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
			5	-7	-1	0	0	-M	-M
A_4	0	2	2	-1	**-1**	1	0	0	0
A_6	-M	1	1	-2	**1**	0	0	1	0
A_7	**-M**	**1**	**1**	**1**	**2**	**0**	**-1**	**0**	**1**
z'_j-c_j		0	-5	7	**1**	0	0	0	0
	M	-2	-2	1	**-3**	0	1	0	0
A_4	**0**	**5/2**	**5/2**	**-1/2**	**0**	**1**	**-1/2**	**0**	1/2
A_6	-M	1/2	1/2	-5/2	0	0	1/2	1	-1/2
A_3	-1	1/2	1/2	1/2	1	0	-1/2	0	1/2
z'_j-c_j		-1/2	**-11/2**	13/2	0	0	1/2	0	-1/2
	M	-1/2	**-1/2**	5/2	0	0	-1/2	0	3/2
A_1	5	1	1	-1/5	0	2/5	**-1/5**	0	1/5
A_6	**-M**	**0**	**0**	**-12/5**	**0**	**-1/5**	**3/5**	**1**	**-3/5**
A_3	-1	0	0	3/5	1	-1/5	**-2/5**	0	2/5
z'_j-c_j		5	0	27/5	0	11/5	**-3/5**	0	3/5
	M	0	0	12/5	0	1/5	**-3/5**	0	8/5
A_1	5	1	1	-1	0	1/3	0	1/3	0
A_5	0	0	0	-4	0	-1/3	1	5/3	-1
A_3	-1	0	0	-1	1	-1/3	0	2/3	0
z'_j-c_j		5	0	3	0	2	0	1	0
	M	0	0	0	0	0	0	1	1

Получено оптимальное решение исходной задачи $X_{max}=(1;0;0)$, $z_{max}=5$.

Определим оптимальное значение переменной $\mathbf{y_1}$. В первом уравнении исходной таблицы базисным вектором является вектор $\mathbf{A_4}$. На пересечении столбца $\mathbf{A_4}$ и индексной строки последней таблицы находится оценка 2. К 2 прибавляем коэффициент при переменной $\mathbf{x_4}$ целевой функции 0. Итак, $\mathbf{y_1}=2+0=2$.

Аналогично определяем оптимальные значения $\mathbf{y_2}$ и $\mathbf{y_3}$:

$\mathbf{y_2}=1+M+(-M)=1$, $\mathbf{y_3}=0+M+(-M)=0$.

Оптимальное решение двойственной задачи: $Y_{min}=(2;1;0)$, $F_{min}=5$.

Отметим, что при выводе из базиса искусственного вектора на некотором этапе, соответствующие столбцы необходимо рассчитывать и в последующих таблицах, так как без такого расчета будет невозможно определить оптимальные значения двойственных переменных.

6.3. Задачи

6.1 К следующим задачам линейного программирования построить двойственные задачи.

6.1.01.	**6.1.02.**
$z = x_1 + x_2 \to \max;$ $-4x_1 + 2x_2 \le 8,$ $4x_1 + 4x_2 \le 7,$ $-x_1 = 8,$ $-3x_2 \ge 6,$ $x_1 \ge 0.$	$z = -3x_1 \to \max;$ $x_1 - x_2 = 2,$ $2x_1 \le 5,$ $4x_1 + 2x_2 = 8,$ $x_1 + 4x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0.$
6.1.03.	**6.1.04.**
$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min;$ $-x_1 + 2x_3 = 6,$ $-3x_1 - 4x_2 = 4,$ $2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4,$ $x_2 \le 0.$	$z = 3x_1 + x_2 \to \max;$ $4x_1 = 8,$ $2x_1 + 3x_2 \le 8,$ $-3x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $2x_1 + 4x_2 \ge 5,$ $x_2 \ge 0.$
6.1.05.	**6.1.06.**
$z = 3x_1 - x_2 \to \max;$ $x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0,$ $-4x_1 - 4x_2 + 3x_3 \le 4,$ $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 5,$ $x_2 \ge 0.$	$z = 4x_1 - 4x_3 \to \min;$ $x_1 - 3x_2 + 4x_3 \ge 4,$ $3x_1 + 3x_2 = 6,$ $3x_1 + 4x_2 - 4x_3 \le 6,$ $x_1 + x_2 + 4x_3 = 6,$ $x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$
6.1.07.	**6.1.08.**
$z = 4x_1 - 2x_2 \to \max;$ $-2x_2 = 3,$ $-x_2 \le 7,$ $2x_1 + 3x_2 \ge 0,$ $-x_1 + x_2 \ge 0,$ $x_2 \le 0.$	$z = 4x_1 + x_2 \to \min;$ $-x_2 \ge 6,$ $x_1 + x_2 \ge 0,$ $-2x_1 + 2x_2 \le 6,$ $2x_1 + 3x_2 = 7,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0.$
6.1.09.	**6.1.10.**
$z = 2x_1 - 3x_2 \to \max;$ $-4x_1 = 7,$ $2x_1 + x_2 \ge 8,$ $4x_1 - 3x_2 = 5,$ $2x_1 + 4x_2 \le 7,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \le 0.$	$z = -4x_1 + x_2 \to \min;$ $-x_1 + 4x_2 \ge 8,$ $2x_1 + 3x_2 = 5,$ $3x_1 - x_2 = 6,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \le 0.$
6.1.11.	**6.1.12.**
$z = -4x_1 \to \max;$ $4x_1 - 2x_2 \ge 6,$ $4x_1 + x_2 = 7,$ $-4x_1 + 4x_2 = 6,$ $-3x_1 = 3,$ $x_2 \ge 0.$	$z = x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min;$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4,$ $x_1 + x_2 \ge 7,$ $-2x_1 + 4x_2 \le 6,$ $4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 8,$ $x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

6.1.13.

$$\begin{aligned} z &= 3x_2 \to \min; \\ x_1 - 3x_2 &\le 0, \\ -x_1 &\le 8, \\ x_1 - 3x_2 &= 6. \end{aligned}$$

6.1.14.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - x_2 \to \min; \\ 2x_1 - x_2 &\ge 0, \\ 4x_1 &\le 4, \\ -2x_1 + 3x_2 &\ge 4, \\ x_1 \le 0,\ & x_2 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.15.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \to \min; \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ -4x_1 + 4x_2 &\ge 7, \\ 3x_1 &\le 6, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.16.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + x_2 \to \min; \\ 2x_1 + 2x_2 &\ge 7, \\ -2x_2 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 &\ge 4, \\ x_1 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.17.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 \to \min; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 8, \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 0, \\ x_1 + 3x_3 &\le 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ & x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.18.

$$\begin{aligned} z &= -x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &\le 6, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &\ge 5, \\ x_2 \le 0,\ & x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.19.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 \to \max; \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 8, \\ 4x_1 - 2x_2 &\ge 6, \\ -2x_2 &= 4, \\ 3x_1 - 3x_2 &= 4, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.20.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 3x_2 \to \min; \\ 2x_2 &\le 0, \\ -3x_1 &\le 7, \\ 2x_1 - x_2 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.21.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + x_3 \to \min; \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 &\ge 5, \\ 3x_1 + x_3 &\ge 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\ge 6, \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_2 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.22.

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 0, \\ 4x_1 + 4x_2 &\ge 6, \\ 3x_1 &= 3, \\ 4x_1 - 4x_2 &\ge 5, \\ x_1 \le 0,\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.23.

$$\begin{aligned} z &= -x_1 + 3x_2 \to \max; \\ x_2 &\le 8, \\ 4x_2 &= 0, \\ -x_1 &= 2, \\ 4x_1 - x_2 &\le 4, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.24.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 \to \max; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &\le 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\ge 8, \\ x_1 \le 0,\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.25.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - x_2 \to \max; \\ 4x_1 + 2x_2 &= 4, \\ 4x_1 - x_2 &\le 4, \\ 4x_1 + 4x_2 &= 5, \\ x_1 \le 0,\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.26.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_3 \to \min; \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\ge 3, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ & x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.27.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 \to \max; \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 0, \\ -x_1 + 3x_2 &\ge 6, \\ -3x_1 + 3x_2 &\ge 4, \\ -4x_2 &\le 0, \\ x_1 \le 0,\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.28.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 4x_1 + 4x_2 &\le 8, \\ 2x_1 + x_2 &\ge 4, \\ 2x_1 + 4x_2 &\le 7, \\ x_2 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.29.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - x_3 \to \min; \\ 3x_1 + 4x_3 &\le 6, \\ 4x_1 - x_2 &\le 4, \\ -3x_1 &= 7, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &\le 4, \\ x_1 \ge 0,\ & x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.30.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min; \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\le 8, \\ 3x_2 + 2x_3 &\le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &\ge 0, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.31.

$$\begin{array}{l} z = -3x_1 \to \min; \\ -x_1 \ge 7, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 7, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 0. \end{array}$$

6.1.32.

$$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 4x_1 \ge 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ -4x_1 + x_2 = 7, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.33.

$$\begin{array}{l} z = 4x_2 \to \max; \\ 3x_1 \ge 8, \\ x_1 - 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 4, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.34.

$$\begin{array}{l} z = 4x_2 \to \max; \\ 3x_1 - 4x_2 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 = 2, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.35.

$$\begin{array}{l} z = x_1 + 3x_2 \to \max; \\ -2x_1 + 2x_2 = 4, \\ -x_1 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 = 8, \\ x_1 \ge 0. \end{array}$$

6.1.36.

$$\begin{array}{l} z = x_1 + 4x_2 \to \min; \\ 4x_1 + 4x_2 = 7, \\ -x_1 = 4, \\ -2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.37.

$$\begin{array}{l} z = -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 \to \max; \\ 2x_1 + 2x_3 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -4x_1 - x_3 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$$

6.1.38.

$$\begin{array}{l} z = x_2 \to \min; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 4x_1 - x_2 \le 7, \\ 4x_2 \ge 6, \\ x_2 \le 0. \end{array}$$

6.1.39.

$$\begin{array}{l} z = 4x_1 + 2x_2 \to \min; \\ -3x_1 + 4x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge 7, \\ 3x_2 \le 5, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge 7. \end{array}$$

6.1.40.

$$\begin{array}{l} z = x_1 + 4x_2 \to \min; \\ 4x_1 - 2x_2 \le 6, \\ 3x_2 \ge 4, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 2x_2 = 6, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.41.

$$\begin{array}{l} z = -2x_1 + x_2 \to \max; \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \le 7, \\ -4x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.42.

$$\begin{array}{l} z = -2x_1 + x_3 \to \min; \\ x_1 - 2x_2 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$$

6.1.43.

$$\begin{array}{l} z = -x_2 \to \min; \\ -3x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 6, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 = 4, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.44.

$$\begin{array}{l} z = x_1 \to \min; \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \\ -2x_2 \le 3, \\ 2x_1 = 4, \\ x_1 \ge 0. \end{array}$$

6.1.45.

$$\begin{array}{l} z = 2x_2 + x_3 \to \max; \\ 4x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \le 0. \end{array}$$

6.1.46.

$$\begin{array}{l} z = -x_1 + 4x_2 \to \max; \\ x_1 + 2x_2 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_2 = 4, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.47.

$$\begin{array}{l} z = 4x_2 \to \min; \\ 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ x_1 + 4x_2 = 8, \\ x_1 = 7, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$$

6.1.48.

$$\begin{array}{l} z = 4x_1 + 4x_2 \to \max; \\ 2x_1 + x_2 \ge 0, \\ 4x_1 \le 8, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ x_2 \le 0. \end{array}$$

6.1.49.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 2x_2 \to \max; \\ 4x_1 - 4x_2 &\le 8, \\ -2x_1 + 4x_2 &\ge 4, \\ 4x_1 + 2x_2 &\ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 0, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.50.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min; \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 &\ge 6, \\ 2x_1 + x_3 &\le 7, \\ 2x_1 &\le 5, \\ -2x_2 + 3x_3 &\le 7, \\ x_1 \le 0,\ & x_3 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.51.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max; \\ 2x_2 + 2x_3 &= 8, \\ x_1 - 2x_2 &\le 8, \\ 3x_1 + 4x_3 &= 5, \\ x_1 \le 0,\ & x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.52.

$$\begin{aligned} z &= -4x_2 - x_3 \to \max; \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 4, \\ 4x_3 &\le 7, \\ -3x_1 - 3x_2 &\le 5, \\ -4x_2 &= 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ & x_3 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.53.

$$\begin{aligned} z &= x_2 - 4x_3 \to \min; \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 6, \\ -x_1 + 2x_3 &\le 6, \\ 2x_2 &\ge 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.54.

$$\begin{aligned} z &= 3x_2 \to \min; \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 6, \\ 3x_1 - 4x_2 &\ge 5, \\ 2x_1 + 2x_2 &\ge 8, \\ -3x_1 &\le 4, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.55.

$$\begin{aligned} z &= 2x_2 - x_3 \to \max; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &\le 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &\ge 0, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ & x_3 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.56.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max; \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 &\ge 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 4, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &\le 7, \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ & x_3 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.57.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 4x_2 \to \min; \\ x_1 - 3x_2 &= 6, \\ -4x_1 + 2x_2 &\ge 6, \\ 4x_1 + x_2 &\le 7, \\ -3x_2 &\le 3, \\ x_1 \ge 0,\ & x_2 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.58.

$$\begin{aligned} z &= x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min; \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 &= 3, \\ 3x_1 &= 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\ge 7, \\ x_2 \le 0,\ & x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

6.1.59.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 3x_2 \to \min; \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 &\ge 8, \\ 3x_1 &= 8, \\ x_1 + 4x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\le 7, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.60.

$$\begin{aligned} z &= 3x_3 \to \max; \\ 4x_2 - 2x_3 &\le 4, \\ x_1 &= 6, \\ -4x_1 - 2x_2 &\le 6, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\ge 0, \\ x_2 \ge 0,\ & x_3 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.61.

$$\begin{aligned} z &= x_1 - 4x_2 \to \min; \\ 3x_2 &\ge 4, \\ -2x_2 &\ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 3, \\ 4x_1 + 2x_2 &= 5, \\ x_1 \le 0,\ & x_2 \le 0. \end{aligned}$$

6.1.62.

$$\begin{aligned} z &= -x_2 \to \min; \\ 4x_1 + 4x_2 &\le 7, \\ x_1 + 2x_2 &= 7, \\ -2x_1 + x_2 &\le 2, \\ x_1 + 3x_2 &\le 8. \end{aligned}$$

6.1.63.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 7, \\ 4x_1 + 2x_2 &\ge 4, \\ -2x_1 &\ge 0, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.64.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 4x_2 \to \min; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &\le 7, \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 &\le 8, \\ 3x_2 + 2x_3 &\le 4. \end{aligned}$$

6.1.65.

$$\begin{aligned} z = 3x_2 &\to \min; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &\le 4, \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\ge 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_2 \le 0,\ x_3 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.66.

$$\begin{aligned} z = 4x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ 4x_1 - x_2 &\ge 4, \\ -2x_1 + 2x_2 &\ge 0, \\ 4x_1 + x_2 &\le 5, \\ 3x_2 &= 6, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.67.

$$\begin{aligned} z = -4x_1 + x_2 &\to \max; \\ 4x_1 &= 6, \\ x_1 + 4x_2 &\le 7, \\ 3x_1 + x_2 &= 0, \\ 4x_2 &= 5, \\ x_2 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.68.

$$\begin{aligned} z = -x_2 + 4x_3 &\to \max; \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 &\ge 5, \\ -3x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 2x_1 - 3x_3 &\ge 0, \\ 3x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.69.

$$\begin{aligned} z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\to \min; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &\ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.70.

$$\begin{aligned} z = x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ -3x_1 + 4x_2 &\le 4, \\ -2x_1 + 2x_2 &= 4, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 7, \\ -2x_2 &\ge 3, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.71.

$$\begin{aligned} z = x_1 &\to \min; \\ 3x_1 + x_2 &\le 6, \\ 3x_2 - 2x_3 &\le 0, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 5, \\ 4x_2 + 3x_3 &\ge 4, \\ x_1 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.72.

$$\begin{aligned} z = x_1 + x_2 + 3x_3 &\to \min; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &\ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\ge 5, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 3, \\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.73.

$$\begin{aligned} z = x_1 + x_2 + x_3 &\to \max; \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 &\le 7, \\ -4x_1 + 3x_3 &\le 5, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 &\le 8, \\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.74.

$$\begin{aligned} z = x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\le 3, \\ 3x_1 - 4x_3 &\ge 8, \\ 3x_1 &= 5, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.75.

$$\begin{aligned} z = -2x_1 + x_2 &\to \min; \\ 4x_1 + x_2 &= 7, \\ -x_1 &= 4, \\ 4x_1 - 4x_2 &= 4, \\ 2x_1 &\ge 8, \\ x_1 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.76.

$$\begin{aligned} z = 4x_2 + 4x_3 &\to \min; \\ -4x_2 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\ge 3, \\ 4x_1 &= 5, \\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.77.

$$\begin{aligned} z = 2x_2 + 4x_3 &\to \min; \\ x_2 + 3x_3 &\le 6, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &\ge 7, \\ -4x_1 + x_2 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 &\le 0. \end{aligned}$$

6.1.78.

$$\begin{aligned} z = x_1 - 2x_2 - x_3 &\to \min; \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 8, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 4, \\ 4x_2 + 4x_3 &= 0, \\ -2x_1 - 3x_3 &\le 8, \\ x_2 \le 0,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.79.

$$\begin{aligned} z = -x_1 - 3x_2 + x_3 &\to \min; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &\ge 6, \\ -x_2 &\le 5, \\ x_2 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 5, \\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.80.

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ x_1 + 4x_2 &\le 7, \\ 3x_1 - 2x_2 &\le 0, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

6.1.81.	**6.1.82.**
$\begin{array}{l} z = x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 4x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_2 = 6, \\ -4x_2 = 4, \\ -x_1 = 5, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = x_1 \to \max; \\ 4x_1 = 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$
6.1.83.	**6.1.84.**
$\begin{array}{l} z = -3x_1 \to \min; \\ -4x_1 + 4x_2 \le 0, \\ 3x_1 - 3x_2 \le 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = x_1 + x_2 \to \min; \\ 4x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 6, \\ -2x_2 = 2, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}$
6.1.85.	**6.1.86.**
$\begin{array}{l} z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min; \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4, \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 3x_2 + 4x_3 \to \min; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 \le 0. \end{array}$
6.1.87.	**6.1.88.**
$\begin{array}{l} z = 2x_2 \to \min; \\ x_1 + 4x_2 = 7, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 = 5, \\ x_2 \le 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 2x_1 - 4x_2 \to \min; \\ x_1 \ge 6, \\ 3x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \le 0, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$
6.1.89.	**6.1.90.**
$\begin{array}{l} z = 4x_1 - 4x_2 \to \max; \\ 3x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 3, \\ 3x_1 + x_2 \le 7, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 4x_1 \to \min; \\ -3x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_2 \le 0. \end{array}$
6.1.91.	**6.1.92.**
$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 4x_2 \to \min; \\ 4x_2 = 6, \\ 3x_1 \ge 8, \\ -4x_1 + 3x_2 \le 5, \\ -4x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = -x_2 \to \min; \\ 2x_1 \le 5, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge 5, \\ x_1 - x_2 \le 7, \\ -4x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ x_2 \le 0. \end{array}$
6.1.93.	**6.1.94.**
$\begin{array}{l} z = 3x_1 - 3x_2 \to \max; \\ 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ -2x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 2x_1 - 2x_2 \to \min; \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_2 = 3, \\ 3x_2 \le 8, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$
6.1.95.	**6.1.96.**
$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 3x_2 \to \min; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7, \\ -x_1 + x_3 \ge 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 4, \\ -2x_1 \le 3. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 4x_1 + 4x_2 \to \min; \\ -4x_1 \ge 4, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + 4x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 4x_2 = 7, \\ x_2 \ge 0. \end{array}$

6.1.97.	**6.1.98.**
$z = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max;$ $3x_2 + x_3 = 6,$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 5,$ $x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$	$z = -3x_2 + x_3 \to \min;$ $-4x_1 + 3x_3 = 6,$ $2x_1 - x_2 + x_3 \ge 5,$ $4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 7,$ $-3x_2 + 2x_3 = 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$
6.1.99.	**6.1.00.**
$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \ge 3,$ $x_1 + 3x_2 \le 4,$ $4x_1 - 2x_2 \ge 6,$ $4x_1 = 6,$ $x_2 \ge 0.$	$z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max;$ $-2x_1 + 2x_3 = 0,$ $3x_1 - x_2 + 3x_3 \le 4,$ $x_1 - 3x_2 = 4,$ $x_1 + x_2 - 4x_3 \le 5,$ $x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

6.2. Для следующих задач линейного программирования построить двойственные задачи. Решив одну из задач найти решение другой.

6.2.01.	**6.2.02.**
$z = -4x_1 - 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_3 = 6,$ $-2x_2 \le 6,$ $2x_1 + 4x_2 \ge 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = -4x_2 \to \max;$ $x_1 - 2x_3 = 8,$ $2x_1 + x_2 = 6,$ $-2x_3 \ge 8,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
6.2.03.	**6.2.04.**
$z = -4x_2 + 3x_3 \to \max;$ $-x_1 + x_4 = 5,$ $-x_2 + x_3 = 5,$ $x_1 + 3x_2 \ge 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 3x_2 + x_3 \to \min;$ $3x_2 + 4x_3 \ge 4,$ $4x_3 + x_4 = 5,$ $x_1 + 2x_2 = 0,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
6.2.05.	**6.2.06.**
$z = 2x_2 - x_3 \to \max;$ $4x_2 + x_3 = 6,$ $3x_1 + x_4 = 3,$ $x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -3x_2 + 4x_4 \to \min;$ $x_1 + x_2 = 3,$ $-2x_2 + 2x_3 \ge 5,$ $-4x_3 + x_4 = 5,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
6.2.07.	**6.2.08.**
$z = -x_2 + 4x_3 \to \max;$ $x_1 + 2x_3 \le 7,$ $x_2 - 3x_3 = 5,$ $2x_1 \ge 2,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \ge 0,$ $x_1 - x_2 + x_3 = 2,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
6.2.09.	**6.2.10.**
$z = -3x_2 - 2x_4 \to \max;$ $2x_2 + 2x_3 \ge 5,$ $x_1 + x_4 = 7,$ $2x_2 + 3x_3 \ge 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 3x_1 - 2x_3 \to \max;$ $-2x_1 + x_2 = 5,$ $3x_1 - 2x_3 \le 0,$ $4x_3 \ge 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
6.2.11.	**6.2.12.**
$z = x_1 \to \max;$ $4x_1 + 3x_2 = 4,$ $-4x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$	$z = -x_2 \to \max;$ $3x_1 \ge 5,$ $-2x_1 + x_2 = 6,$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$

6.2.13.

$$\begin{aligned} z = 4x_1 + x_3 &\to \min; \\ x_1 + 4x_3 &= 6, \\ 4x_1 + 4x_2 &\le 4, \\ -4x_2 + 3x_3 &\ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.14.

$$\begin{aligned} z = 4x_2 + x_3 &\to \max; \\ x_2 + x_3 &= 2, \\ 4x_1 - 4x_2 &\le 4, \\ 3x_1 &\ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.15.

$$\begin{aligned} z = -4x_1 - 2x_3 &\to \max; \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5, \\ x_2 + 2x_3 &= 7, \\ 4x_1 &\ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.16.

$$\begin{aligned} z = 4x_2 + 3x_4 &\to \min; \\ x_1 - 3x_2 &= 4, \\ 4x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_2 - x_3 &\ge 2, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.17.

$$\begin{aligned} z = x_2 - x_3 &\to \min; \\ 4x_3 + 4x_4 &\ge 8, \\ x_1 - 4x_4 &= 4, \\ x_2 + 2x_3 &= 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.18.

$$\begin{aligned} z = 4x_1 - 3x_3 &\to \max; \\ x_1 + 4x_2 &\le 4, \\ 3x_2 - x_3 &\le 5, \\ x_1 + 4x_3 &\ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.19.

$$\begin{aligned} z = 3x_1 + 4x_4 &\to \min; \\ x_1 + 2x_3 &= 6, \\ 3x_2 - x_3 &\ge 8, \\ x_2 + x_4 &= 4, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.20.

$$\begin{aligned} z = 4x_3 &\to \max; \\ -3x_1 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_3 &\ge 3, \\ x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.21.

$$\begin{aligned} z = 3x_1 + 2x_2 &\to \min; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\le 7, \\ -4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.22.

$$\begin{aligned} z = -2x_2 + 4x_3 &\to \max; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 7, \\ 2x_2 + 4x_3 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.23.

$$\begin{aligned} z = 4x_1 - 4x_2 &\to \max; \\ x_1 + 2x_2 &\le 5, \\ 3x_1 + x_2 &\ge 0, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,2}. \end{aligned}$$

6.2.24.

$$\begin{aligned} z = x_2 - 2x_3 &\to \min; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\le 6, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.25.

$$\begin{aligned} z = -2x_1 + 2x_3 &\to \min; \\ x_1 &= 2, \\ 2x_1 + 4x_3 &\ge 4, \\ x_2 - 3x_3 &= 3, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.26.

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 4x_4 &\to \min; \\ x_1 + x_2 &= 5, \\ -x_3 + 2x_4 &\ge 4, \\ -4x_3 + x_4 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.27.

$$\begin{aligned} z = -2x_2 + x_3 &\to \min; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.28.

$$\begin{aligned} z = 3x_2 + x_3 &\to \min; \\ 2x_1 - 2x_3 &\le 3, \\ x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 &\ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.29.

$$\begin{aligned} z = -3x_1 - 3x_2 &\to \max; \\ x_1 - x_2 &= 3, \\ 3x_3 &= 6, \\ 3x_2 + 3x_3 &\ge 3, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.30.

$$\begin{aligned} z = -2x_1 + x_2 &\to \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 3x_2 &\ge 3, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.31.

$$\begin{aligned} & z = 4x_1 + x_3 \to \min;\\ & 2x_2 \le 5,\\ & x_1 + 3x_3 = 8,\\ & 2x_2 - x_3 \ge 0,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.32.

$$\begin{aligned} & z = x_1 + 3x_3 \to \min;\\ & x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0,\\ & 4x_2 - x_3 \ge 7,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.33.

$$\begin{aligned} & z = -x_3 + 3x_4 \to \max;\\ & x_1 + 4x_3 = 7,\\ & x_2 + 4x_4 = 5,\\ & 4x_3 + 3x_4 \ge 0,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.34.

$$\begin{aligned} & z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;\\ & 2x_2 + 3x_3 \ge 6,\\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.35.

$$\begin{aligned} & z = 2x_1 - 4x_2 \to \min;\\ & 2x_2 - 2x_3 = 4,\\ & x_3 \ge 0,\\ & x_1 + x_2 = 8,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.36.

$$\begin{aligned} & z = -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min;\\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 4,\\ & 3x_1 + 4x_3 \ge 5,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.37.

$$\begin{aligned} & z = 4x_1 + 2x_3 \to \min;\\ & -3x_2 + 3x_3 = 0,\\ & 3x_1 + 4x_3 \le 6,\\ & -4x_1 + 4x_2 \ge 4,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.38.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 + 3x_3 \to \min;\\ & 2x_1 - x_2 \le 4,\\ & 4x_1 + 3x_3 = 7,\\ & 4x_2 - x_3 \ge 5,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.39.

$$\begin{aligned} & z = 4x_2 \to \min;\\ & 2x_1 - 3x_2 = 3,\\ & 2x_1 + x_2 \ge 3,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$$

6.2.40.

$$\begin{aligned} & z = 2x_1 - 2x_3 \to \min;\\ & x_1 - 4x_4 = 7,\\ & x_2 + 2x_3 = 7,\\ & 4x_3 - 3x_4 \ge 0,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.41.

$$\begin{aligned} & z = -3x_1 - 4x_3 \to \max;\\ & -x_1 - x_3 \le 4,\\ & 2x_1 + 2x_2 = 0,\\ & 2x_2 + 2x_3 \ge 4,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.42.

$$\begin{aligned} & z = 4x_3 + x_4 \to \min;\\ & 3x_2 - 3x_3 \ge 0,\\ & 4x_2 + x_4 = 7,\\ & x_1 - 2x_3 = 8,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.43.

$$\begin{aligned} & z = -3x_2 + 3x_3 \to \min;\\ & -4x_1 + 3x_3 \ge 7,\\ & 3x_1 + x_3 \ge 3,\\ & x_2 + x_4 = 5,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.44.

$$\begin{aligned} & z = x_2 + 2x_3 \to \max;\\ & -2x_2 + x_3 \ge 2,\\ & -x_2 + x_4 = 7,\\ & x_1 + 3x_3 = 5,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.45.

$$\begin{aligned} & z = -4x_2 + 4x_3 \to \min;\\ & 4x_1 - 4x_2 = 5,\\ & 2x_1 - x_2 \ge 4,\\ & x_3 = 6,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.46.

$$\begin{aligned} & z = 4x_2 + 3x_3 \to \max;\\ & x_1 + 3x_2 \le 4,\\ & 4x_2 \ge 4,\\ & 2x_1 + x_3 = 7,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.47.

$$\begin{aligned} & z = x_1 + 3x_2 \to \min;\\ & x_2 + 4x_4 = 7,\\ & x_1 + 3x_3 = 0,\\ & x_3 + 3x_4 \ge 4,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.48.

$$\begin{aligned} & z = 3x_1 + x_2 \to \max;\\ & 3x_1 + 3x_2 \le 6,\\ & 2x_1 + 4x_2 \ge 0,\\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{aligned}$$

6.2.49.	**6.2.50.**
$z = 3x_3 \to \min;$ $x_1 + x_4 = 2,$ $-3x_2 + 2x_3 \geq 5,$ $x_2 + 3x_3 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$ $3x_1 + 2x_2 = 7,$ $x_1 + 3x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}.$
6.2.51.	**6.2.52.**
$z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max;$ $2x_2 - x_3 \geq 8,$ $x_1 + x_2 + 4x_3 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = -x_2 + x_3 \to \max;$ $3x_2 + x_4 = 5,$ $x_1 + 2x_3 = 6,$ $2x_2 + 3x_3 \geq 7,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
6.2.53.	**6.2.54.**
$z = 2x_4 \to \min;$ $x_1 + 4x_3 = 4,$ $x_2 - 2x_4 = 4,$ $x_3 + 4x_4 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = -3x_1 - 2x_2 \to \max;$ $x_1 + x_2 = 2,$ $x_3 + 2x_4 = 5,$ $2x_2 + 2x_4 \geq 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
6.2.55.	**6.2.56.**
$z = x_3 + 3x_4 \to \min;$ $4x_1 - 4x_3 \geq 6,$ $-x_1 + x_2 = 6,$ $4x_3 + x_4 = 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$z = 2x_3 - x_4 \to \max;$ $x_2 + x_3 = 0,$ $4x_1 + 4x_4 \geq 6,$ $2x_1 - 2x_4 \geq 6,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
6.2.57.	**6.2.58.**
$z = 2x_1 - x_2 \to \max;$ $3x_2 \leq 8,$ $-x_1 + x_3 = 3,$ $-4x_1 + 3x_2 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 4x_2 + 3x_3 \to \max;$ $x_1 + x_3 = 6,$ $3x_2 \leq 0,$ $2x_1 + 4x_2 \geq 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$
6.2.59.	**6.2.60.**
$z = -4x_1 + 4x_2 \to \max;$ $-4x_1 + 4x_2 \geq 0,$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = -3x_2 - 3x_3 \to \max;$ $2x_2 - 2x_3 \geq 0,$ $x_1 + x_4 = 4,$ $x_2 + x_3 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
6.2.61.	**6.2.62.**
$z = -2x_2 + 2x_3 \to \min;$ $-3x_1 + 3x_2 \geq 0,$ $-x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 3x_1 + 2x_3 \to \max;$ $-x_2 + 3x_4 \geq 3,$ $x_3 + 2x_4 = 8,$ $x_1 - 2x_2 = 3,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$
6.2.63.	**6.2.64.**
$z = -3x_1 - x_3 \to \max;$ $-3x_1 + 4x_2 = 6,$ $-x_1 + 4x_3 \leq 4,$ $4x_2 - 2x_3 \geq 5,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$ $x_1 \geq 0,$ $x_3 = 7,$ $4x_1 + x_2 = 7,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$
6.2.65.	**6.2.66.**
$z = 2x_1 + x_2 \to \min;$ $x_1 - 4x_3 = 7,$ $x_2 = 7,$ $x_2 - 3x_3 \geq 4,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$	$z = 4x_2 - x_3 \to \min;$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$ $x_2 + 3x_3 \geq 3,$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

6.2.67.

$$\begin{aligned} z &= -2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min; \\ 3x_1 &= 4, \\ x_2 + 4x_3 &= 8, \\ 2x_1 + 4x_3 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.68.

$$\begin{aligned} z &= 2x_3 + x_4 \rightarrow \min; \\ 3x_1 + 4x_4 &\ge 5, \\ 2x_1 + x_2 &= 7, \\ x_3 - 3x_4 &= 8, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.69.

$$\begin{aligned} z &= -3x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\ x_2 + 4x_3 &= 6, \\ x_1 + x_4 &= 8, \\ 4x_1 + 4x_3 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.70.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 \rightarrow \min; \\ 3x_1 &= 8, \\ x_2 - x_3 &= 6, \\ 4x_1 - 2x_3 &\ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.71.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 2x_3 \rightarrow \min; \\ 3x_2 &\le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 5, \\ -4x_1 + x_3 &= 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.72.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_2 &= 8, \\ 3x_1 &\ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,2}. \end{aligned}$$

6.2.73.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8, \\ 2x_1 + x_2 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.74.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.75.

$$\begin{aligned} z &= 4x_2 - 4x_3 \rightarrow \min; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.76.

$$\begin{aligned} z &= -2x_1 + 2x_3 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 3x_3 &\ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.77.

$$\begin{aligned} z &= 4x_3 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_4 &= 5, \\ x_2 - 3x_3 &= 8, \\ -x_3 + 2x_4 &\ge 0, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.78.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\ge 0, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.79.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 2x_3 \rightarrow \min; \\ x_1 - 3x_2 &= 6, \\ 4x_3 &= 0, \\ 4x_2 + 2x_3 &\ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.80.

$$\begin{aligned} z &= 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_3 &= 6, \\ x_2 - 2x_4 &\ge 6, \\ 2x_2 + 4x_4 &\ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.81.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + x_4 \rightarrow \max; \\ 4x_2 + 3x_3 &\ge 8, \\ 4x_2 - 3x_3 &\ge 6, \\ x_1 + x_4 &= 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

6.2.82.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_3 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 4x_3 &\le 7, \\ x_2 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_3 &\ge 0, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.83.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min; \\ -3x_1 + 3x_2 &= 5, \\ -3x_1 + 4x_2 &\ge 0, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,2}. \end{aligned}$$

6.2.84.

$$\begin{aligned} z &= 2x_3 \rightarrow \min; \\ -4x_1 + 2x_3 &\le 5, \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0, \\ -2x_2 + 2x_3 &\ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

6.2.85.	**6.2.86.**
$\begin{array}{l} z = -x_1 + 2x_2 \to \min; \\ -4x_1 - 4x_3 \le 6, \\ 4x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_2 + 4x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = -3x_2 - 4x_3 \to \max; \\ 3x_1 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \ge 4, \\ 4x_2 + x_3 = 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$
6.2.87.	**6.2.88.**
$\begin{array}{l} z = 2x_3 + 2x_4 \to \max; \\ x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 \ge 3, \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 3x_1 + 2x_2 \to \min; \\ 3x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 + 4x_3 \le 8, \\ 4x_3 \ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$
6.2.89.	**6.2.90.**
$\begin{array}{l} z = 4x_2 \to \min; \\ x_1 + x_2 = 8, \\ x_3 \le 7, \\ 3x_1 - 4x_3 \ge 0, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = -3x_2 - x_4 \to \max; \\ x_1 - 4x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 = 6, \\ x_3 - 3x_4 \ge 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$
6.2.91.	**6.2.92.**
$\begin{array}{l} z = 2x_2 + 2x_3 \to \min; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = x_2 - 3x_3 \to \max; \\ x_2 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_3 \ge 7, \\ 4x_1 + x_3 \ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$
6.2.93.	**6.2.94.**
$\begin{array}{l} z = -3x_1 + 3x_4 \to \min; \\ 2x_1 - 2x_4 \ge 6, \\ x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 = 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 2x_2 - 4x_3 \to \max; \\ x_1 - 2x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_3 + 4x_4 \ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$
6.2.95.	**6.2.96.**
$\begin{array}{l} z = -3x_1 + 3x_3 \to \max; \\ 2x_2 + 4x_3 \le 5, \\ 2x_1 - 2x_2 \le 8, \\ x_1 - 3x_3 \ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = -3x_1 + 2x_2 \to \min; \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 8, \\ 4x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$
6.2.97.	**6.2.98.**
$\begin{array}{l} z = 4x_1 + x_3 \to \min; \\ x_1 = 5, \\ 3x_2 - x_3 = 3, \\ -2x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 2x_3 \to \min; \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$
6.2.99.	**6.2.00.**
$\begin{array}{l} z = x_3 - x_4 \to \min; \\ 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_4 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}$	$\begin{array}{l} z = -2x_2 + 4x_3 \to \min; \\ 4x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + 4x_3 \le 4, \\ 4x_1 - 2x_2 \ge 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{array}$

Тема 7. Решение задач транспортного типа

7.1. Задачи линейного программирования транспортного типа

Многие экономические задачи сводятся к задачам транспортного типа, которые являются задачами линейного программирования и могут быть решены симплекс-методом. Однако количество переменных и ограничений транспортной задачи является большими величинами, с другой стороны – ограничения транспортной задачи являются простыми (коэффициенты при переменных равны 1). Поэтому для решения таких задач разработаны более простые точные методы решения.

Типы транспортных задач.

Имеются **m** поставщиков однородной продукции с известными запасами этой продукции и **n** потребителей этой продукции с заданными объёмами потребления. Известны также удельные затраты на перевозку.

Если сумма объёмов запасов продукции равна объёму потребления всех потребителей, то такая задача называется **закрытой транспортной задачей** (то есть $\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$), в противном случае – **открытой**. Для решения транспортной задачи необходимо, чтобы она была закрытой.

Открытую транспортную задачу можно преобразовать в закрытую следующим образом.

Пусть $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$. В этом случае необходимо ввести фиктивного **n+1** потребителя с объёмом потребления $\sum_{i=1}^{m} A_i - \sum_{j=1}^{n} B_j$. Удельные затраты на перевозку от поставщиков к фиктивному потребителю полагаются равными нулю, так как на самом деле такие перевозки осуществляться не будут и некоторая часть продукции останется у поставщиков.

Пусть $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j > \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$. В этом случае необходимо ввести фиктивного **m+1** поставщика с объёмом запасов $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j - \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$. Удельные затраты на перевозку от фиктивного поставщика к потребителям полагаются равными нулю, так как на самом деле такие перевозки осуществляться не будут и некоторую часть продукции потребители недополучат.

В закрытой транспортной задаче все ограничения записываются в виде уравнений:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$I. \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i; \quad i = \overline{1, m},$$

$$II. \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j; \quad j = \overline{1, n},$$

$$III. x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. Закрытая транспортная задача всегда имеет решение.

Теорема 2. Если объёмы запасов продукции и объёмы потребностей является целыми числами, то существует решение транспортной задачи, которое также будет целочисленным.

7.2. Методы построения исходного распределения транспортных задач

Для решения задач симплекс-методом необходимо наличие исходного опорного плана. Решение транспортной задачи также начинается с построения исходного опорного плана, который в транспортной задаче называется **исходным распределением**.

Определим, какое количество базисных переменных должно быть в опорном плане. Так как ограничения транспортной задачи содержат **n+m** уравнений, то количество базисных переменных также должно быть **n+m**, если все уравнения являются линейно независимыми. Однако в транспортной задаче эти уравнения линейно зависимы. Чтобы показать это, найдём суммы всех ограничений (I) и (II).

В каждом полученном уравнении мы будем иметь в левой части сумму всех неизвестных переменных **x**, а в правой части в одном из уравнений – $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i$, а в другом – $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j$. Поскольку задача закрытая, то эти суммы равны, то есть мы получили два одинаковых уравнения (линейно зависимых). Удалив любое из ограничений, мы получим систему из **m+n-1** линейно независимых уравнений. Таким образом, количество переменных в опорном плане должно быть **m+n-1**.

Пример. Имеются три поставщика и четыре потребителя однородной продукции. В следующей таблице заданы объёмы запасов, объёмы потребления и удельные затраты на перевозку продукции.

A_i \ B_j	70	30	80	60
100	8	2	0	1
80	3	4	2	3
120	1	4	1	2

Найти такие объёмы перевозки, при которых общие затраты на перевозку будут минимальными.

Решение.

Проверяем тип транспортной задачи. Определяем объём запасов всех поставщиков (100+80+120=300) и объём потребления всех потребителей (70+30+80+60=240). Запасы продукции больше, чем потребности в ней на 300–240=60 единиц. Для того чтобы преобразовать эту задачу в закрытую, необходимо ввести фиктивного пятого потребителя с объёмом потребностей 60 единиц. Удельные затраты на перевозку продукции от поставщиков к фиктивному потребителю полагаем равными нулю.

A_i \ B_j	70	30	80	60	60
100	8	2	0	1	0
80	3	4	2	3	0
120	1	4	1	2	0

Существует несколько методов построения исходного распределения транспортных задач. Рассмотрим два таких метода.

Метод северо-западного угла. При построении исходного распределения с помощью данного метода, из оставшихся клеток выбирается левая верхняя клетка (северо-западная). На первом этапе выбирается клетка (1,1). В эту клетку записывается объём поставки x_{11}= min $\{A_1,B_1\}$. Величины A_1 и B_1 уменьшаются на данную величину. Ту строку или столбец, где будет получен 0, удаляют из рассмотрения. Затем из оставшихся клеток, рассматривают левую верхнюю клетку и поступают аналогично. Продолжая данный процесс, мы заполним клетку (m,n), причем удалим из рассмотрения и строку и столбец. Если в процессе заполнения клеток придётся вычеркнуть и строку, и столбец, то мы получим вырожденное распределение (количество занятых клеток меньше, чем **m+n-1**). Чтобы этого не произошло, из рассмотрения удаляем что–то одно: или строку, или столбец, а оставшийся столбец или строку считают с нулевой потребностью или запасами. Вычислим значение целевой функции для исходного распределения: $z=8 \times 70 + 2 \times 30 + 2 \times 80 + 2 \times 60 = 900$.

A_i \ B_j	70	30	80	60	60
100	8 **70**	2 **30**	0 **0**	1	0
80	3	4	2 **80**	3 **0**	0
120	1	4	1	2 **60**	0 **60**

Метод минимального элемента. Метод северо-западного угла при заполнении клеток абсолютно не учитывает удельные затраты на перевозку, поэтому значение целевой функции может быть далёким от оптимального и, возможно, понадобится большее количество шагов для его нахождения. Метод минимального элемента наоборот учитывает удельные затраты, поэтому, как правило, значение целевой функции находится ближе к оптимальному решению. Метод минимального элемента отличается от предыдущего метода тем, что из оставшихся клеток выбирается клетка, имеющая наименьшие удельные затраты.

A_i \ B_j	70	30	80	60	60
100	8	2	0 **80**	1	0 **20**
80	3	4 **30**	2	3 **10**	0 **40**
120	1 **70**	4	1	2 **50**	0

Вычислим значение целевой функции при построенном исходном распределении: $z = 4 \times 30 + 3 \times 10 + 1 \times 70 + 2 \times 50 = 320$. Значение целевой функции при исходном распределении, построенным методом минимального элемента (320) значительно меньше, чем значение целевой функции при исходном распределении, построенным методом северо-западного угла (900).

7.3. Метод потенциалов решения транспортной задачи

После построения исходного распределения необходимо определить является ли данное распределение оптимальным, и, если нет, то перейти к другому «лучшему» распределению. Продолжая данный процесс, найдём оптимальное решение транспортной задачи. Для этих целей используется метод потенциалов, который основан на следующей теореме.

Теорема. Если для некоторого распределения транспортной задачи выполняются условия: а) $u_i+v_j=c_{ij}$ – для занятых клеток; б) $u_i+v_j \le c_{ij}$ – для свободных клеток, то данное распределение является оптимальным.

Величины $\mathbf{u_i}$ называют потенциалами строк, а величины $\mathbf{v_j}$ называют потенциалами столбцов.

Алгоритм решения транспортной задачи.

1) Проверка типа транспортной задачи. Если транспортная задача открытая, то её необходимо преобразовать к закрытому типу.

2) Построение исходного распределения транспортной задачи любым из известных методов.

3) Нахождение значений потенциалов строк и столбцов.

Количество уравнений, удовлетворяющих условию а) теоремы равняется **m+n-1** (так как распределение должно быть невырожденным), а количество неизвестных $\mathbf{u_i}$ и $\mathbf{v_j}$ равняется **m+n**. Таким образом, количество переменных больше количества уравнений, причём все уравнения линейно независимы. Решение такой системы линейных уравнений является неопределённым, поэтому одному из потенциалов нужно присвоить любое значение. По традиции $\mathbf{u_1=0}$. Получается система из **m+n-1** уравнений с **m+n-1** неизвестными переменными. Эту систему можно решить любым методом и получить определённое решение. На практике значения потенциалов вычисляется ещё проще. Рассматриваются занятые клетки, для которых один из потенциалов известен, и для них вычисляются значения неизвестных потенциалов.

A_i \ B_j	70	30	80	60	60	
100	8 -6	2 2	0 **80**	1 2	0 **20**	$u_1=0$
80	3 -1	4 **30**	2 -2	3 **10**	0 **40**	$u_2=0$
120	1 **70**	4 -1	1 -2	2 **50**	0 -1	$u_3=-1$
	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=0$	$v_4=3$	$v_5=0$	

4) Вычисление оценок для свободных клеток:

Исходя из соотношения б) теоремы можно записать следующую формулу для вычисления оценок свободных клеток: $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Для того чтобы оценки не перепутать с объёмами перевозок, они (оценки) заключаются в кружки.

5) Проверка распределения на оптимальность. Если оценки всех свободных клеток меньше или равны нулю, то данное распределение является опти-

мальным. Необходимо вычислить оптимальное значение целевой функции **z** и выписать оптимальные объёмы перевозок в виде матрицы. Если распределение не является оптимальным, то переходим к пункту 6.

6) Построение цикла пересчёта. В качестве исходной клетки выбирается клетка с наибольшей положительной оценкой. Эта клетка помечается знаком «+». В неё необходимо записать некоторый объём поставки. Но тогда нарушится баланс по данному столбцу, следовательно, одну из занятых клеток данного столбца необходимо пометить знаком «–», то есть уменьшить объём поставки на такую же величину. Но тогда изменится баланс по данной строке, следовательно, какую-то занятую клетку данной строки необходимо пометить знаком «+». Данный процесс продолжается до тех пор, пока не будет поставлен знак «–» в строке, где находилась исходная клетка.

Теорема. Для любой свободной клетки существует цикл пересчёта и притом единственный.

7) Определение объёма перемещаемой продукции. При определении объёма продукции, перемещаемого по циклу пересчёта, мы должны исходить из следующих двух соображений:

а) после преобразования в клетках таблицы не должны получиться отрицательные числа;

б) одна из занятых клеток должна стать свободной.

Для того, чтобы эти условия выполнялись, необходимо выбрать следующий объём перемещаемой продукции: $\theta=\min\{x_{ij}\}^{-}$, где $\{x_{ij}\}^{-}$ – объёмы перевозок из клеток цикла пересчёта, помеченных знаком «–». $\theta = \min\{20; 30\} = 20$

8) Построение новой таблицы.

К значениям клеток, помеченных знаком «+», прибавляется θ. От значений клеток, помеченных знаком «–», вычитается θ. Значение поставок остальных клеток переписывается без изменений. Переходим на выполнение пункта 3.

B_j / A_i	70	30	80	60	60	
100	8 -8	2 **20**	0 **80**	1 0	0 -2	$u_1=0$
80	3 -1	4 **10**	2 0	3 **10**	0 **60**	$u_2=2$
120	1 **70**	4 -1	1 0	2 **50**	0 -1	$u_3=1$
	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=0$	$v_4=3$	$v_5=-2$	

Для того, чтобы вычислить значение целевой функции, достаточно воспользоваться формулой: $z_1 = z_0 - \theta \times б_{ij}$, $z_1 = 320 - 2 \times 20 = 280$

Поскольку в последней таблице нет положительных оценок, то данное распределение является оптимальным: $z_{min} = 280$.

$$x_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ 70 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Данное распределение является оптимальным, но не единственным, так как имеются нулевые оценки. Так как пятый потребитель является фиктивным, то соответствующий столбец в оптимальной матрице перевозок можно не записывать. Для нашего примера фиктивный объём перевозок ($x_{25} = 60$), показывает, что 60 единиц продукции останутся невостребованными у второго поставщика.

Иногда бывают транспортные задачи с целевой функцией на max. Такие задачи решаются аналогично, за исключением того, что распределение будет оптимальным в том случае, когда оценки всех свободных клеток будут больше или равны нулю.

7.4. Усложнённые постановки транспортных задач

Разработанные методы решения транспортных задач позволяют проводить построение моделей модифицированных транспортных задач и приводить их к стандартному виду.

Рассмотрим некоторые усложненные постановки и покажем, как преобразовать их к стандартной транспортной задаче.

Сохранение установившихся связей

Некоторые поставщики могут быть связаны с отдельными потребителями долгосрочными договорами на поставку определённых объёмов продукции. Однако в результате решения задачи может оказаться, что соответствующие объёмы не будут поставлены нужным потребителям. Чтобы этого не произошло, необходимо перед решением задачи уменьшить на заданную величину объёмы запасов и объёмы потребления соответствующих поставщика и потребителя. Затем решить задачу обычным способом. После нахождения решения соответствующий оптимальный объём поставки увеличить на заданную величину.

Например: пусть второй поставщик связан договором с третьим потребителем на поставку продукции в объёме 30 тонн. Перед решением задачи уменьшим запасы второго поставщика и потребность третьего потребителя на 30 тонн. После решения задачи увеличим значение клетки (2,3) последней таблицы на 30 тонн.

Условие полного обеспечения некоторого потребителя или полный вывоз продукции от некоторого поставщика

Такие условия возникают, когда исходная задача является открытой.

Пусть суммарные объёмы запасов продукции, имеющейся у поставщиков, меньше суммарной потребности в этой продукции потребителей. Для того чтобы преобразовать задачу к закрытому типу, необходимо ввести фиктивного поставщика. В этом случае некоторые потребители недополучат определённые объёмы продукции. Чтобы этого не произошло с заданным потребителем, необходимо в клетку, соответствующую поставке от фиктивного поставщика заданному потребителю, записать очень большие удельные транспортные затраты **M**. Затем задача решается обычным способом.

Если суммарные объёмы запасов продукции, имеющейся у поставщиков, больше суммарной потребности в данной продукции потребителей, то для преобразования задачи к закрытому типу необходимо ввести фиктивного потребителя. В этом случае у некоторых поставщиков останутся невостребованными определённые объёмы продукции. Чтобы этого не произошло с заданным поставщиком, необходимо в клетку, соответствующую поставке от данного поставщика фиктивному потребителю, записать очень большие удельные транспортные затраты **M**.

Ограничения объёмов поставок между некоторыми поставщиками и потребителями

Пусть по некоторым причинам объём поставки между **i**-м поставщиком и **j**-м потребителем ограничен некоторой величиной **D**. Это имеет смысл, когда $A_i > D$ и $B_j > D$. В этом случае столбец, соответствующий **j**-му потребителю, разбивают на два: **j** и **j′**. Объём потребности потребителя **j** полагают равным **D**, а потребителя **j′** – $(B_j - D)$. Ниже на рисунках приведены исходная и преобразованная транспортные таблицы.

	B_1	B_2	…	$\mathbf{B_j}$	…	B_m
A_1	C_{11}	C_{12}	…	$\mathbf{C_{1j}}$	…	C_{1m}
A_2	C_{21}	C_{22}	…	$\mathbf{C_{2j}}$	…	C_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{A_i}$	$\mathbf{C_{i1}}$	$\mathbf{C_{i2}}$	…	C_{ij}	…	$\mathbf{C_{im}}$
			…	…	…	…
A_n	C_{n1}	C_{n2}	…	$\mathbf{C_{nj}}$	…	C_{nm}

	B_1	B_2	…	**D**	$\mathbf{B_j - D}$	…	B_m
A_1	C_{11}	C_{12}	…	$\mathbf{C_{1j}}$	$\mathbf{C_{1j'}}$	…	C_{1m}
A_2	C_{21}	C_{22}	…	$\mathbf{C_{2j}}$	$\mathbf{C_{2j'}}$	…	C_{2m}
…	…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{A_i}$	$\mathbf{C_{i1}}$	$\mathbf{C_{i2}}$	…	C_{ij}	**M**	…	$\mathbf{C_{im}}$
			…	…	…	…	…
A_n	C_{n1}	C_{n2}	…	$\mathbf{C_{nj}}$	$\mathbf{C_{nj'}}$	…	C_{nm}

Далее транспортную задачу решают методом потенциалов. Наличие больших удельных транспортных затрат в клетке (i,j′) позволяет избежать поставки в данную клетку. Таким образом, объём поставки от **i**-го поставщика **j**-му потребителю не может быть больше **D**. После получения оптимального распределения объёмы соответствующих клеток столбцов **j** и **j′** объединяются.

7.5. Задачи

7.1. В следующих транспортных задачах найти такие объёмы перевозок однородной продукции от поставщиков к потребителям при которых общие затраты на перевозку продукции будут минимальными. В таблицах заданы объёмы запасов продукции у поставщиков ($\mathbf{A_i}$), объемы потребности в продукции потребителей ($\mathbf{B_j}$) и удельные затраты на перевозку единицы продукции от поставщиков к потребителям (пересечение соответствующих строк и столбцов таблицы).

7.1.01

A_i \ B_j		1	2	3
		65	158	63
1	175	7	2	3
2	37	4	7	5
3	195	6	5	6

7.1.02

A_i \ B_j		1	2	3
		6	163	16
1	33	5	5	7
2	188	5	3	3
3	75	5	1	5
4	115	2	5	6

7.1.03

A_i \ B_j		1	2	3
		48	144	175
1	68	3	5	7
2	34	7	5	3
3	141	1	2	3

7.1.04

A_i \ B_j		1	2
		173	80
1	12	4	6
2	195	6	5
3	152	4	2
4	97	7	2
5	127	2	5

7.1.05

A_i \ B_j		1	2
		140	184
1	67	3	7
2	48	6	3
3	88	6	3
4	175	4	4

7.1.06

A_i \ B_j		1	2	3	4
		37	127	43	34
1	21	2	1	1	4
2	9	7	0	2	4
3	168	6	2	0	7

7.1.07

A_i \ B_j		1	2	3	4
		92	29	114	199
1	21	5	1	4	6
2	72	0	7	3	3
3	95	4	6	3	0

7.1.08

A_i \ B_j		1	2
		176	6
1	24	4	6
2	25	1	1
3	129	6	6
4	112	4	2

7.1.09

A_i \ B_j		1	2
		49	168
1	37	6	1
2	83	0	7
3	71	2	2
4	160	2	0
5	98	3	6

7.1.10

A_i \ B_j		1	2	3	4
		127	99	160	99
1	159	6	6	0	4
2	171	2	0	4	0
3	80	7	3	5	2

7.1.11

A_i \ B_j		1	2	3
		135	23	129
1	10	5	1	6
2	81	2	2	1
3	192	1	6	1

7.1.12

A_i \ B_j		1	2
		137	164
1	113	2	6
2	126	7	7
3	106	2	6
4	138	0	3
5	127	4	1

7.1.13

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		172	68	114	5	194
1	99	6	7	7	1	1
2	100	1	6	7	0	5

7.1.14

A_i \ B_j		1	2
		144	110
1	102	3	4
2	156	2	7
3	57	6	7
4	65	6	6
5	12	4	4

7.1.15

A_i \ B_j		1	2	3
		195	198	174
1	28	2	6	6
2	173	3	4	0
3	36	7	4	6
4	109	2	3	2

7.1.16

A_i \ B_j		1	2	3	4
		126	90	77	163
1	117	2	2	7	7
2	125	2	1	5	2

7.1.17

A_i \ B_j		1	2
		176	99
1	193	7	4
2	159	7	0
3	192	4	2
4	24	6	2
5	190	6	1

7.1.18

A_i \ B_j		1	2	3
		77	195	117
1	40	5	1	7
2	82	3	4	1
3	86	0	1	4

7.1.19

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		15	110	12	88	118
1	190	7	0	6	7	3
2	165	7	7	0	3	5

7.1.20

A_i \ B_j		1	2	3	4
		43	107	104	19
1	166	3	5	1	6
2	9	7	5	5	5
3	42	4	1	5	5

7.1.21

A_i \ B_j		1	2
		36	117
1	79	1	7
2	168	6	4
3	42	4	7
4	90	3	5
5	76	1	1

7.1.22

A_i \ B_j		1	2	3
		68	67	57
1	170	1	5	7
2	184	6	0	2
3	138	4	1	4

7.1.23

A_i \ B_j		1	2	3	4
		19	21	193	139
1	57	3	6	5	1
2	12	3	3	3	0
3	145	4	2	7	6

7.1.24

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		94	74	187	196	161
1	76	2	1	2	3	3
2	136	3	2	3	0	3

7.1.25

A_i \ B_j		1	2
		23	149
1	112	0	1
2	62	5	2
3	164	7	1
4	141	1	7

7.1.26

A_i \ B_j		1	2	3
		141	132	26
1	50	1	6	6
2	86	7	3	1
3	166	7	3	3
4	37	3	7	3

7.1.27

A_i \ B_j		1	2	3	4
		89	95	5	11
1	68	4	5	2	4
2	10	7	3	5	4
3	91	2	4	7	4

7.1.28

A_i \ B_j		1	2
		13	18
1	115	7	1
2	8	1	7
3	5	1	2
4	112	4	7
5	197	4	5

7.1.29

A_i \ B_j		1	2	3
		22	25	130
1	166	4	0	1
2	179	4	7	5
3	73	4	2	6

7.1.30

A_i \ B_j		1	2	3
		50	10	94
1	141	4	2	1
2	55	0	0	5
3	19	6	4	4

7.1.31

A_i \ B_j		1	2	3
		144	76	136
1	60	4	1	2
2	36	1	4	7
3	100	4	5	2
4	50	1	5	5

7.1.32

A_i \ B_j		1	2	3
		197	28	30
1	186	6	5	3
2	192	0	7	6
3	170	2	2	5
4	127	0	2	4

7.1.33

A_i \ B_j		1	2
		50	114
1	99	6	6
2	115	0	3
3	90	1	3
4	46	5	0
5	157	3	7

7.1.34

A_i \ B_j		1	2
		189	7
1	92	2	5
2	44	2	0
3	116	7	7
4	32	4	4
5	71	0	3

7.1.35

A_i \ B_j		1	2	3
		62	113	105
1	99	3	4	5
2	108	0	5	5
3	45	7	4	4

7.1.36

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		90	14	79	30	111
1	180	3	3	5	0	1
2	73	1	7	6	1	1

7.1.37

A_i \ B_j		1	2	3
		135	49	162
1	109	1	5	5
2	112	7	2	4
3	150	3	1	1
4	81	0	1	2

7.1.38

A_i \ B_j		1	2	3	4
		184	89	166	184
1	157	5	2	3	3
2	67	3	6	3	3

7.1.39

A_i \ B_j		1	2	3
		172	81	170
1	25	4	3	5
2	82	3	3	0
3	28	3	5	6

7.1.40

A_i \ B_j		1	2	3
		86	128	80
1	174	3	5	2
2	30	6	6	2
3	37	2	6	0
4	159	7	3	6

7.1.41

A_i \ B_j		1	2	3
		57	123	150
1	25	4	4	0
2	196	2	1	6
3	13	3	6	5
4	196	6	3	5

7.1.42

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		136	37	190	26	57
1	111	2	2	3	2	6
2	46	3	4	1	6	4

7.1.43

A_i \ B_j		1	2	3
		84	157	40
1	157	1	5	4
2	81	2	6	2
3	10	3	2	5
4	64	6	1	1

7.1.44

A_i \ B_j		1	2
		100	151
1	155	4	1
2	14	1	3
3	95	5	1
4	87	1	0
5	127	0	7

7.1.45

A_i \ B_j		1	2	3
		92	124	48
1	49	3	7	3
2	28	6	4	2
3	67	5	1	0

7.1.46

A_i \ B_j		1	2	3
		195	138	6
1	104	7	5	6
2	94	0	7	3
3	105	5	3	2
4	146	3	7	2

7.1.47

A_i \ B_j		1	2	3
		176	172	185
1	64	4	0	0
2	76	5	1	3
3	26	4	0	3

7.1.48

A_i \ B_j		1	2
		48	42
1	40	7	6
2	45	5	7
3	69	2	0
4	74	3	6

7.1.49

A_i \ B_j		1	2
		61	31
1	51	0	7
2	154	6	1
3	7	5	1
4	182	4	5
5	162	4	4

7.1.50

A_i \ B_j		1	2	3
		79	149	194
1	74	6	6	4
2	63	0	0	0
3	159	3	4	2

7.1.51

A_i \ B_j		1	2
		33	149
1	162	1	4
2	83	5	6
3	124	5	3
4	63	1	4
5	152	5	2

7.1.52

A_i \ B_j		1	2	3	4
		119	145	107	39
1	51	2	4	0	5
2	111	0	7	4	5
3	138	0	5	7	5

7.1.53

A_i \ B_j		1	2	3	4
		73	186	173	107
1	11	5	0	3	2
2	20	1	3	6	5

7.1.54

A_i \ B_j		1	2	3	4
		90	101	6	45
1	38	7	2	5	1
2	103	7	3	6	4
3	91	1	2	2	1

7.1.55

A_i \ B_j		1	2	3	4
		187	30	10	129
1	69	7	7	1	3
2	151	1	3	7	0

7.1.56

A_i \ B_j		1	2	3
		23	137	107
1	161	4	4	2
2	156	1	3	4
3	167	1	2	7

7.1.57

A_i \ B_j		1	2
		188	63
1	141	2	0
2	55	1	3
3	102	7	3
4	135	0	4

7.1.58

A_i \ B_j		1	2	3
		163	48	155
1	185	2	0	6
2	62	3	0	4
3	21	4	1	0
4	101	5	6	4

7.1.59

A_i \ B_j		1	2
		6	176
1	183	4	3
2	191	4	4
3	161	7	2
4	166	3	5
5	32	2	2

7.1.60

A_i \ B_j		1	2	3	4
		188	20	22	105
1	128	4	2	7	6
2	5	2	6	6	4
3	125	4	5	0	6

7.1.61

A_i \ B_j		1	2	3	4
		197	9	173	166
1	189	7	2	2	0
2	52	2	7	5	5

7.1.62

A_i \ B_j		1	2	3
		131	96	93
1	83	0	7	1
2	111	6	4	0
3	95	2	6	4

7.1.63

A_i \ B_j		1	2
		144	93
1	188	2	5
2	58	5	4
3	137	0	5
4	41	1	7

7.1.64

A_i \ B_j		1	2
		168	158
1	81	2	6
2	159	1	5
3	19	4	6
4	160	4	2

7.1.65

A_i \ B_j		1	2
		81	63
1	135	1	7
2	7	1	5
3	52	2	3
4	184	5	2

7.1.66

A_i \ B_j		1	2	3	4
		75	198	97	96
1	169	4	1	3	6
2	88	7	1	0	0

7.1.67

A_i \ B_j		1	2	3	4
		140	88	93	182
1	96	7	0	2	5
2	157	7	6	3	5
3	7	1	2	2	6

7.1.68

A_i \ B_j		1	2	3
		154	118	76
1	105	5	2	3
2	151	0	7	4
3	62	3	4	7
4	52	6	1	0

7.1.69

B_j / A_i		1	2	3	4
		155	114	57	190
1	45	6	2	1	6
2	164	4	5	3	0

7.1.70

B_j / A_i		1	2	3
		146	17	36
1	31	2	5	0
2	82	5	0	7
3	127	7	5	6

7.1.71

B_j / A_i		1	2	3	4
		98	29	102	69
1	28	4	2	1	6
2	69	0	4	5	3

7.1.72

B_j / A_i		1	2	3	4
		55	124	173	158
1	98	0	5	2	3
2	23	2	5	6	2

7.1.73

B_j / A_i		1	2	3	4
		71	185	199	94
1	34	4	2	6	1
2	126	4	6	2	0

7.1.74

B_j / A_i		1	2	3	4
		113	149	8	65
1	183	2	6	2	4
2	49	0	4	3	1
3	180	4	7	2	2

7.1.75

B_j / A_i		1	2	3	4	5
		136	138	194	87	15
1	169	0	6	1	1	1
2	143	1	7	2	5	4

7.1.76

B_j / A_i		1	2	3
		6	51	125
1	163	4	7	2
2	29	1	2	1
3	12	6	1	5

7.1.77

B_j / A_i		1	2	3	4	5
		16	104	189	8	89
1	149	1	3	5	1	3
2	107	4	2	0	3	4

7.1.78

B_j / A_i		1	2	3	4	5
		175	173	70	175	31
1	25	6	4	3	4	0
2	143	7	1	2	3	0

7.1.79

B_j / A_i		1	2	3	4
		89	161	59	157
1	183	0	2	4	7
2	10	1	7	6	1

7.1.80

B_j / A_i		1	2	3	4
		74	112	186	118
1	141	3	2	6	7
2	80	0	5	0	7
3	170	3	7	6	0

7.1.81

B_j / A_i		1	2	3	4	5
		7	65	196	187	121
1	23	1	3	7	4	1
2	51	5	4	3	6	6

7.1.82

B_j / A_i		1	2	3	4
		157	120	166	191
1	119	7	4	6	3
2	90	6	4	3	0
3	141	1	1	6	4

7.1.83

B_j / A_i		1	2	3
		56	102	111
1	128	6	7	3
2	97	3	7	5
3	138	0	0	2
4	59	7	1	2

7.1.84

B_j / A_i		1	2
		96	183
1	139	2	5
2	39	7	6
3	95	6	5
4	33	5	7
5	165	1	3

7.1.85

B_j / A_i		1	2	3
		19	119	43
1	198	1	7	4
2	36	2	4	5
3	198	5	7	1

7.1.86

B_j / A_i		1	2
		188	18
1	146	7	1
2	114	2	6
3	19	5	1
4	163	3	2
5	32	2	5

7.1.87

B_j / A_i		1	2
		35	171
1	146	6	6
2	83	3	4
3	89	5	7
4	35	3	3

7.1.88

B_j / A_i		1	2
		33	113
1	176	2	6
2	146	1	6
3	94	3	4
4	38	5	1

7.1.89

B_j / A_i		1	2	3	4	5
		165	7	19	93	191
1	106	5	0	2	0	6
2	11	6	3	7	4	4

7.1.90

B_j / A_i		1	2	3
		143	163	166
1	89	4	5	3
2	9	1	3	3
3	181	6	5	7
4	156	7	4	6

7.1.91

B_j / A_i		1	2	3	4
		16	35	54	164
1	25	2	3	5	4
2	161	4	2	2	4

7.1.92

B_j / A_i		1	2	3	4
		131	119	98	170
1	41	6	3	1	3
2	122	3	1	6	6

7.1.93

B_j / A_i		1	2	3	4
		33	140	157	117
1	145	2	3	7	2
2	75	1	5	7	1

7.1.94

B_j / A_i		1	2	3	4
		95	57	132	29
1	145	3	0	2	1
2	103	6	2	4	4
3	91	7	2	4	7

7.1.95

B_j / A_i		1	2	3	4
		124	53	136	136
1	111	0	6	7	6
2	113	0	3	7	1
3	77	5	2	6	2

7.1.96

B_j / A_i		1	2	3
		157	165	45
1	41	4	2	6
2	145	0	4	7
3	133	6	1	2

7.1.97

B_j / A_i		1	2	3	4
		42	60	97	167
1	89	7	2	5	7
2	56	3	2	0	1
3	153	4	2	7	2

7.1.98

B_j / A_i		1	2	3	4	5
		20	104	45	62	169
1	46	1	4	4	3	7
2	21	0	3	3	1	7

7.1.99

B_j / A_i		1	2
		103	77
1	158	2	6
2	135	1	3
3	27	2	7
4	43	2	3
5	97	1	5

7.1.100

B_j / A_i		1	2	3	4	5
		25	86	13	76	137
1	116	5	3	5	0	3
2	104	3	1	0	1	5

7.2. В следующих задачах о назначениях необходимо закрепить работы (Р.i) за исполнителями (И.j) таким образом чтобы общая эффективность выполнения работ была максимальной. В таблицах задана эффективность выполнения соответствующих работ исполнителями (пересечение соответствующих строк и столбцов таблицы).

7.2.01

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	4	7	7
Р.2	6	1	6	3
Р.3	5	6	4	1
Р.4	5	5	5	6

7.2.02

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	4	2	2
Р.2	1	6	7	5
Р.3	4	6	5	3
Р.4	3	1	1	4

7.2.03

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	4	1	3
Р.2	6	4	5	1
Р.3	2	3	5	2
Р.4	1	0	6	6

7.2.04

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	2	7	6
Р.2	6	6	4	7
Р.3	4	3	2	2
Р.4	3	2	1	0

7.2.05

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	2	7	7
Р.2	1	1	2	1
Р.3	3	6	3	7
Р.4	1	0	5	4

7.2.06

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	5	5	4
Р.2	4	7	7	0
Р.3	1	5	6	4
Р.4	6	1	2	4

7.2.07

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	3	1	0
Р.2	7	7	7	1
Р.3	0	5	3	2
Р.4	3	3	4	1

7.2.08

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	0	2	7
Р.2	4	1	3	7
Р.3	0	2	1	5
Р.4	6	7	2	0

7.2.09

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	0	0	3
Р.2	2	6	3	0
Р.3	2	3	5	1
Р.4	7	3	4	4

7.2.10

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	2	5	7
Р.2	3	0	5	2
Р.3	2	3	6	3
Р.4	4	3	3	7

7.2.11

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	0	0	1
Р.2	3	7	4	3
Р.3	6	3	7	3
Р.4	1	3	7	7

7.2.12

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	4	3	3
Р.2	1	5	1	5
Р.3	2	6	5	6
Р.4	2	5	0	7

7.2.13

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	4	3	4
Р.2	3	4	7	3
Р.3	2	4	7	6
Р.4	4	6	0	7

7.2.14

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	6	4	4
Р.2	6	7	0	0
Р.3	2	7	0	3
Р.4	2	6	7	1

7.2.15

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	3	0	1
Р.2	0	2	0	0
Р.3	2	3	7	4
Р.4	6	4	4	3

7.2.16

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	2	5	5
Р.2	1	0	0	0
Р.3	6	5	2	2
Р.4	4	3	0	4

7.2.17

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	2	5	7
Р.2	6	5	5	2
Р.3	7	0	0	4
Р.4	2	3	4	1

7.2.18

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	0	6	6
Р.2	2	1	2	4
Р.3	3	5	2	2
Р.4	5	2	3	3

7.2.19

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	3	7	2
Р.2	5	5	6	6
Р.3	6	0	5	6
Р.4	4	0	3	2

7.2.20

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	7	5	6
Р.2	6	3	6	3
Р.3	4	3	6	6
Р.4	2	1	2	0

7.2.21

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	1	3	5
Р.2	4	5	0	3
Р.3	3	0	1	4
Р.4	3	0	6	5

7.2.22

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	3	5	6
Р.2	2	7	4	5
Р.3	3	4	6	4
Р.4	6	2	1	2

7.2.23

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	3	7	5
Р.2	6	4	4	3
Р.3	3	6	4	6
Р.4	4	4	0	2

7.2.24

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	5	1	0
Р.2	3	1	7	3
Р.3	4	7	7	3
Р.4	6	4	5	6

7.2.25

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	3	0	1
Р.2	6	1	7	2
Р.3	3	6	2	5
Р.4	2	4	3	2

7.2.26

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	2	0	0
Р.2	7	7	6	2
Р.3	7	3	4	3
Р.4	4	3	3	3

7.2.27

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	7	0	6
Р.2	7	4	0	6
Р.3	5	3	3	5
Р.4	4	6	7	3

7.2.28

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	2	4	6
Р.2	1	3	0	7
Р.3	0	4	4	7
Р.4	2	7	2	3

7.2.29

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	2	4	3
Р.2	5	7	2	4
Р.3	7	2	1	5
Р.4	7	7	7	7

7.2.30

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	0	0	5
Р.2	0	6	3	1
Р.3	6	3	0	0
Р.4	1	3	6	0

7.2.31

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	7	6	5
Р.2	6	3	0	6
Р.3	2	6	4	5
Р.4	5	1	6	2

7.2.32

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	6	5	6
Р.2	5	4	5	5
Р.3	3	5	5	6
Р.4	1	2	0	5

7.2.33

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	6	3	1
Р.2	3	6	2	3
Р.3	7	1	7	1
Р.4	0	0	7	3

7.2.34

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	0	4	6
Р.2	0	1	7	7
Р.3	2	3	6	4
Р.4	7	1	1	6

7.2.35

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	4	4	3
Р.2	3	1	6	3
Р.3	7	0	3	1
Р.4	0	2	4	6

7.2.36

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	7	7	5
Р.2	2	7	2	1
Р.3	5	2	3	5
Р.4	6	1	2	1

7.2.37

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	0	5	1
Р.2	7	6	3	6
Р.3	4	6	1	6
Р.4	0	4	7	6

7.2.38

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	1	4	0
Р.2	7	2	2	2
Р.3	6	2	0	6
Р.4	6	5	4	5

7.2.39

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	2	1	5
Р.2	0	7	1	1
Р.3	2	7	4	5
Р.4	7	1	4	2

7.2.40

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	1	7	0
Р.2	4	7	4	3
Р.3	7	7	3	1
Р.4	0	1	0	7

7.2.41

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	3	7	6
Р.2	7	4	3	1
Р.3	0	0	1	3
Р.4	1	5	1	6

7.2.42

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	1	2	6
Р.2	4	6	1	6
Р.3	6	1	6	1
Р.4	2	6	2	2

7.2.43

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	0	2	5
Р.2	7	2	4	0
Р.3	2	1	4	4
Р.4	5	7	5	3

7.2.44

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	1	5	7
Р.2	4	1	6	0
Р.3	4	4	2	4
Р.4	7	3	4	6

7.2.45

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	5	5	6
Р.2	0	7	4	6
Р.3	3	0	3	7
Р.4	2	7	1	5

7.2.46

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	5	5	2
Р.2	0	2	6	7
Р.3	0	4	5	2
Р.4	0	1	3	4

7.2.47

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	2	6	4
Р.2	0	4	5	4
Р.3	1	5	0	5
Р.4	6	0	7	3

7.2.48

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	3	1	0
Р.2	5	7	4	7
Р.3	7	2	2	6
Р.4	6	1	6	1

7.2.49

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	2	6	2
Р.2	2	4	7	7
Р.3	6	2	6	5
Р.4	2	3	6	2

7.2.50

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	4	2	2
Р.2	4	6	3	6
Р.3	0	5	0	3
Р.4	3	5	3	5

7.2.51

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	0	1	4
Р.2	5	4	0	7
Р.3	4	1	6	3
Р.4	2	0	4	6

7.2.52

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	3	0	2
Р.2	6	4	0	0
Р.3	1	6	0	5
Р.4	2	2	6	2

7.2.53

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	5	6	4
Р.2	5	1	2	1
Р.3	4	4	5	3
Р.4	7	7	1	1

7.2.54

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	1	5	0
Р.2	4	6	3	6
Р.3	0	7	2	7
Р.4	6	7	7	3

7.2.55

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	1	2	3
Р.2	0	2	1	6
Р.3	4	0	3	3
Р.4	5	6	0	5

7.2.56

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	1	7	3
Р.2	2	7	4	0
Р.3	0	7	3	2
Р.4	3	6	5	0

7.2.57

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	0	2	4
Р.2	5	5	1	5
Р.3	5	1	0	3
Р.4	0	2	4	6

7.2.58

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	2	7	2
Р.2	6	1	7	7
Р.3	3	3	0	3
Р.4	0	3	5	5

7.2.59

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	2	2	3
Р.2	1	3	3	5
Р.3	3	4	6	5
Р.4	0	6	1	2

7.2.60

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	0	4	4
Р.2	3	2	5	6
Р.3	0	1	3	6
Р.4	6	7	4	3

7.2.61

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	0	7	6
Р.2	3	4	1	3
Р.3	3	6	2	2
Р.4	0	5	7	2

7.2.62

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	0	3	1
Р.2	0	6	7	0
Р.3	0	5	6	5
Р.4	5	1	7	4

7.2.63

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	1	6	6
Р.2	6	5	5	5
Р.3	1	2	6	6
Р.4	2	6	0	3

7.2.64

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	3	2	0
Р.2	1	6	4	2
Р.3	5	3	1	0
Р.4	3	1	7	5

7.2.65

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	4	2	0
Р.2	2	3	5	3
Р.3	3	1	4	4
Р.4	4	7	6	7

7.2.66

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	0	5	4
Р.2	6	5	4	4
Р.3	3	6	6	6
Р.4	1	6	5	7

7.2.67

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	7	0	3
Р.2	2	6	5	2
Р.3	5	6	7	5
Р.4	3	4	1	5

7.2.68

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	5	7	2
Р.2	6	3	3	7
Р.3	6	3	5	1
Р.4	4	1	6	5

7.2.69

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	4	2	4
Р.2	1	7	3	5
Р.3	6	7	3	2
Р.4	5	7	1	1

7.2.70

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	4	6	4
Р.2	2	0	6	4
Р.3	0	3	6	3
Р.4	2	6	7	6

7.2.71

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	6	7	6
Р.2	6	0	0	5
Р.3	6	2	4	6
Р.4	2	5	6	2

7.2.72

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	4	6	5
Р.2	6	5	2	1
Р.3	6	6	1	3
Р.4	1	7	3	5

7.2.73

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	2	1	2
Р.2	3	6	4	2
Р.3	3	2	3	6
Р.4	7	2	3	7

7.2.74

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	2	1	0
Р.2	2	7	2	4
Р.3	6	4	2	5
Р.4	4	2	1	5

7.2.75

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	2	7	4
Р.2	5	4	5	1
Р.3	6	3	1	1
Р.4	6	6	3	1

7.2.76

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	1	6	0
Р.2	5	1	6	0
Р.3	6	2	2	6
Р.4	7	3	4	3

7.2.77

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	2	1	3
Р.2	7	3	6	6
Р.3	3	2	2	3
Р.4	4	6	0	1

7.2.78

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	0	2	1
Р.2	5	2	2	3
Р.3	3	5	1	4
Р.4	2	7	7	7

7.2.79

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	1	2	2
Р.2	5	6	4	1
Р.3	5	0	7	6
Р.4	0	0	6	0

7.2.80

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	3	0	6
Р.2	4	5	5	7
Р.3	1	3	4	0
Р.4	6	1	2	4

7.2.81

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	5	0	0
Р.2	2	0	5	2
Р.3	1	2	2	0
Р.4	7	7	3	0

7.2.82

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	2	2	4
Р.2	0	1	4	1
Р.3	5	5	6	1
Р.4	5	6	4	3

7.2.83

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	4	2	2
Р.2	4	2	3	3
Р.3	1	2	1	3
Р.4	6	0	5	4

7.2.84

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	2	0	5
Р.2	4	5	5	1
Р.3	0	6	6	4
Р.4	5	7	3	6

7.2.85

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	2	2	0
Р.2	0	0	2	0
Р.3	4	1	3	6
Р.4	1	7	6	4

7.2.86

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	6	7	3	2
Р.2	7	2	3	7
Р.3	1	7	5	1
Р.4	5	5	3	0

7.2.87

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	4	6	3
Р.2	7	4	2	1
Р.3	2	7	0	4
Р.4	1	5	0	6

7.2.88

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	4	1	0
Р.2	0	4	2	5
Р.3	5	0	5	0
Р.4	2	6	0	6

7.2.89

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	2	1	6
Р.2	2	2	5	3
Р.3	5	1	1	1
Р.4	6	6	6	4

7.2.90

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	5	3	4
Р.2	1	5	7	6
Р.3	3	5	6	2
Р.4	4	1	4	4

7.2.91

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	2	1	0
Р.2	0	6	1	6
Р.3	5	7	3	3
Р.4	5	0	3	1

7.2.92

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	0	7	5	2
Р.2	0	0	4	5
Р.3	6	3	0	0
Р.4	1	7	7	6

7.2.93

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	3	7	4
Р.2	6	5	1	1
Р.3	1	3	2	4
Р.4	1	6	5	4

7.2.94

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	4	3	3	0
Р.2	0	3	3	0
Р.3	2	7	2	7
Р.4	3	2	0	0

7.2.95

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	2	1	5	2
Р.2	4	1	2	4
Р.3	4	0	5	3
Р.4	5	6	2	7

7.2.96

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	5	3	7	4
Р.2	5	5	3	4
Р.3	2	2	4	3
Р.4	4	4	7	4

7.2.97

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	3	5	2
Р.2	6	3	5	3
Р.3	4	6	3	5
Р.4	7	7	5	5

7.2.98

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	3	6	6	3
Р.2	1	7	4	4
Р.3	5	0	2	3
Р.4	4	2	0	3

7.2.99

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	1	5	6	0
Р.2	7	3	1	3
Р.3	7	5	4	1
Р.4	2	0	7	1

7.2.100

	И.1	И.2	И.3	И.4
Р.1	7	0	2	1
Р.2	0	4	6	6
Р.3	3	4	7	4
Р.4	1	5	3	1

Тема 8. Применение метода динамического программирования для решения экономических задач

8.1. Общие сведения. Постановка задачи

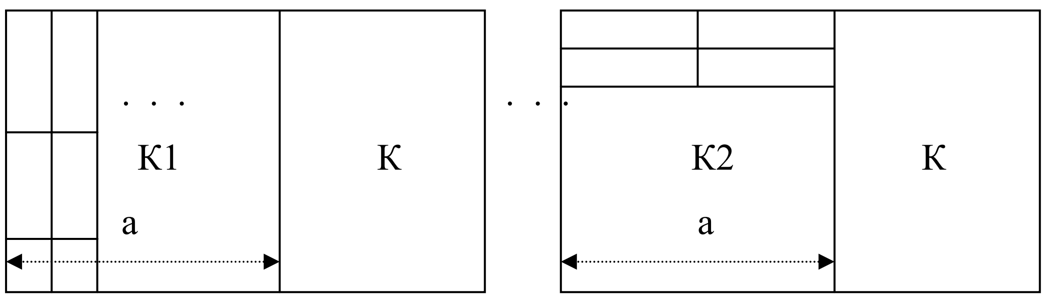
Решение многих экономических задач может быть разбито на конечное число этапов. Такие задачи могут быть решены методом динамического программирования.

Основной принцип метода динамического программирования сформулирован Беллманом, какое бы не было решение задачи на некоторых этапах, на последующих этапах должно быть использовано оптимальное решение относительно данного этапа.

Суть этого принципа поясним на следующем примере. Пусть исходный материал поступает на раскрой в виде листов прямоугольной формы заданного размера. Требуется раскроить данный исходный материал на заготовки прямоугольной формы так, чтобы получить их максимальное количество.

Предположим, что на некотором этапе решения задачи получены два варианта раскроя:

Вариант 1 Вариант 2



Пусть по первому варианту раскроена определенная часть листа размера **a** и получено $\mathbf{K_1}$ заготовок**.** По второму варианту раскроена та же часть листа и получено $\mathbf{K_2}$ заготовок**.** Предположим, что $\mathbf{K_1 < K_2}$**.** Так как по первому и второму варианту остаток листа одинакового размера, то при оптимальном раскрое (любым методом, например, методом полного перебора) этой части листа получается одно и то же количество заготовок равное **K.** Тогда общее количество заготовок, полученное по первому и второму вариантам, можно оценить следующим соотношением: $\mathbf{K_1 + K < K_2 + K}$**.**

Таким образом, так как задача с целевой функцией на максимум, второй вариант, возможно, будет оптимальным решением раскроя всего листа, а первый вариант можно в дальнейшем не рассматривать. Это позволяет сократить количество рассматриваемых вариантов решений.

Методом динамическою программирования могут быть решены, например, следующие задачи.

Задача 1. Пусть в распоряжении предприятия имеется некоторый объем денежных средств **V**. Предприятие имеет **n** подразделений. При выделении некоторого объёма денежных средств одному из подразделений, предприятие в целом получает некоторую прибыль. Зависимость прибыли от выделенной суммы, как правило, не является функциональной. Поэтому она задается в виде таблицы.

Ставится задача распределить указанный объем денежных средств между **n** подразделениями таким образом, чтобы предприятие в целом получило максимальную прибыль.

Задача 2. Потребность региона (района, города) в некотором продукте может быть удовлетворена путем строительства или реконструкции цехов (заводов, предприятий). Для реконструкции цеха по выпуску определенного количества продукции необходимы некоторые капитальные вложения. Зависимость объёма выпускаемой продукции от капитальных вложений не является функциональной и задаётся в виде таблицы.

Ставится задача провести реконструкцию или строительство цехов таким образом, чтобы потребность в продукте была удовлетворена, а затраты на реконструкцию или строительство были минимальными.

8.2. Задача оптимального распределения денежных средств между подразделениями

Решение данной задачи можно разбить на ряд этапов. Например, на первом этапе рассматривают выделение денежных средств первому подразделению. На втором этапе – распределение денежных средств между двумя подразделениями и так далее. То есть, номер этапа совпадает с количеством подразделений, между которыми производится распределение денежных средств.

На некотором **к**-ом этапе рассматривают распределение денежных средств между **к**-ым подразделением и первыми **к-1** подразделениями. Лучшие варианты распределения между **к-1** подразделениями выбираются из результатов выполнения предыдущего **(к-1)**-го этапа.

Рассматриваются такие варианты распределения, которые имеют одинаковую сумму распределяемых денежных средств. И среди таких вариантов выбирается вариант с наибольшей прибылью (или с наименьшими затратами для задачи 2). Остальные варианты, согласно принципа оптимальности Беллмана, на последующих этапах не рассматриваются.

Таким образом, рассматриваются все **n** этапов. На последнем этапе выбирается оптимальное решение (или решения).

Алгоритм решения задачи 1

1. На первом этапе рассматриваются все варианты выделения денежных средств первому подразделению.

2. На втором этапе производится распределение денежных средств между первыми двумя подразделениями. Для этих целей строится таблица, столбцами которой являются объёмы выделенных денежных средств первому подразделению, а строками – второму подразделению.

В клетку на пересечении строки и столбца записываются две величины: сумма выделяемых объемов денежные средств первому и второму подразделению и сумма получаемой при этом прибыли.

В таблице заполняются только те клетки, в которых общая сумма выделенных средств не превышает величину **V.** После заполнения таблицы всё множество клеток разбивается на подмножества с одинаковыми объемами выделенных средств. В каждом подмножестве помечаются звездочкой (*) те клетки, которые имеют наибольшую общую прибыль.

3. На третьем этапе производится распределение денежных средств между первыми двумя подразделениями и третьим. Заполняется таблица, столбцами которой являются лучшие варианты второго этапа. Они помечены звёздочками. Строками таблицы являются варианты выделения денежных средств третьему подразделению. Эти данные выбираются из исходной таблицы.

Клетки заполняются и помечаются аналогично второму этапу.

Таким образом, выполняются все последующие этапы до **n**-го этапа.

n. На этапе **n** производится распределение денежных средств между первыми **n-1** подразделениями и **n**-ым подразделением. Строится таблица из лучших вариантов **(n-1)**-го этапа и вариантов выделения денежных средств подразделению **n.** Так как данный этап последний, то достаточно распределить объем денежных средств равный **V.** Заполняются только те клетки, суммарный объем выделенных средств которых, равен **V**.

Выбирается клетка с наибольшей общей прибылью. Это значение и будет оптимальным значением критерия задачи, то есть максимумом полученной прибыли. Из последней таблицы определяется оптимальный объём выделения денежных средств подразделению **n**.

Последовательно переходя к предыдущим таблицам, определяют оптимальные значения переменных, то есть объемы денежных средств, выделенных каждому подразделению.

Замечание 1. При заполнении заголовка столбцов таблицы последнего этапа не обязательно выписывать все лучшие варианты из предыдущей таблицы, так как заполняться будут только клетки с выделяемыми объёмами **V**. Достаточно выписать только варианты с объемами выделяемых средств не меньше разности общего объёма **V** и наибольшего выделяемого объема последнему подразделению. Например, если **V=90** денежных единиц, а наибольший выделяемый объем последнему подразделению равен 40, то в заголовок последней таблицы достаточно записать данные из предпоследней таблицы с объёмами выделяемых средств не меньше 50 (90 – 40 = 50).

Замечание 2. Если при записи ответа при переходе от таблицы к таблице выбирается клетка в заголовке столбцов, то это означает, что соответствующему подразделению денежные средства не выделяются. Если выбирается клетка в заголовке строк, то это означает, что все оставшиеся денежные средства выделяются данному подразделению.

Рассмотрим применение данного алгоритма для решения следующей задачи.

Задача. Требуется распределить 80 тыс. грн. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость, получаемой прибыли от выделенных денежных средств, приведена в следующей таблице

Объёмы	10	20	30	40	50
Подразделение 1	12	28	32	42	58
Подразделение 2	15	26	34	41	52
Подразделение 3	11	23	-	45	56
Подразделение 4	16	25	33	41	53

Решение.

1 этап. Из исходной таблицы выписываем данные по первому подразделению:

Выделяемые объёмы / Подразделения	10	20	30	40	50
1	12	28	32	42	58

2 этап. Строится таблица распределения денежных средств между первыми двумя подразделениями. В заголовок столбцов записываются данные по первому подразделению, а в заголовок строк – по второму. В качестве данных в каждую клетку заголовка записываются выделяемые объёмы и через тире – получаемую при этом прибыль. Эти данные выбираются из исходной таблицы. Остальные клетки таблицы заполняются суммированием соответствующих значений заголовков строк и столбцов. Затем всё множество клеток, включая и клетки заголовков, разбиваем на подмножества с одинаковыми объёмами выделяемых денежных средств. В каждом подмножестве помечаем символом «*» клетки, имеющие максимальную прибыль. Например, в нашей таблице имеются три клетки с выделяемым объёмом денежных средст 20 тыс. грн., однако звездочкой пометим клетку в заголовке столбцов, так как она имеет наибольшее значение прибыли – 28.

1 / 2	10-12	20-28*	30-32	40-42	50-58
10–15*	20–27	30-43*	40-47	50-57	60–73*
20–26	30-38	40-54*	50-58	60-68	70–84*
30-34	40-46	50-62*	60-66	70-76	80–92*
40-41	50-53	60-69	70-73	80–83	
50-52	60-64	70-80	80-84		

3 этап. Строим таблицу распределения денежных средств между первыми двумя подразделениями и третьим. В клетки заголовка столбцов записываем значение клеток помеченных звёздочками в предыдущей таблице. В заголовок строк – данные по третьему подразделению из исходной таблицы. Остальные действия на третьем этапе аналогичны предыдущему этапу.

1+2 / 3	10-15	20-28*	30-43*	40-54*	50-62	60-73	70-78	80–92
10–11	20–26	30-39	40-54*	50-65	60–73	70–84	80–95	
20–23	30-38	40-51	50-66*	60-77*	70–85	80-96		
40-45	50-60	60-73	70-88*	80–99*				
50-56	60-71	70-84	80-99					

4 этап. Данный этап является последним, поэтому из предыдущей таблицы выписываем клетки, помеченные звёздочками с объёмами выделяемых средств не менее 30 (80 – 50 = 30, см. замечание 1). Во внутренней части таблицы заполняем только клетки с объемами выделяемых средств равными 80 тыс. грн.

1+2+3 / 4	30-43	40-54	50-66	60-77	70-88	80–99
10–16					80–104*	
20–25				80-102		
30-33			80-99			
40-41		80–95				
50-53	80-96					

Получаем следующее решение задачи.

При выделении 80 тыс. грн. четырём подразделениям, предприятие в целом получает максимальную прибыль в размере 104 тыс. грн.

Найдём оптимальные объёмы выделяемых денежных средств каждому подразделению. Из последней таблицы следует, что четвёртому подразделению необходимо выделить 10 тыс. грн. (выбранной клетки соответствует первая строка, поэтому эту величину выбираем из заголовка этой строки). При этом это подразделение принесёт предприятию прибыль в объёме 16 тыс. грн. В предыдущей таблице находим клетку с оставшимся объемом выделяемых денежных средств – 70 тыс. грн. Тогда третьему подразделению необходимо выделить 40 тыс. грн. (выбранной клетке соответствует третья строка, поэтому эту величину выбираем из заголовка этой строки). Так переходя от таблицы к таблице, определяем оптимальные объёмы выделяемых денежных средств для всех подразделений**.**

Итак**,** P_{max} = 104 тыс. грн.

Подразделение	Выделяемый объём (тыс. грн.)	Получаемая прибыль (тыс. грн.)
4	10	16
3	40	45
2	10	15
1	20	28
Итого	80	104

8.3. Задачи

Требуется распределить **V** тыс. грн. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость, получаемой прибыли от обёма выделенных денежных средств, приведена в таблице.

8.01.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	35	45	52	63	68	74
Подразделение 2	35	48	58	60	77	80
Подразделение 3	19	49	51	59	67	88
Подразделение 4	38	46	48	56	70	71

V= 90 тыс. грн.

8.02.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	17	41	55	69	76	84	93
Подразделение 2	19	30	38	58	69	89	90
Подразделение 3	25	33	58	66	70	83	98
Подразделение 4	16	42	45	68	71	81	91

V=100 тыс. грн.

8.03.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	25	33	35	46	70	75	82	98
Подразделение 2	38	42	43	57	73	86	87	101
Подразделение 3	39	45	49	59	67	80	86	104
Подразделение 4	39	49	57	67	73	83	95	105

V= 90 тыс. грн.

8.04.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	22	24	41	64	74	82	97	101
Подразделение 2	39	42	58	69	79	83	93	100
Подразделение 3	33	44	46	49	79	83	84	95
Подразделение 4	38	49	55	60	68	87	92	109

V= 90 тыс. грн.

8.05.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	16	26	40	67	68	79
Подразделение 2	27	47	48	65	69	86
Подразделение 3	28	30	38	45	72	81
Подразделение 4	13	43	50	67	74	79

V= 90 тыс. грн.

8.06.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	34	42	56	67	69	75
Подразделение 2	26	33	40	69	79	87
Подразделение 3	18	26	38	43	52	76
Подразделение 4	19	21	53	61	65	80

V= 90 тыс. грн.

8.07.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	13	45	52	55	61	75	97	104
Подразделение 2	38	46	52	63	79	81	98	99
Подразделение 3	15	34	54	64	78	87	95	98
Подразделение 4	39	46	50	55	77	79	85	102

V=110 тыс. грн.

8.08.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	16	46	55	62	75	85	89	103
Подразделение 2	35	42	53	56	69	72	80	88
Подразделение 3	34	39	40	63	68	78	91	99
Подразделение 4	13	26	37	47	77	80	92	107

V=110 тыс. грн.

8.09.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	35	39	43	51	67	70
Подразделение 2	12	22	57	63	65	84
Подразделение 3	18	46	51	60	77	80
Подразделение 4	33	35	41	67	68	76

V= 90 тыс. грн.

8.10.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	39	49	52	64	65	75	90	99
Подразделение 2	18	39	52	54	59	78	97	109
Подразделение 3	23	30	50	62	65	76	93	105
Подразделение 4	17	33	40	60	64	86	88	92

V= 90 тыс. грн.

8.11.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	27	37	45	65	70	85	96
Подразделение 2	19	36	53	56	74	80	93
Подразделение 3	25	32	59	69	74	81	97
Подразделение 4	25	44	54	61	76	81	95

V=100 тыс. грн.

8.12.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	25	48	53	69	70	88
Подразделение 2	27	41	44	57	72	81
Подразделение 3	25	40	56	67	72	82
Подразделение 4	34	46	54	61	78	81

V= 90 тыс. грн.

8.13.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	33	38	49	64	65	89	94
Подразделение 2	18	31	53	58	65	80	90
Подразделение 3	15	23	52	61	73	83	90
Подразделение 4	15	47	49	55	58	65	76

V=100 тыс. грн.

8.14.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	15	39	45	58	75	88	92	106
Подразделение 2	23	35	56	66	76	80	84	103
Подразделение 3	18	45	48	66	77	83	98	109
Подразделение 4	12	26	54	63	65	66	80	98

V=110 тыс. грн.

8.15.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	30	36	52	60	77	82	89
Подразделение 2	38	43	48	50	63	68	85
Подразделение 3	21	28	59	61	77	82	98
Подразделение 4	23	43	50	58	64	65	84

V=100 тыс. грн.

8.16.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	35	47	49	65	68	77	93	94
Подразделение 2	22	23	54	65	66	67	99	101
Подразделение 3	21	46	54	66	78	81	84	86
Подразделение 4	34	44	47	49	78	79	83	102

V= 90 тыс. грн.

8.17.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	18	32	42	63	75	85	95
Подразделение 2	26	36	41	52	78	86	92
Подразделение 3	19	30	50	69	79	82	87
Подразделение 4	11	48	52	60	71	89	91

V=100 тыс. грн.

8.18.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	11	28	55	64	79	82	97	99
Подразделение 2	16	30	48	49	73	86	87	100
Подразделение 3	24	28	49	53	65	68	92	94
Подразделение 4	27	36	47	49	52	63	95	106

V=110 тыс. грн.

8.19.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	15	22	59	66	76	88	99	104
Подразделение 2	37	44	57	66	77	88	98	99
Подразделение 3	12	25	42	68	77	81	98	102
Подразделение 4	31	49	56	61	70	84	95	99

V=110 тыс. грн.

8.20.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	22	47	56	68	74	88	92	109
Подразделение 2	34	47	50	61	65	85	93	95
Подразделение 3	22	46	58	64	70	84	89	95
Подразделение 4	19	40	55	56	74	87	96	103

V=110 тыс. грн.

8.21.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	14	36	39	54	62	67	77
Подразделение 2	31	39	50	64	73	81	82
Подразделение 3	21	33	51	52	65	73	80
Подразделение 4	31	33	39	52	78	84	88

V=100 тыс. грн.

8.22.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	24	37	58	66	71	86	96	103
Подразделение 2	29	39	44	56	65	68	78	101
Подразделение 3	29	45	55	57	79	81	94	95
Подразделение 4	39	46	58	64	76	83	96	101

V= 90 тыс. грн.

8.23.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	27	35	42	62	66	78
Подразделение 2	33	36	45	53	78	85
Подразделение 3	14	29	40	50	72	75
Подразделение 4	39	49	51	55	62	76

V= 90 тыс. грн.

8.24.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	23	31	32	65	73	89	97	108
Подразделение 2	12	33	40	42	53	78	85	87
Подразделение 3	36	39	51	65	70	77	83	101
Подразделение 4	19	35	39	52	54	68	83	109

V=110 тыс. грн.

8.25.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	13	25	45	62	74	77	96
Подразделение 2	12	46	53	67	72	83	90
Подразделение 3	28	44	52	68	77	79	85
Подразделение 4	27	44	59	60	66	78	91

V=100 тыс. грн.

8.26.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	13	48	50	53	60	72	92	100
Подразделение 2	25	26	49	66	72	87	90	109
Подразделение 3	25	44	48	58	62	71	91	107
Подразделение 4	32	45	53	64	74	83	86	91

V=110 тыс. грн.

8.27.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	34	41	47	65	73	86	88	92
Подразделение 2	24	36	37	52	77	80	83	90
Подразделение 3	17	25	31	43	59	62	98	108
Подразделение 4	13	35	39	49	62	71	79	108

V=110 тыс. грн.

8.28.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	24	28	42	48	71	79	96
Подразделение 2	34	44	52	61	70	78	90
Подразделение 3	15	26	50	61	67	74	96
Подразделение 4	18	32	33	64	74	79	92

V=100 тыс. грн.

8.29.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	38	41	57	61	62	66	92	100
Подразделение 2	25	49	56	69	75	85	89	91
Подразделение 3	25	44	52	58	71	78	96	99
Подразделение 4	39	47	56	62	72	87	89	99

V=110 тыс. грн.

8.30.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	24	43	44	62	68	72
Подразделение 2	25	46	54	69	78	84
Подразделение 3	17	30	32	60	69	89
Подразделение 4	35	43	46	56	78	85

V= 90 тыс. грн.

8.31.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	27	33	57	61	79	83	92
Подразделение 2	22	45	54	61	72	77	87
Подразделение 3	22	28	49	52	68	81	95
Подразделение 4	38	46	56	68	69	84	85

V=100 тыс. грн.

8.32.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	25	32	52	65	69	75	88	92
Подразделение 2	13	30	49	58	72	80	92	100
Подразделение 3	26	42	44	51	68	71	91	100
Подразделение 4	36	47	54	58	77	88	94	103

V=110 тыс. грн.

8.33.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	17	33	37	46	79	80
Подразделение 2	29	46	57	63	68	89
Подразделение 3	23	28	47	64	65	80
Подразделение 4	28	38	58	64	76	78

V= 90 тыс. грн.

8.34.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	31	33	51	68	74	86	92
Подразделение 2	30	37	55	65	66	73	82
Подразделение 3	38	48	53	58	76	84	88
Подразделение 4	25	43	44	63	64	77	79

V=100 тыс. грн.

8.35.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	37	45	51	60	69	84	89
Подразделение 2	24	36	37	57	70	79	91
Подразделение 3	28	43	50	63	71	76	96
Подразделение 4	16	25	48	66	72	82	93

V=100 тыс. грн.

8.36.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	34	42	53	67	69	79	90
Подразделение 2	16	34	54	62	79	82	87
Подразделение 3	26	42	58	63	74	81	98
Подразделение 4	25	44	52	68	75	86	96

V=100 тыс. грн.

8.37.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	34	48	49	58	74	81	94	100
Подразделение 2	21	29	49	56	74	79	98	100
Подразделение 3	22	43	44	58	63	81	97	109
Подразделение 4	27	39	54	68	72	78	84	92

V= 90 тыс. грн.

8.38.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	13	24	41	65	66	77	95
Подразделение 2	21	24	56	68	75	78	98
Подразделение 3	12	40	58	62	75	81	90
Подразделение 4	17	42	43	69	71	89	99

V= 80 тыс. грн.

8.39.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	21	23	31	53	74	76	99	107
Подразделение 2	31	48	59	68	74	79	98	109
Подразделение 3	36	45	46	49	74	84	94	108
Подразделение 4	37	40	55	67	73	76	84	96

V= 90 тыс. грн.

8.40.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	32	48	51	68	78	81
Подразделение 2	17	29	44	50	65	82
Подразделение 3	29	43	54	56	61	80
Подразделение 4	30	33	35	52	64	87

V= 90 тыс. грн.

8.41.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	15	47	59	65	68	79	85	91
Подразделение 2	23	31	40	68	73	83	94	100
Подразделение 3	13	48	53	68	71	79	96	108
Подразделение 4	16	23	57	64	71	75	94	109

V=110 тыс. грн.

8.42.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	25	41	43	67	70	74
Подразделение 2	25	39	50	55	60	61
Подразделение 3	22	37	50	52	60	88
Подразделение 4	15	39	53	54	70	71

V= 90 тыс. грн.

8.43.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	39	42	54	59	60	79	94
Подразделение 2	30	35	51	61	78	85	94
Подразделение 3	38	39	46	47	71	78	84
Подразделение 4	12	26	34	60	73	82	99

V= 80 тыс. грн.

8.44.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	20	49	53	66	72	88	96
Подразделение 2	38	40	44	58	74	88	97
Подразделение 3	38	41	57	68	70	72	93
Подразделение 4	29	39	53	56	62	79	81

V=100 тыс. грн.

8.45.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	34	36	41	53	75	82	98	103
Подразделение 2	12	38	49	61	64	69	77	96
Подразделение 3	13	40	53	55	61	84	86	94
Подразделение 4	22	42	46	69	78	88	89	96

V= 90 тыс. грн.

8.46.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	14	21	31	47	63	87	88
Подразделение 2	31	47	54	67	77	81	94
Подразделение 3	21	36	53	69	72	76	86
Подразделение 4	39	43	56	66	72	82	97

V=100 тыс. грн.

8.47.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	37	42	56	58	70	81	83
Подразделение 2	15	35	49	61	66	86	95
Подразделение 3	37	44	52	66	71	76	88
Подразделение 4	30	45	53	60	72	88	99

V=100 тыс. грн.

8.48.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	39	46	49	63	78	86
Подразделение 2	33	39	46	51	53	81
Подразделение 3	21	30	46	57	67	89
Подразделение 4	17	37	43	47	51	85

V= 90 тыс. грн.

8.49.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	33	38	49	52	56	67	77	108
Подразделение 2	13	31	41	51	71	73	81	105
Подразделение 3	22	35	36	57	59	87	88	93
Подразделение 4	11	29	47	57	79	81	85	109

V= 90 тыс. грн.

8.50.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	29	44	46	58	79	85	97
Подразделение 2	34	40	45	68	72	82	98
Подразделение 3	19	48	58	59	68	78	88
Подразделение 4	30	37	50	52	70	74	98

V=100 тыс. грн.

8.51.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	11	35	46	59	79	80
Подразделение 2	21	26	43	48	78	83
Подразделение 3	26	34	50	65	66	83
Подразделение 4	26	31	58	65	70	87

V= 90 тыс. грн.

8.52.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	34	48	57	63	75	88	95
Подразделение 2	28	49	52	58	67	84	86
Подразделение 3	30	41	54	58	78	87	88
Подразделение 4	11	36	42	49	67	80	95

V=100 тыс. грн.

8.53.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	27	44	59	65	74	76	94
Подразделение 2	28	43	53	61	64	76	92
Подразделение 3	21	36	45	46	71	82	85
Подразделение 4	12	44	46	61	68	83	84

V=100 тыс. грн.

8.54.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	29	41	46	57	62	69	91
Подразделение 2	23	25	54	57	76	89	99
Подразделение 3	20	31	45	62	73	75	78
Подразделение 4	14	27	57	68	77	80	88

V= 80 тыс. грн.

8.55.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	16	25	59	68	78	80
Подразделение 2	23	42	56	69	70	71
Подразделение 3	32	35	40	68	78	89
Подразделение 4	25	33	55	66	74	87

V= 90 тыс. грн.

8.56.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	11	33	42	55	65	87	97	100
Подразделение 2	37	40	58	64	79	80	98	108
Подразделение 3	25	32	48	63	76	89	93	99
Подразделение 4	25	47	56	68	71	88	97	107

V= 90 тыс. грн.

8.57.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	39	47	51	56	67	76
Подразделение 2	21	23	58	60	67	68
Подразделение 3	33	45	46	57	67	85
Подразделение 4	38	48	54	63	77	82

V= 90 тыс. грн.

8.58.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	36	43	44	64	70	73	76
Подразделение 2	37	40	47	65	78	85	92
Подразделение 3	26	44	51	68	77	82	93
Подразделение 4	13	44	49	53	72	79	88

V= 80 тыс. грн.

8.59.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	32	44	52	63	75	88	98	101
Подразделение 2	21	31	42	47	74	75	89	108
Подразделение 3	33	41	46	63	74	77	88	97
Подразделение 4	23	41	54	58	64	89	91	94

V= 90 тыс. грн.

8.60.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	34	42	45	57	59	66
Подразделение 2	36	42	52	62	69	79
Подразделение 3	21	46	54	64	79	83
Подразделение 4	22	33	50	55	60	62

V= 90 тыс. грн.

8.61.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	14	30	34	63	73	75	94
Подразделение 2	20	24	47	67	71	80	84
Подразделение 3	22	45	46	52	79	81	82
Подразделение 4	11	29	47	65	69	88	89

V=100 тыс. грн.

8.62.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	22	30	38	46	78	85	92
Подразделение 2	26	34	41	61	77	80	99
Подразделение 3	32	42	47	57	68	87	98
Подразделение 4	39	44	54	59	65	89	93

V=100 тыс. грн.

8.63.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	37	46	54	60	71	89	98
Подразделение 2	20	35	46	63	70	82	90
Подразделение 3	14	46	51	53	59	68	90
Подразделение 4	36	42	45	60	74	75	98

V=100 тыс. грн.

8.64.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	21	45	50	62	65	76	96	108
Подразделение 2	27	47	55	67	70	75	83	105
Подразделение 3	19	31	39	65	77	87	98	104
Подразделение 4	14	23	39	51	75	81	96	101

V=110 тыс. грн.

8.65.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	14	31	59	60	78	85	93	109
Подразделение 2	20	42	53	57	61	62	96	97
Подразделение 3	22	45	54	66	75	89	91	104
Подразделение 4	14	36	49	69	77	81	85	95

V= 90 тыс. грн.

8.66.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	27	45	47	69	76	81	97
Подразделение 2	16	48	58	60	69	76	91
Подразделение 3	26	41	55	67	70	75	98
Подразделение 4	34	42	54	61	77	80	94

V=100 тыс. грн.

8.67.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	12	40	51	63	68	78	97	106
Подразделение 2	23	35	58	64	79	80	97	101
Подразделение 3	29	37	51	67	78	82	83	86
Подразделение 4	25	43	48	63	67	88	93	100

V= 90 тыс. грн.

8.68.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	29	33	45	53	74	89	99	104
Подразделение 2	22	40	57	59	72	88	95	105
Подразделение 3	15	22	36	44	72	77	83	88
Подразделение 4	27	33	47	64	76	78	82	100

V= 90 тыс. грн.

8.69.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	24	31	46	48	71	73	96
Подразделение 2	36	37	52	63	76	88	89
Подразделение 3	17	49	56	59	70	81	89
Подразделение 4	23	40	45	51	70	83	96

V=100 тыс. грн.

8.70.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	24	39	46	59	73	75
Подразделение 2	16	28	43	63	67	89
Подразделение 3	16	45	57	58	78	82
Подразделение 4	14	35	42	64	70	85

V= 90 тыс. грн.

8.71.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	36	43	44	46	67	70
Подразделение 2	31	42	58	65	78	88
Подразделение 3	38	44	58	67	73	81
Подразделение 4	31	36	42	56	70	87

V= 90 тыс. грн.

8.72.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	19	45	59	69	74	84
Подразделение 2	14	41	47	63	71	82
Подразделение 3	37	43	55	68	70	83
Подразделение 4	36	38	52	69	71	85

V= 90 тыс. грн.

8.73.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	36	45	53	58	65	73	89
Подразделение 2	39	43	45	63	69	71	72
Подразделение 3	23	34	38	50	55	72	87
Подразделение 4	23	33	39	53	76	89	97

V= 80 тыс. грн.

8.74.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	38	48	52	59	64	88	98	106
Подразделение 2	30	46	56	66	71	77	81	109
Подразделение 3	16	32	46	69	79	87	94	100
Подразделение 4	31	43	55	61	63	76	95	102

V= 90 тыс. грн.

8.75.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	34	37	42	43	74	76	87	99
Подразделение 2	18	41	53	62	77	83	85	94
Подразделение 3	37	41	56	66	79	85	89	106
Подразделение 4	12	21	39	62	68	86	98	108

V= 90 тыс. грн.

8.76.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	17	37	56	61	72	73
Подразделение 2	25	49	59	66	72	85
Подразделение 3	39	43	47	50	67	84
Подразделение 4	23	42	59	68	72	85

V= 70 тыс. грн.

8.77.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	35	45	49	55	62	71	93	96
Подразделение 2	24	43	49	51	58	79	93	105
Подразделение 3	15	30	48	68	71	80	81	83
Подразделение 4	29	33	44	53	75	78	79	106

V=110 тыс. грн.

8.78.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	19	46	48	67	71	85	88
Подразделение 2	11	23	43	57	77	84	99
Подразделение 3	27	34	41	48	73	87	89
Подразделение 4	25	34	43	57	62	65	81

V=100 тыс. грн.

8.79.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	31	40	51	63	69	71
Подразделение 2	25	39	42	58	64	78
Подразделение 3	32	49	57	59	74	88
Подразделение 4	26	45	51	53	76	80

V= 70 тыс. грн.

8.80.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	34	44	51	62	72	84	86	106
Подразделение 2	24	47	49	52	62	84	90	102
Подразделение 3	27	38	58	62	64	81	85	96
Подразделение 4	26	46	58	59	68	75	92	98

V=110 тыс. грн.

8.81.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	18	36	39	51	78	83	93	104
Подразделение 2	22	36	51	62	75	80	88	90
Подразделение 3	22	34	45	63	78	87	95	96
Подразделение 4	13	46	50	56	75	77	83	85

V=110 тыс. грн.

8.82.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	27	37	49	63	74	79
Подразделение 2	32	49	51	67	69	82
Подразделение 3	13	27	53	64	73	82
Подразделение 4	30	34	43	53	67	86

V= 90 тыс. грн.

8.83.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	38	49	57	69	79	82
Подразделение 2	31	39	50	67	71	82
Подразделение 3	35	45	52	58	76	78
Подразделение 4	29	43	54	63	79	87

V= 90 тыс. грн.

8.84.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	20	25	56	64	70	81	85
Подразделение 2	35	47	58	60	73	87	95
Подразделение 3	24	43	52	62	79	85	99
Подразделение 4	21	49	54	69	79	83	86

V=100 тыс. грн.

8.85.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	16	29	40	48	58	88	97
Подразделение 2	19	29	59	68	75	83	91
Подразделение 3	25	44	56	61	69	79	85
Подразделение 4	39	47	48	57	75	89	97

V= 80 тыс. грн.

8.86.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	30	32	48	62	76	80
Подразделение 2	28	32	57	62	71	73
Подразделение 3	19	38	58	63	66	71
Подразделение 4	17	29	59	67	69	73

V= 90 тыс. грн.

8.87.

Объёмы	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**
Подразделение 1	37	44	53	69	71	82	87
Подразделение 2	11	31	56	63	77	87	96
Подразделение 3	28	29	51	59	67	89	99
Подразделение 4	15	47	58	63	65	88	94

V=100 тыс. грн.

8.88.

Объёмы	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
Подразделение 1	29	42	57	64	70	89
Подразделение 2	11	30	45	55	74	79
Подразделение 3	29	41	44	47	59	89
Подразделение 4	27	49	52	67	70	89

V= 90 тыс. грн.

8.89.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	21	32	59	67	77	88
Подразделение 2	22	35	49	65	75	79
Подразделение 3	35	47	52	58	63	84
Подразделение 4	31	37	46	55	59	64

V= 90 тыс. грн.

8.90.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	36	49	59	63	78	84	99	101
Подразделение 2	24	36	46	57	74	77	83	98
Подразделение 3	13	24	55	66	68	72	90	98
Подразделение 4	38	45	51	62	78	88	90	94

V= 90 тыс. грн.

8.91.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	19	39	55	68	69	80
Подразделение 2	27	38	46	68	75	84
Подразделение 3	32	49	59	69	74	80
Подразделение 4	29	35	57	62	78	79

V= 90 тыс. грн.

8.92.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	30	34	51	53	57	64	99
Подразделение 2	37	44	54	66	79	88	98
Подразделение 3	11	41	52	55	78	79	82
Подразделение 4	24	38	49	53	76	79	85

V= 80 тыс. грн.

8.93.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	16	35	38	53	66	80	96	107
Подразделение 2	16	44	47	62	79	81	96	105
Подразделение 3	31	36	56	65	76	81	93	94
Подразделение 4	31	40	51	63	75	77	98	108

V= 90 тыс. грн.

8.94.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	33	48	50	51	63	83	93
Подразделение 2	29	33	52	55	70	78	89
Подразделение 3	30	33	46	64	66	88	92
Подразделение 4	30	33	54	55	68	70	98

V=100 тыс. грн.

8.95.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	12	21	36	41	72	85	93	102
Подразделение 2	23	39	51	65	79	86	97	108
Подразделение 3	39	45	57	62	63	79	85	96
Подразделение 4	12	38	43	60	63	82	96	99

V= 90 тыс. грн.

8.96.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	19	30	32	64	67	83
Подразделение 2	34	35	51	63	77	85
Подразделение 3	25	40	47	68	79	84
Подразделение 4	15	45	53	68	77	85

V= 90 тыс. грн.

8.97.

Объёмы	10	20	30	40	50	60
Подразделение 1	12	24	51	64	68	84
Подразделение 2	27	33	52	62	79	85
Подразделение 3	38	43	55	66	73	86
Подразделение 4	25	30	55	63	75	82

V= 90 тыс. грн.

8.98.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	25	34	58	68	75	87	99
Подразделение 2	27	46	50	62	73	82	86
Подразделение 3	13	24	50	55	58	84	99
Подразделение 4	17	30	57	62	64	80	93

V=100 тыс. грн.

8.99.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	21	28	54	62	79	80	88	95
Подразделение 2	18	48	54	68	74	78	88	96
Подразделение 3	22	29	39	58	70	79	97	104
Подразделение 4	29	37	54	64	68	74	95	109

V=110 тыс. грн.

8.00.

Объёмы	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	39	45	57	64	79	84	88
Подразделение 2	12	48	50	55	60	77	99
Подразделение 3	34	35	51	54	56	81	84
Подразделение 4	35	37	38	50	64	77	91

V=100 тыс. грн.

Тема 9. Основы сетевого планирования и управления

9.1. Основные понятия и определения

Сетевое планирование и управление (СПУ) предназначено для логического отображения взаимосвязей между операциями при исследовании работы изучаемого объекта. Основой сетевого планирования и управления является сетевой график.

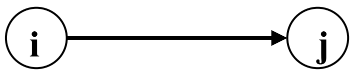
Сетевой график представляет собой множество вершин, связанных между собой стрелками (дугами). Вершины сетевого графика моделируют события, а стрелки – операции или работы.

События сетевых графиков бывают следующих типов:

- исходное – это такое событие, которому не предшествует ни одна операция;
- завершающее – это такое событие, за которым не следует ни одна операция;
- остальные события называются промежуточными.

Операции или работы определяются своими начальным и конечным событиями и обозначаются **(i,j).** Они бывают следующих типов:

1. **Действительные**. Такие операции на сетевом графике обозначается сплошной стрелкой



Для выполнения этих операций необходимы как временные, так и материальные ресурсы.

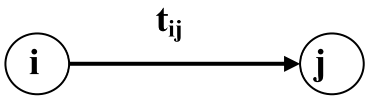
2. **Операции ожидания**. На сетевом графике они обозначается штрих пунктирной стрелкой:

Для выполнения такой операции необходимы только временные ресурсы. Например, пока бетон не застыл, нельзя выполнять следующую работу. Поэтому такую работу можно отобразить операцией ожидания с необходимым временем ее выполнения.

3. **Фиктивная операция**. На сетевом графике такие операции обозначается пунктирной стрелкой

Для выполнения фиктивных операций не требуются ни временные, ни материальные ресурсы. Фиктивные операции служат только для отображения логических взаимосвязей между отдельными операциями.

Любая операция представляется в виде начального и конечного событий и, если это не фиктивная операция**,** то для неё задаются временные ресурсы, то есть, такой промежуток времени**,** который необходим для выполнения данной операции. Он называется продолжительностью выполнения операции и на сетевом графике записывается над данной операцией



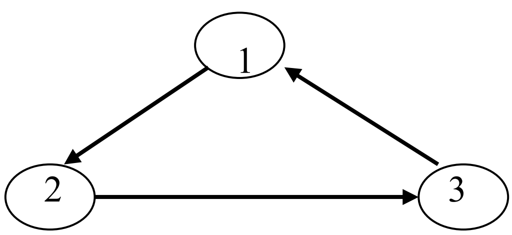
Здесь **i** – начальное событие, **j** – конечное событие, $\mathbf{t_{ij}}$ **-** продолжительность выполнения операции.

В том случае, когда материальных ресурсов достаточно для выполнения действительной операции за промежуток $\mathbf{t_{ij}}$**,** то такую операцию можно изображать без указания необходимых материальных ресурсов.

9.2. Правила построения сетевых графиков

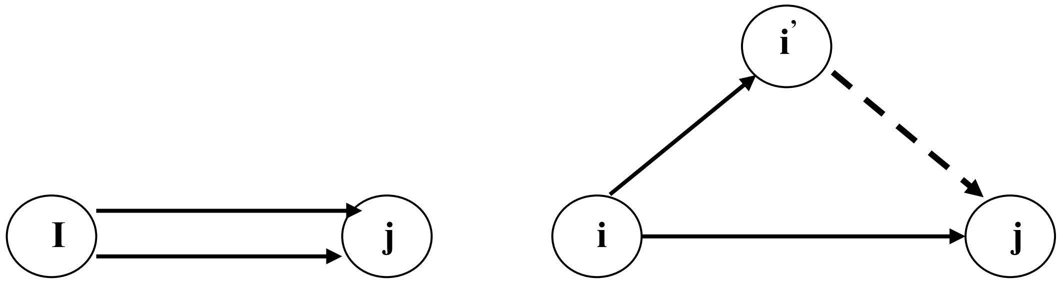
Сетевые графики изображаются с соблюдением следующих правил:

1. Все стрелки (дуги) на сетевом графике должны быть направлены слева направо (допускается сверху вниз и снизу вверх).
2. Сетевой график не должен содержать избыточных пересечений стрелок (дуг).
3. Сетевой график не должен содержать контуров. Контур – это такая последовательность соседних дуг (стрелок), у которой конечное событие последней дуги совпадает с начальным событием первой дуги. Например,



4. На сетевом графике каждая операция должна однозначно определяться своим начальным и конечным событием, то есть любая пара событий

должна быть связана только одной дугой. Если это условие нарушается, то необходимо ввести фиктивную операцию.



5. На сетевом графике не должно быть событий, кроме исходного, которым не предшествует ни одна дуга.
6. Не должно быть событий, кроме завершающего, за которым не следует ни одна дуга.

Основные правила функционирования сетевого графика

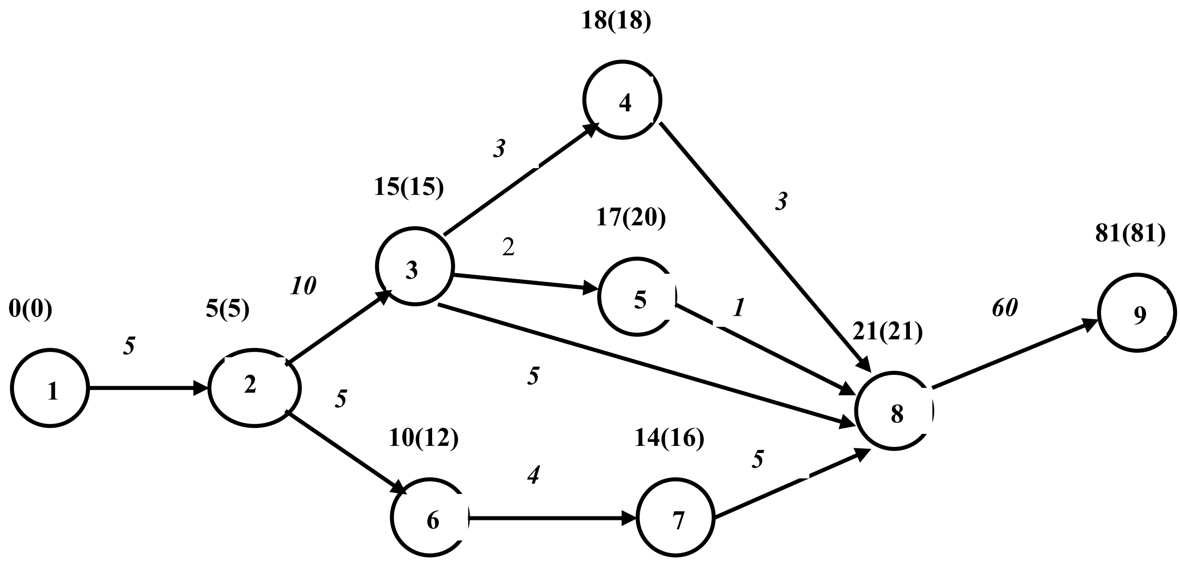
1. Каждое событие свершается мгновенно в тот момент, когда выполняются все операции непосредственно предшествующие ему.

2. Операция не может начать выполняться, пока не свершится ее начальное событие.

Рассмотрим пример построения сетевого графика. Используя названные работы, построить сетевой график реконструкции предприятия.

Операция	Функции, выполняемые операцией	Продолжительность (дни)
(1,2)	Определение объёма работ	5
(2,3)	Составление сметы	10
(2,6)	Выбор проекта реконструкции	5
(3,4)	Выбор подрядчика	3
(3,5)	Открытие счета в банке	2
(3,8)	Утверждение сметы вышестоящей организацией	5
(4,8)	Составление договора с подрядчиком	3
(5,8)	Сообщение заказчику об открытии счета в банке	1
(6,7)	Экономическое обоснование проекта	4
(7,8)	Привязка проекта к площади предприятия	5
(8,9)	Работы по реконструкции	60

Сетевой график для данных работ построен на следующем рисунке:



Полным путем в сетевом графике называется такая непрерывная последовательность соседних операций, для которой начальное событие первой операции является исходным событием сетевого графика, а конечное событие последней операции является завершающим событием этого графика.

Длительностью (продолжительностью) полного пути называется сумма продолжительности выполнения всех входящих в него операций.

9.3. Расчёт временных параметров сетевых графиков

Временные параметры сетевых графиков подразделяются на временные параметры событий и временные параметры операций. Сетевой график, построенный в предыдущем параграфе, будем использовать для иллюстрации вводимых параметров.

9.3.1. Временные параметры событий

Рассмотрим временные параметры событий.

1. Ожидаемый (ранний) срок свершения событий. Это такой срок свершения события, раньше которого событие свершиться не может в связи с правилом 1 функционирования сетевых графиков.

Ожидаемые сроки обозначаются $\mathbf{t_j}$ и записываются на сетевом графике над соответствующими событиями. Начинают определять ожидаемые сроки с исходного события сетевого графика, ожидаемый срок которого полагают равным нулю. Ожидаемые сроки остальных событий определяют по следующей формуле $t_j = \max\limits_{\overset{>}{\{(i,j)\}}} \{t_i + t_{ij}\}$.

Здесь $\overset{>}{\{(i,j)\}}$ – множество операций непосредственно предшествующих событию **j**. Например, $\mathbf{t_3} = \max\{\mathbf{t_2}+\mathbf{t_{23}}\} = \max\{5+10\} = 15$; $\mathbf{t_8} = \max\{18 + 3{,}17 + 1{,}15 + 5{,}14 + 5\} = 21$

2. Критический путь и критическое время. Полный путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется критическим ($\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{кр}}$), а продолжительность этого пути называется критическим временем сетевого графика ($\mathbf{T_{кр}}$).

Критическое время совпадает с ожидаемым сроком свершения завершающего события $\mathbf{T_{кр} = t_{заверш}}$. Для нашего примера $\mathbf{T_{кр}} = 81$ день.

Определение критического пути необходимо начинать с завершающего события. Оно будет последним в критическом пути. Предшествовать уже определённому событию в критическом пути будет то событие, на котором был определён максимум при вычислении ожидаемого срока свершения данного события. Записывая последовательно события в критический путь, достигаем исходного события сетевого графика. Для нашего примера $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{кр}} = (1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}8\text{-}9)$.

3. Предельный (поздний) срок свершения события. Это такой срок свершения события, при увеличении которого увеличивается критическое время. Предельные сроки $(\mathbf{t_i^*})$ записываются на сетевом графике над соответствующим событием в скобках.

Предельные сроки начинают рассчитывать с завершенного события, предельный срок свершения которого полагают равным ожидаемому сроку свершения данного события $\mathbf{t^*_{заверш.}} = \mathbf{t_{iзаверш.}}$ Предельные сроки свершения остальных событий необходимо вычислять по следующей формуле:

$$t_i^* = \min_{\overset{<}{\{(i,j)\}}} \{t_j^* - t_{ij}\}$$

Здесь $\overset{<}{\{(i,j)\}}$ - множество дуг, начальным событием которых является событие **i**. Например, $\mathbf{t_3^*} = \min\{18\text{-}3; 20\text{-}2; 21\text{-}5\} = 15$.

9.3.2. Временные параметры операции

Данные параметры сетевого графика удобно записывать в виде таблицы. В таблице символом «*» отмечаются критические операции.

1. Раннее начало выполнения операции $t_{ij}^{рн}$ – это такой момент времени начала выполнения операции, раньше которого операция не может начать выполняться из-за того, что её начальное событие еще не свершилось. Данный параметр вычисляется по следующей формуле: $t_{ij}^{рн} = t_i$

2. Позднее начало выполнения операции $t_{ij}^{пн}$ - это такой предельный момент начала выполнения операции, при увеличении которого увеличивается критическое время. Данный параметр вычисляется по следующей формуле:

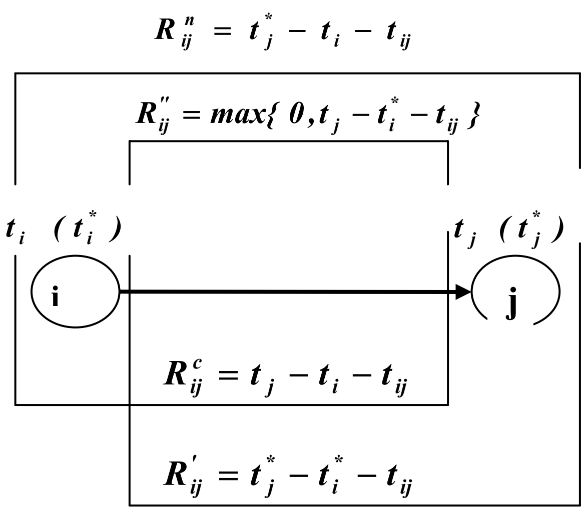
$$t_{ij}^{пн} = t_j^* - t_{ij}.$$

3. Раннее окончание выполнения операции $t_{ij}^{ро}$ – это такой момент времени её завершения, при условии, что данная операция начала выполняться в момент раннего начала. Данный параметр вычисляется по следующей формуле:

$$t_{ij}^{ро} = t_i + t_{ij}.$$

4. Позднее окончание выполнения операции $t_{ij}^{по}$ – это такой предельный момент завершения выполнения операции, при увеличении которого увеличивается критическое время. Данный параметр вычисляется по следующей формуле: $t_{ij}^{по} = t_j^*$

При определении резервов времени удобно пользоваться следующей схемой:



5. Полный резерв времени операции $R_{ij}^{п}$ - это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начала ее выполнения при условии, что начальное событие данной операции свершится в ожидаемый срок, а конечное событие – в предельный срок: $R_{ij}^{п} = t_j^* - t_i - t_{ij}$

6. Свободный резерв времени операций R_{ij}^{c} – это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начала ее выполнения при условии, что начальное и конечное события данной операции свершатся в ожидаемые сроки: $R_{ij}^{c} = t_j - t_i - t_{ij}$.

7. Частный резерв времени первою вида $R_{ij}^{'}$ – это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начала ее выполнения при условии, что начальное и конечное события данной операции свершаться в предельные сроки: $R_{ij}^{'} = t_j^* - t_i^* - t_{ij}$.

8. Частный резерв времени второго вида $R_{ij}^{''}$ – это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начала ее выполнения при условии, что начальное событие свершится в предельный срок, а конечное событие данной операции в ожидаемый срок: $R_{ij}^{''} = \max\{0, t_j - t_i^* - t_{ij}\}$.

В следующей таблице записаны все временные параметры для рассматриваемого примера.

Операции	$t_{ij}^{рн}$	$t_{ij}^{пн}$	$t_{ij}^{ро}$	$t_{ij}^{по}$	$R^{п}_{ij}$	R^{c}_{ij}	R'_{ij}	R'_{ij}
(1,2)*	0	0	5	5	0	0	0	0
(2,3)*	5	5	15	15	0	0	0	0
(2,6)	5	7	10	12	2	0	2	0
(3,4)*	15	15	18	18	0	0	0	0
(3,5)	15	18	17	20	3	0	3	0
(3,8)	15	16	20	21	1	1	1	1
(4,8)*	18	18	21	21	0	0	0	0
(5,8)	17	20	18	21	3	3	0	0
(6,7)	10	12	14	16	2	0	0	0
(7,8)*	14	16	19	21	2	2	0	0
(8,9)*	21	21	81	81	0	0	0	0

9.4. Задачи

В следующих задачах необходимо построить сетевой график и найти все временные параметры событий и операций. В таблицах используются следующие обозначения:

НСО – начальное событие операции;
КСО – конечное событие операции;
ДВО – длительность выполнения операции.

9.01.

НСО	1	1	1	2	3	3	4	5	6
КСО	2	3	4	4	6	7	5	7	7
ДВО	2	6	1	8	1	2	6	1	4

9.02.

НСО	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6
КСО	3	2	5	7	6	4	6	5	7	6	7	6	7
ДВО	1	6	4	6	7	7	1	7	7	6	8	6	2

9.03.

НСО	1	1	2	3	3	4	4	5	6	7
КСО	6	2	3	6	4	8	5	8	7	8
ДВО	2	6	7	5	8	1	7	4	7	4

9.04.

НСО	1	2	3	3	3	4	4	5	6	6	7
КСО	2	3	5	8	4	7	6	8	7	8	8
ДВО	2	6	3	5	6	4	4	3	8	1	1

9.05.

НСО	1	2	2	3	4	5	5	6	7
КСО	2	6	3	4	5	7	8	7	8
ДВО	3	4	2	7	2	2	3	5	4

9.06.

НСО	1	1	1	2	3	4	4	5	6	7
КСО	4	8	2	3	8	5	8	6	7	8
ДВО	1	8	8	2	4	6	1	5	6	2

9.07.

НСО	1	1	2	3	4	5	5	6
КСО	4	2	3	7	5	6	7	7
ДВО	5	4	1	6	2	2	7	4

9.08.

НСО	1	2	3	3	4	5	6
КСО	2	3	6	4	5	7	7
ДВО	4	6	1	2	6	4	1

9.09.

НСО	1	2	2	3	4	4	5	5	6
КСО	2	6	3	4	5	6	6	7	7
ДВО	5	2	1	4	3	4	5	8	1

9.10.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	7
КСО	3	2	7	8	5	4	8	5	7	8	6	7	8
ДВО	7	1	3	8	1	7	1	8	5	6	6	5	3

9.11.

НСО	1	1	2	2	2	3	4	4	5	5	6
КСО	2	5	3	6	4	5	6	5	6	7	7
ДВО	4	1	3	7	8	8	7	7	1	4	3

9.12.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	3	4	5	6
КСО	3	2	6	7	3	6	5	4	7	6	7
ДВО	2	3	5	1	1	2	4	8	1	4	3

9.13.

НСО	1	1	2	3	3	4	4	4	5	6
КСО	5	2	3	7	4	6	5	7	7	7
ДВО	3	6	7	8	6	2	3	2	1	3

9.14.

НСО	1	1	1	2	3	4	4	5	5	6	7
КСО	4	2	5	3	5	6	5	6	7	8	8
ДВО	7	1	2	2	1	4	3	5	6	8	2

9.15.

НСО	1	1	2	3	3	4	5	5	6
КСО	3	2	3	4	5	7	7	6	7
ДВО	1	2	2	5	8	1	6	3	3

9.16.

НСО	1	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6
КСО	3	2	4	5	4	7	7	5	7	6	7
ДВО	1	5	7	2	6	1	2	5	8	4	1

9.17.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
КСО	4	2	3	5	7	5	7	6	7	7
ДВО	5	3	2	1	6	5	5	4	6	4

9.18.

НСО	1	2	2	3	3	3	4	5	6	7
КСО	2	8	3	4	5	7	8	6	8	8
ДВО	3	8	1	7	4	5	7	7	2	1

9.19.

НСО	1	2	3	4	4	5	5	6
КСО	2	3	4	5	7	6	7	7
ДВО	5	1	4	1	5	4	8	1

9.20.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
КСО	3	2	3	4	7	5	5	7	7	6	7
ДВО	1	8	6	7	5	8	8	8	6	1	3

9.21.

НСО	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
КСО	5	2	7	3	4	7	6	6	7	7
ДВО	7	6	3	2	6	8	4	8	4	1

9.22.

НСО	1	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6
КСО	7	2	3	5	7	4	5	6	7	6	7
ДВО	5	5	4	5	2	7	8	4	4	5	1

9.23.

НСО	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	6
КСО	7	2	7	5	3	6	4	6	7	5	7	7
ДВО	3	5	3	7	8	5	3	8	2	1	7	1

9.24.

НСО	1	2	3	3	4	4	4	5	6
КСО	2	3	4	6	5	6	7	7	7
ДВО	8	6	8	6	4	5	6	4	1

9.25.

НСО	1	1	2	3	4	4	5	6	7
КСО	6	2	3	4	8	5	8	7	8
ДВО	1	5	8	2	8	4	8	8	2

9.26.

НСО	1	1	1	2	3	4	5	6
КСО	7	4	2	3	5	7	6	7
ДВО	8	2	1	4	1	7	3	3

9.27.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	5	6	6	7
КСО	3	2	4	6	6	7	5	7	8	7	8
ДВО	4	6	5	4	1	1	6	3	4	5	4

9.28.

НСО	1	2	2	3	3	3	4	4	5	6
КСО	2	5	3	6	5	4	6	7	7	7
ДВО	2	1	6	4	1	5	5	8	5	1

9.29.

НСО	1	1	2	3	4	4	5	6
КСО	2	4	3	5	6	7	7	7
ДВО	3	5	4	2	1	3	8	1

9.30.

НСО	1	1	2	2	3	4	5	6
КСО	7	2	3	6	4	5	7	7
ДВО	5	4	3	7	1	8	6	3

9.31.

НСО	1	1	1	2	3	3	3	4	5	5	6
КСО	4	3	2	5	4	6	5	6	7	6	7
ДВО	4	8	8	1	5	8	1	8	2	1	2

9.32.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6
КСО	5	4	2	3	6	7	4	6	7	5	7	6	7
ДВО	4	8	7	7	8	1	3	8	5	7	8	2	4

9.33.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	6	6	7
КСО	7	4	2	4	3	4	5	7	5	6	8	8	7	8
ДВО	7	1	3	5	4	8	3	8	6	5	2	7	5	1

9.34.

НСО	1	1	2	3	4	4	4	5	5	6	6	7
КСО	5	2	3	4	6	8	5	6	8	8	7	8
ДВО	4	1	3	4	6	1	3	4	2	4	1	2

9.35.

НСО	1	2	3	3	4	5	6	7
КСО	2	3	7	4	5	6	8	8
ДВО	2	7	4	5	2	1	6	4

9.36.

НСО	1	1	2	2	2	3	4	4	5	6	7
КСО	2	7	8	6	3	4	8	5	8	8	8
ДВО	6	3	4	2	5	4	4	2	8	7	2

9.37.

НСО	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6	6	7
КСО	2	7	5	3	5	7	4	6	5	6	7	8	8
ДВО	7	5	1	5	8	2	3	2	5	4	1	7	2

9.38.

НСО	1	2	3	3	3	4	4	5	6	6	7
КСО	2	3	5	4	8	5	6	8	7	8	8
ДВО	3	8	8	2	7	2	5	6	8	7	4

9.39.

НСО	1	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	7
КСО	8	6	2	6	3	4	6	5	6	8	7	8	8
ДВО	5	8	3	2	7	8	1	2	5	3	2	8	1

9.40.

НСО	1	1	1	2	3	4	5	6	7
КСО	4	3	2	7	7	5	6	7	8
ДВО	2	1	4	8	4	2	7	7	3

9.41.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7
КСО	4	2	7	3	6	5	8	6	6	8	7	8
ДВО	3	4	3	6	7	7	3	1	5	3	5	2

9.42.

НСО	1	1	1	2	2	3	4	5	5	6	6	7
КСО	6	3	2	6	5	4	5	7	6	8	7	8
ДВО	6	1	7	6	6	1	3	7	7	1	3	4

9.43.

НСО	1	1	2	3	4	4	4	5	6	6	7
КСО	3	2	7	4	5	7	6	8	7	8	8
ДВО	4	8	7	7	3	3	6	2	1	5	2

9.44.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	5	6
КСО	4	2	7	3	6	5	7	6	7
ДВО	5	5	5	7	5	8	1	6	1

9.45.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	7
КСО	4	7	2	5	3	4	7	6	7	6	7	6	7	8
ДВО	3	2	7	1	4	2	5	8	3	4	6	2	8	3

9.46.

НСО	1	2	3	3	3	4	5	6	7
КСО	2	3	4	8	5	5	6	7	8
ДВО	8	2	1	6	7	1	6	2	4

9.47.

НСО	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
КСО	2	4	4	3	6	7	5	5	6	7
ДВО	1	1	1	6	5	8	1	5	5	2

9.48.

НСО	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6
КСО	2	5	3	4	6	7	5	7	6	7	7
ДВО	5	1	2	3	8	8	7	1	2	8	3

9.49.

НСО	1	1	1	2	3	3	4	4	5	5	6
КСО	3	2	6	4	4	7	5	6	7	6	7
ДВО	3	1	4	1	4	3	3	3	6	1	3

9.50.

НСО	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	6
КСО	6	2	4	3	6	7	6	5	7	6	7
ДВО	6	2	4	8	3	4	7	1	5	8	2

9.51.

НСО	1	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7
КСО	2	6	3	5	4	8	7	8	8	7	8
ДВО	5	2	2	8	7	8	8	1	4	8	1

9.52.

НСО	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7
КСО	5	2	8	3	4	6	7	6	7	7	8
ДВО	2	8	5	3	2	5	6	1	6	2	2

9.53.

НСО	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7
КСО	7	2	3	4	8	8	5	6	7	8	8
ДВО	5	5	4	1	4	1	1	5	1	1	2

9.54.

НСО	1	1	2	2	3	3	3	4	5	6	6	7
КСО	5	2	3	4	5	4	8	6	7	7	8	8
ДВО	2	2	8	5	1	2	6	1	8	6	5	1

9.55.

НСО	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7
КСО	7	2	8	7	3	6	4	6	5	7	8	7	8
ДВО	3	3	6	1	2	3	5	1	2	4	7	6	2

9.56.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
КСО	3	2	4	5	6	5	6	7	6	8	7	8	8
ДВО	3	2	1	8	1	1	6	1	3	4	2	7	2

9.57.

НСО	1	1	1	2	2	3	4	4	5	6
КСО	4	3	2	7	5	7	6	5	6	7
ДВО	4	2	5	4	3	2	3	1	7	2

9.58.

НСО	1	2	2	3	3	4	5	5	6
КСО	2	3	6	5	4	7	7	6	7
ДВО	8	1	8	8	8	5	6	2	3

9.59.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
КСО	3	2	5	4	7	5	6	5	6	7	7
ДВО	4	2	4	5	8	7	3	5	6	6	4

9.60.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	3	4	5	5	6	7
КСО	6	8	2	6	3	7	4	5	6	7	6	8	8
ДВО	5	5	4	5	7	7	2	1	3	8	7	7	4

9.61.

НСО	1	1	2	3	4	4	5	6
КСО	3	2	7	4	7	5	6	7
ДВО	7	4	7	4	1	1	5	1

9.62.

НСО	1	2	2	2	3	4	4	5	6	7
КСО	2	5	8	3	4	6	7	7	8	8
ДВО	6	5	7	6	7	5	3	1	1	4

9.63.

НСО	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6
КСО	7	2	6	5	3	6	4	5	5	6	7	6	7
ДВО	5	3	4	3	7	7	2	6	3	4	5	7	3

9.64.

НСО	1	2	3	4	4	4	5	6	7
КСО	2	3	4	6	5	8	7	7	8
ДВО	8	3	7	2	3	5	3	6	2

9.65.

НСО	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7
КСО	2	8	3	7	4	7	5	8	6	8	8
ДВО	4	7	7	8	4	7	4	6	8	8	2

9.66.

НСО	1	2	2	2	3	3	4	5	6
КСО	2	6	7	3	7	4	5	7	7
ДВО	2	2	6	3	6	8	5	5	1

9.67.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	3	4	5	5	6
КСО	6	3	2	6	7	6	4	5	7	7	6	7
ДВО	8	2	2	6	5	4	7	2	1	8	7	3

9.68.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
КСО	4	2	7	3	5	6	7	5	7	6	7
ДВО	2	1	5	8	8	3	1	3	3	3	4

9.69.

НСО	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	6	6	7
КСО	2	5	7	3	6	7	4	8	7	6	8	7	8
ДВО	5	3	1	1	5	3	2	8	8	8	6	8	1

9.70.

НСО	1	1	2	3	3	4	4	4	5	6	7
КСО	5	2	3	7	4	7	6	8	7	7	8
ДВО	2	5	3	3	8	1	7	8	3	8	4

9.71.

НСО	1	2	3	3	3	4	5	6	6	7
КСО	2	3	7	5	4	6	7	7	8	8
ДВО	2	8	2	6	1	3	7	4	5	2

9.72.

НСО	1	2	2	3	3	4	5	6	6	7
КСО	2	7	3	6	4	5	8	8	7	8
ДВО	5	7	7	4	7	1	7	7	6	4

9.73.

НСО	1	1	1	2	3	4	4	4	5	5	6
КСО	2	5	3	6	4	5	7	6	6	7	7
ДВО	4	3	5	7	3	7	2	1	2	8	4

9.74.

НСО	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
КСО	3	2	4	5	4	5	5	7	6	7
ДВО	2	5	8	8	6	7	8	2	5	3

9.75.

НСО	1	2	2	2	3	4	5	5	6
КСО	2	5	4	3	5	6	6	7	7
ДВО	3	4	2	3	5	1	3	5	3

9.76.

НСО	1	2	3	3	4	5	5	6	7
КСО	2	3	6	4	5	8	7	7	8
ДВО	6	6	3	8	7	3	7	6	2

9.77.

НСО	1	1	2	**2**	3	4	4	4	5	5	6
КСО	3	2	3	7	4	5	7	6	6	7	7
ДВО	5	3	7	3	1	1	6	8	6	5	2

9.78.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7
КСО	2	3	7	3	7	4	7	5	7	6	7	8	8
ДВО	1	8	3	2	1	3	3	7	4	8	3	8	4

9.79.

НСО	1	1	2	3	3	4	5	5	6
КСО	2	6	3	5	4	6	7	6	7
ДВО	2	4	3	7	1	6	3	2	1

9.80.

НСО	1	1	2	3	4	4	4	5	6	6	7
КСО	3	2	7	4	8	5	7	6	7	8	8
ДВО	4	6	5	5	8	1	7	8	5	2	2

9.81.

НСО	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
КСО	7	3	2	5	7	5	4	7	5	7	6	7
ДВО	1	4	3	5	6	1	5	4	3	6	5	3

9.82.

НСО	1	1	2	2	2	3	4	5	5	5	6	7
КСО	6	2	8	4	3	4	5	6	7	8	8	8
ДВО	6	7	2	7	4	1	6	2	4	5	8	3

9.83.

НСО	1	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7
КСО	2	5	3	8	4	7	6	8	8	7	8
ДВО	5	2	7	4	3	7	6	6	5	2	2

9.84.

НСО	1	1	2	3	3	4	4	5	6	7
КСО	2	5	3	8	4	6	8	7	8	8
ДВО	2	8	8	6	1	8	4	7	3	4

9.85.

НСО	1	2	2	3	4	4	5	6	7
КСО	2	3	8	4	7	5	6	8	8
ДВО	8	2	2	5	6	8	6	8	3

9.86.

НСО	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
КСО	2	4	3	8	6	6	5	6	8	8	7	8
ДВО	5	5	3	3	6	8	2	7	8	6	8	2

9.87.

НСО	1	2	3	4	4	5	6	6	7
КСО	2	3	4	5	6	7	7	8	8
ДВО	4	2	4	8	1	5	4	4	4

9.88.

НСО	1	2	3	4	5	6	6	7
КСО	2	3	4	5	6	7	8	8
ДВО	8	5	3	3	7	3	6	1

9.89.

НСО	1	1	1	2	3	3	4	4	5	5	6
КСО	2	3	4	5	5	7	7	5	7	6	7
ДВО	7	3	4	5	2	3	7	4	6	1	1

9.90.

НСО	1	1	2	2	3	3	3	4	5	6	6	7
КСО	8	2	8	3	8	4	5	8	6	8	7	8
ДВО	5	3	2	7	6	2	2	7	1	5	1	3

9.91.

НСО	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	6
КСО	3	2	6	7	4	5	5	6	6	7	7
ДВО	4	1	2	3	4	1	6	5	2	7	2

9.92.

НСО	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
КСО	2	3	4	4	3	5	5	6	6	7	7
ДВО	3	6	2	3	8	3	1	2	7	3	3

9.93.

НСО	1	1	2	3	4	4	4	5	6
КСО	2	6	3	4	6	5	7	7	7
ДВО	2	7	4	6	3	3	3	4	3

9.94.

НСО	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7
КСО	2	7	3	7	4	7	5	6	8	7	8
ДВО	8	8	7	7	7	8	4	2	8	4	3

9.95.

НСО	1	2	2	3	3	3	4	5	6	6	7
КСО	2	8	3	8	7	4	5	6	7	8	8
ДВО	8	3	3	2	7	4	1	3	7	8	1

9.96.

НСО	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5	6	7
КСО	3	4	2	8	6	3	6	7	5	8	7	7	8
ДВО	4	6	4	6	3	2	7	2	4	3	8	8	1

9.97.

НСО	1	2	2	2	3	3	3	4	5	6
КСО	2	3	5	7	4	7	5	7	6	7
ДВО	2	4	6	8	4	3	4	8	2	2

9.98.

НСО	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	7
КСО	2	3	4	4	5	7	8	5	6	7	8	8
ДВО	6	2	2	1	7	8	8	5	5	8	6	1

9.99.

НСО	1	2	2	3	4	5	5	5	6	6	7
КСО	2	3	4	7	5	6	7	8	8	7	8
ДВО	6	6	5	7	2	3	8	3	2	5	2

9.00.

НСО	1	2	2	3	4	5	6	6	7
КСО	2	5	3	4	5	6	8	7	8
ДВО	5	8	8	8	2	4	8	5	2

Приложение. Основы линейной алгебры

Теория курса математического программирования в большой степени зависит от основных понятий линейной алгебры, которые студенты-экономисты изучали в курсе «Высшая математика». Тем не менее, перед изучением курса «Математическое программирование», студенту очень важно повторить теоретические основы и вспомнить навыки решения задач по линейной алгебре.

Применение метода Жордана–Гаусса при решении систем линейных алгебраических уравнений

Уравнение относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейным, если его можно записать в виде $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a$. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a – произвольные действительные числа.

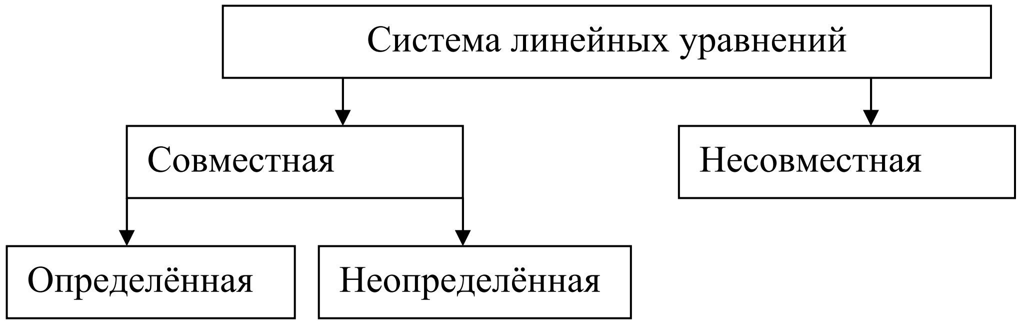
Набор значений неизвестных $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_n$ является решением заданного уравнения, если в результате подстановки этих значений в данное уравнение, оно обращается в арифметическое тождество. Предположим, что задана система из **m** линейных уравнений (СЛУ) относительно **n** неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В общем случае такую систему можно записать в следующем виде:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m. \end{array} \qquad (1)$$

Эта запись предполагает, что уравнения системы пронумерованы числами 1, 2, . . . , m. Коэффициенты при неизвестных снабжены двумя индексами. Первый из них определяет номер уравнения, а второй – номер соответствующей переменной. Например, $\mathbf{a_{ij}}$ является коэффициентом при неизвестной $\mathbf{x_j}$ в **i**-м уравнении.

Определение 1. Совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется решением системы (1), если в результате замены неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, все уравнения системы превратятся в арифметические тождества.

Система (1), имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, в противном случае – несовместной. Совместная система, имеющая только одно решение, называется определённой, в противном случае – неопределённой. Это можно представить графически следующим образом:



Одним из универсальных методов решения систем линейных уравнений является метод полного исключения переменных. Этот метод называется методом Жордана–Гаусса. Суть этого метода заключается в том, что в каждом из уравнений системы выбирается по одной переменной с коэффициентом отличным от нуля. Это уравнение и выбранный коэффициент называются разрешающими. Разрешающий коэффициент необходимо преобразовать в единичный и исключить его из остальных уравнений системы. Переменные, соответствующие разрешающим коэффициентам, называются базисными, а остальные – свободными. Из преобразованной таким образом системы линейных уравнений легко найти её решение (решения), путём выражения базисных переменных через свободные.

Преобразования системы линейных уравнений осуществляются с помощью элементарных (эквивалентных) гауссовских преобразований в виде таблиц:

1. Любое уравнение (строку таблицы) можно умножить на любую константу отличную от нуля.
2. К любому уравнению (строке) можно прибавить любое другое уравнение, умноженное на любую константу.
3. Уравнения системы (строки) можно переставлять местами.

Таким образом, с помощью первого гауссовского преобразования проводится работа с разрешающими уравнениями. Для того чтобы преобразовать разрешающий элемент в единичный, необходимо все коэффициенты разрешающего уравнения умножить на обратное значение этого элемента. Полученное новое уравнение записываем в новую систему (новую таблицу).

Из остальных уравнений данную переменную необходимо исключить, то есть в разрешающем столбце новой таблицы получить нули. Это осуществляется с помощью второго гауссовского преобразования. Новое разрешающее уравнение умножается на противоположное значение того числа, вместо которого необходимо получить нуль. Затем прибавить это уравнение к преобразуемому уравнению (сложить соответствующие коэффициенты уравнений). Полученное уравнение записывается в новую таблицу.

В процессе преобразования возможны следующие случаи.

1. В одном из уравнений все коэффициенты левой части обратились в нули, а правая часть равна некоторому числу, отличному от нуля. Это означает, что система линейных уравнений несовместная, так как данному уравнению не удовлетворяют никакие значения переменных.
2. Левая и правая части некоторого уравнения обращаются в нуль. Такому уравнению удовлетворяют все значения неизвестных переменных, а, следовательно, и те, которые удовлетворяют остальным уравнениям системы. Таким образом, это уравнение может быть исключено из рассмотрения.
3. В каждом уравнении системы выделено по одной базисной переменной. Это означает, что решение системы линейных уравнений найдено. Если левые части уравнений системы состоят только из базисных переменных, то такая система имеет единственное решение, то есть она является определённой. Если в левой части имеются также и свободные переменные, то эта система имеет бесчисленное множество решений, то есть она является неопределённой.

Задача. Решить следующую систему линейных уравнений методом Жордана–Гаусса.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 &= 4, \\ 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 3, \\ x_2 - \ \ x_3 \qquad &= 2. \end{aligned}$$

Решение.

В первом уравнении уже есть базисная переменная. Причём, в качестве базисной можно взять либо $\mathbf{x_1}$, либо $\mathbf{x_4}$, так как эти переменные входят в первое уравнение с коэффициентом 1, а в остальных уравнениях системы они отсутствуют. Возьмём $\mathbf{x_1}$. Заполним исходную таблицу (табл. 1).

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Преобразования
A_1	1	0	0	1	4	
	0	2	3	0	3	+ Табл. 1
	0	1	-1	0	2	
A_1	1	0	0	1	4	
	0	0	5	0	-1	×1/5 Табл. 2
A_2	0	1	-1	0	2	×(-2)
A_1	1	0	0	1	4	
A_3	0	0	1	0	-1/5	×1 Табл. 3
A_2	0	1	0	0	9/5	

Теперь необходимо оставить базисную переменную либо во втором, либо в третьем уравнении. Оставим в третьем уравнении и в качестве разрешающего столбца возьмём второй столбец, то есть введём в базис вектор $\mathbf{A_2}$.

В новой таблице (табл. 2) мы должны получить единичный вектор во втором столбце с единицей в третьем уравнении (новый разрешающий элемент должен всегда равняться 1). Так как прежний разрешающий элемент уже равен единице, то перепишем третью строку табл. 1 в новую таблицу без изменений. Так как переменная $\mathbf{x_2}$ в первом уравнении уже отсутствует (элемент (1,2) табл. 1 равен 0), то эту строку также переписываем в табл. 2 без изменения. Для того, чтобы исключить переменную $\mathbf{x_2}$ из второго уравнения воспользуемся вторым гауссовским преобразованием: умножим новую разрешающую строку (строка 3 табл. 2) на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки табл. 1. Результат запишем второй строкой табл. 2. Таким образом, второй столбец в табл. 2 стал единичным, а переменная $\mathbf{x_2}$ стала базисной переменной в третьем уравнении.

Осталась вторая строка, в которой не выделена базисная переменная. В данном уравнении имеется единственный ненулевой элемент 5, поэтому столбец 3 возьмём в качестве разрешающего, то есть в качестве базисной переменной оставим $\mathbf{x_3}$. В новой таблице (табл. 3) разрешающий столбец должен быть преобразован в единичный столбец с единицей во второй строке. Данное преобразование начинаем с преобразования разрешающей строки.

Умножим вторую строку табл. 2 на 1/5 и результат запишем второй строкой табл. 3. Поскольку переменной $\mathbf{x_3}$ нет в первом уравнении, то эту строку переписываем в табл. 3 без изменений. Затем для исключения переменной $\mathbf{x_3}$ из третьего уравнения прибавим вторую строку табл. 3 к третьей строке табл. 2. Результат запишем третьей строкой табл. 3.

В результате проведённых преобразований в каждом уравнении имеется по одной базисной переменной, поэтому данная система линейных уравнений является совместной. В левой части кроме базисных переменных имеется и свободная переменная ($\mathbf{x_4}$), поэтому данная система является неопределённой. Для записи общего решения такой системы необходимо из последней таблицы выразить базисные переменные через свободные

$$x_1 = 4 - x_4, \qquad x_3 = -1/5, \qquad x_2 = 9/5.$$

Придавая различные значения свободной переменной $\mathbf{x_4}$, мы можем найти частные решения системы. Таких решений будет бесчисленное множество.

Матрицы и операции над ними

Набор действительных чисел, заданных в ввиде прямоугольной таблицы из **m** строк и **n** столбцов, называется матрицей **A** размерностью [**m** × **n**]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа $\mathbf{a_{ij}}$ называются элементами матрицы. Здесь индексы **i** и **j** соответственно определяют номера строки и столбца (i = $\overline{1,m}$, j = $\overline{1,n}$).

Определение 2. Матрица, у которой количество строк совпадает с количеством столбцов, называется квадратной.

Определение 3. Количество строк (столбцов) квадратной матрицы называется порядком матрицы.

У квадратных матриц имеется главная и побочная диагонали.

Определение 4. Множество элементов квадратной матрицы **A** порядка **n** $\{\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{33} \ldots, \mathbf{a}_{nn}\}$ называется главной диагональю матрицы, а множество $\{\mathbf{a}_{1n}, \mathbf{a}_{2n-1}, \mathbf{a}_{3n-2}, \ldots, \mathbf{a}_{n1}\}$ – побочной диагональю.

Существуют следующие операции над матрицами.

1. Транспонирование матрицы.

Определение 5. Матрица **A'** называется транспонированной матрицей к матрице **A**, если столбцы матрицы **A**, стали строками матрицы **A'**.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Произведение скаляра и матрицы.

Определение 6. Для умножения скаляра **λ** на матрицу **A**, необходимо каждый элемент матрицы **A** умножить на скаляр **λ.**

3. Сумма матриц **A** и **B**.

Данная операция справедлива только для матриц, имеющих одинаковую размерность.

Определение 7. Результатом сложения матриц **A** и **B** является матрица **C** той же размерности, что и матрицы **A** и **B**, а элементами будет сумма соответствующих элементов матриц **A** и **B** (т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$).

4. Произведение матриц **A** и **B.**

В общем случае для произведения матриц не выполняется свойство коммутативности, то есть, **A·B ≠ B·A**. Более того, произведение **A·B** может существовать, а произведение **B·A** может и не существовать.

Определение 8. Матрицу **A** можно умножить на матрицу **B**, если количество столбцов матрицы **A** совпадает с количеством строк матрицы **B**.

Это условие можно выразить простым мнемоническим правилом.

Пусть матрица **A** имеет размерность [**m** × **n**], а матрица **B** – [**l** × **k**].

Тогда [m × n] [l × k]

= произведение существует;

[m × k] размерность матрицы результата.

Пусть размерность матриц **A** и **B** таковы, что операция произведения матриц существует.

Определение 9. Для того чтобы умножить матрицу **A** на матрицу **B**, необходимо скалярно умножить каждую строку матрицы **A** на первый столбец матрицы **B**. Получаем первый столбец результирующей матрицы. Затем каждую строку матрицы **A** скалярно умножаем на второй столбец матрицы **B**. Получаем второй столбец результирующей матрицы. Продолжая данный процесс, скалярно умножаем каждую строку матрица **A** на последний столбец матрицы **B**. В результате получаем последний столбец матрицы произведения.

Пример. **Найти произведение матриц A и B.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, существует ли такое произведение.

$[2 \times 3]$ $[3 \times 4]$

$=$ произведение существует

$[2 \times 4]$ размерность матрицы результата.

Найдём данное произведение:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\times2+0\times1+(-1)\times(-1) & 2\times0+0\times(-2)+(-1)\times4 & 2\times1+0\times0+(-1)\times3 & 2\times(-1)+0\times2+(-1)\times1 \\ (-3)\times2+2\times1+1\times(-1) & (-3)\times0+2\times(-2)+1\times4 & (-3)\times1+2\times0+1\times3 & (-3)\times(-1)+2\times2+1\times1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Определение 10. Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратной матрицей к матрице **A**, если $A^{-1}\cdot A = A\,A^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Обратная матрица существует для квадратной и невырожденной матрицы (определитель отличен от нуля).

Известно несколько методов нахождения обратной матрицы. Остановимся на методе Жордана–Гаусса. Суть данного метода состоит в следующем.

Необходимо к исходной квадратной матрице приписать единичную матрицу того же порядка. Затем с помощью эквивалентных преобразований добиться того, чтобы на месте исходной матрицы получилась единичная матрица, тогда на месте единичной матрицы будет обратная. Это легко доказать, если перемножить исходную матрицу **A** на неизвестную матрицу X и результат приравнять к единичной матрице. Решения полученных систем линейных уравнений и образуют обратную матрицу.

Если в процессе преобразования получится так, что все элементы левой части некоторой строки обратились в нули, то это означает, что исходная матрица не имеет обратной, так как является вырожденной.

Задача. Найти обратную матрицу и проверить правильность проведённых вычислений

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдём обратную матрицу методом Жордана–Гаусса.

К исходной матрице третьего порядка припишем соответствующую единичную матрицу. Затем с помощью гауссовских преобразований добьёмся того, чтобы на месте исходной матрицы получилась единичная матрица, тогда на месте единичной будет обратная.

Исходная матрица			Единичная матрица			Преобразования
0	2	-2	1	0	0	+
-1	4	0	0	1	0	
2	0	-4	0	0	1	× (-1/4)
-1	2	0	1	0	-1/2	+
-1	4	0	0	1	0	× ¼
-1/2	0	1	0	0	-1/4	× (2)
-1/2	0	0	1	-1/2	-1/2	× (-2)
-1/4	1	0	0	1/4	0	×(-2) +
-1/2	0	1	0	0	-1/4	+
1	0	0	-2	1	1	×1/4 ×1/2
0	1	0	-1/2	1/2	1/4	
0	0	1	-1	1/2	1/4	
Единичная матрица			Обратная матрица			

На месте исходной матрицы получена единичная. Обратной матрицей к матрице **A** будет следующая матрица $\mathbf{A^{-1}}$:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Проверим правильность вычислений. Для этого найдём произведение матриц A и A^{-1}.

$$A \times A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В результате умножения матриц получена единичная матрица. Следовательно, найденная матрица действительно является обратной.

Основы векторной алгебры

Определение 11. Произвольный упорядоченный набор ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) из **n** действительных чисел называется **n**–мерным вектором **X**. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами этого вектора.

Определение 12. Совокупность всех **n**–мерных векторов называется **n**–мерным векторным пространством.

Пусть задана система из **k** **n**–мерных векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Определение 13. Разложением вектора **Y** по векторам системы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется выражение $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_k X_k$.

Определением 14. Система векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется линейно независимой, если их линейная комбинация $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_k X_k = 0$ только в том случае, когда все $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$ равны нулю.

Из определения следует, что если векторы линейно независимы, то ни один из них нельзя разложить по остальным векторам системы.

Теорема 1. В **n**–мерном векторном пространстве любые **n+1** векторов линейно зависимы.

Рассмотрим понятие линейной независимости векторов в двух и трёхмерном пространствах. В двухмерном пространстве любые три и более векторов, согласно теореме, являются линейно зависимыми.

Рассмотрим два двухмерных вектора. Такие векторы являются линейно зависимыми в том случае, если они коллинеарные:

Коллинеарные
(линейно зависимые)

Неколлинеарные
(линейно независимые)

В трёхмерном пространстве три вектора являются линейно зависимыми, если они являются компланарными, то есть лежат в одной плоскости, и линейно независимые, если не лежат в одной плоскости:

Компланарные
(линейно зависимые)

Некомпланарные
(линейно независимые)

Для того чтобы в общем случае проверить, является ли заданная система векторов линейно зависимой, необходимо построить линейную комбинацию этих векторов и приравнять её к нулю. Если полученная система линейных уравнений имеет только нулевое решение, то векторы линейно независимы, в противном случае – линейно зависимые.

Теорема 2. Система из **n** векторов **n**–мерного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля.

Таким образом, если количество векторов системы равно их размерности, то проверить их линейную независимость очень просто: вычислить соответствующий определитель и проанализировать его значение.

Большое значение в линейной алгебре имеет понятие базиса пространства.

Определение 15. Набор любых **n** линейно независимых векторов **n**–мерного векторного пространства называется базисом этого пространства.

Таким образом, для того чтобы некоторое множество **n**–мерных векторов являлось базисом **n**–мерного пространства, необходимо, чтобы выполнялись два условия:

1. Количество векторов в системе было равно **n**.
2. Эти векторы должны быть линейно независимыми.

Теорема 3. Любой вектор **n**–мерного векторного пространства можно разложить и притом единственным образом по векторам базиса.

Задача. Разложить вектор $A_0 = (1, 1, 0)$ по векторам $A_1 = (1, 1, 2,)$; A_2 (1, 1, 4); A_3(0, 3, 2).

Решение.

Вектор A_0 можно разложить по векторам, если векторы A_1, A_2 и A_3 образуют базис. Поэтому необходимо проверить этот факт. Однако, при использовании метода Жордана–Гаусса, то в этом нет необходимости.

Запишем линейную комбинацию векторов A_1, A_2 и A_3.и приравняем её вектору A_0: $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = A_0$. Подставляем значения векторов A_1, A_2 и A_3

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя операции умножения скаляра на вектор и сложения векторов, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 1, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решаем её методом Жордана–Гаусса в виде таблиц.

Базис	A_1	A_2	A_3	A_0	Преобразования
	1	1	0	1	
	1	1	3	1	+
	2	4	2	0	×(1/2)
	1	1	0	1	
	-2	-5	0	1	
A_3	1	2	1	0	×(-3)
A_2	1	1	0	1	×5 ×(-2)
	3	0	0	6	×1/3
A_3	-1	0	1	-2	
A_2	0	1	0	-1	
A_1	1	0	0	2	×(-1) ×1
A_3	0	0	1	0	

В результате проведённых преобразований получили $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$.

Таким образом, векторы A_1, A_2, A_3.образуют базис и найденные значения коэффициентов являются коэффициентами разложения вектора A_0 по векторам базиса.

$$2A_1 - A_2 = A_0.$$

Как оказалось для разложения вектора A_0, достаточно использование только двух векторов A_1 и A_2. Это означает, что вектор A_0 лежит в плоскости этих векторов.

Базисные решения систем линейных уравнений

Вернёмся к решению систем линейных уравнений. В начале данного приложения мы давали определение решения таких систем. Рассмотрим понятие решения системы линейных уравнений с точки зрения векторной алгебры. Запишем систему (1) в векторной форме

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = A_0, \text{ где} \qquad (2)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Нетрудно показать, выполнив соответствующие операции с векторами, что системы линейных уравнений (1) и (2) являются эквивалентными. Поэтому любое решение системы (2) будет также решением системы (1).

Определение 16. Решить систему линейных уравнений (2) значит найти разложение вектора $\mathbf{A_0}$ по векторам $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$.

Предположим, что $\mathbf{m < n}$. Так как векторы разложения (2) являются **m**-мерными, то любая система **m** линейно независимых векторов из $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ образуют базис в **m**-мерном пространстве и, следовательно, вектор $\mathbf{A_0}$ можно разложить по этому базису. Например, если первые **m** векторов системы (2) являются линейно независимыми, то они образуют базис. Такие векторы называются базисными. На основании теоремы 3 вектор $\mathbf{A_0}$ можно разложить по этому базису и притом единственным образом. Векторы $\mathbf{A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots}$, A_n называются свободными. Они не участвуют в разложении вектора $\mathbf{A_0}$ и поэтому соответствующие свободные переменные $\mathbf{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots , x_n}$ полагаются равными нулю. Таким образом, в любом базисном решении все свободные переменные равны нулю.

Если взять множество любых других **m** линейно независимых векторов из $\mathbf{A_1, A_2, \dots , A_n}$, то они также образуют базис. Следовательно, вектор $\mathbf{A_0}$ можно также разложить по этому базису. Это будет другое базисное решение.

Сколько же всего существует базисных решений систем линейных уравнений? Предположим, что система имеет **n** переменных и состоит из **m** независимых уравнений. В этом случае количество базисных решений будет не более чем число сочетаний из **n** по **m** – c_n^m. Если некоторые наборы из **m** векторов являются линейно зависимыми, то базисных решений будет на соответствующее количество меньше чем c_n^m. Например, система из трёх линейных независимых уравнений, имеющая четыре переменных, будет иметь базисных решений не более $c_4^3 = 4$. Перечислим возможные базисы для такой системы: (A_1; A_2; A_3), (A_1; A_2; A_4), (A_1; A_3; A_4) и (A_2; A_3; A_4).

Задача. Для следующей системы линейных уравнений найти все базисные решения

$$\begin{aligned} -4x_1 \qquad\quad + x_3 \qquad &= 6,\\ -2x_2 \qquad + x_4 &= 4,\\ 2x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &= 8. \end{aligned}$$

Решение.

Базисные решения будем находить с помощью метода Жордана-Гаусса.

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Преобразования
A_3	-4	0	1	0	6	
A_4	0	-2	0	1	4	+
	2	2	0	0	8	×1/2
A_3	-4	0	1	0	6	
A_4	2	0	0	1	12	
A_2	1	1	0	0	4	×2

В каждом уравнении выделено по одной базисной переменной. Получено следующее общее решение системы:

$$\begin{aligned} x_3 &= \ \ 6 + 4x_1,\\ x_4 &= 12 - 2x_1 ,\\ x_2 &= \ \ 4 - \ x_1. \end{aligned}$$

Если положить значение свободной переменной $\mathbf{x_1}$.равным нулю, то получим следующие коэффициенты в разложении вектора $\mathbf{A_0}$ по векторам $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ и $\mathbf{A_4}$: $x_3 = 6$, $x_4 = 12$, $x_2 = 4$. Получено следующее базисное решение: $\mathbf{X_{Б1}} = (0; 4; 6; 12)$. Таким образом, разложение вектора $\mathbf{A_0}$ по векторам $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ и $\mathbf{A_4}$ будет следующим: $A_0 = 4A_2 + 6A_3 + 12A_4$.

Для того чтобы перейти к другому базисному решению, необходимо свободный вектор $\mathbf{A_1}$ ввести в базис, то есть столбец $\mathbf{A_1}$ последней таблицы преобразовать в единичный. Если в качестве разрешающего элемента взять (–4), то из базиса выйдет вектор $\mathbf{A_3}$, если 2, то $\mathbf{A_4}$ и так далее. На данном этапе мы определили только одно базисное решение, поэтому всё равно какой элемент взять в качестве разрешающего. Пусть им будет (–4). Выполним указанные преобразования.

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Преобразования
A_3	-4	0	1	0	6	×(-1/4)
A_4	2	0	0	1	12	+
A_2	1	1	0	0	4	+
A_1	1	0	-1/4	0	-3/2	×(-2) ×(-1)
A_4	0	0	1/2	1	15	
A_2	0	1	1/4	0	11/2	

Получаем следующее базисное решение: $\mathbf{X_{Б2}} = (-3/2; 11/2; 0; 15)$. Разложение вектора $\mathbf{A_0}$ по векторам базиса $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{A_4}$ будет $A_0 = -3/2A_1 + 11/2A_2 + 15A_4$.

Для перехода к следующему базисному решению необходимо свободный вектор $\mathbf{A_3}$ ввести в базис, то есть столбец $\mathbf{A_3}$ последней таблицы преобразовать в единичный. Если в качестве разрешающего элемента взять (–1/4), то из базиса выйдет вектор $\mathbf{A_1}$, и мы перейдём к базису $(\mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4})$. Но такое базисное решение уже есть – $\mathbf{X_{Б1}}$, следовательно, данный элемент нельзя взять в качестве разрешающего. Возьмём в качестве разрешающего элемента 1/2. Проведём соответствующие преобразования.

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Преобразования
A_1	1	0	-1/4	0	-3/2	+
A_4	0	0	1/2	1	15	×(2)
A_2	0	1	1/4	0	11/2	+
A_1	1	0	0	1/2	6	
A_3	0	0	1	2	30	×(1/4)×(-1/4)
A_2	0	1	0	-1/2	-2	+

Получаем третье базисное решение $\mathbf{X_{Б3}}$ = (6; -2; 30; 0), то есть разложение вектора $\mathbf{A_0}$ по векторам $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{A_3}$ будет следующим $A_0 = 6A1 - 2A_2 + 30A_3$.

Для перехода к четвёртому базисному решению необходимо свободный вектор $\mathbf{A_4}$ ввести в базис, то есть столбец $\mathbf{A_4}$ последней таблицы преобразовать в единичный. В качестве разрешающего элемента можно взять только элемент (–1/2) столбца $\mathbf{A_4}$ последней таблицы. В противном случае мы получим ранее найденные базисные решения.

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Преобразования
A_1	1	0	0	½	6	+
A_3	0	0	1	2	30	+
A_2	0	1	0	-1/2	-2	×(-2)
A_1	1	0	1	0	4	
A_3	0	0	4	0	22	
A_4	0	1	-2	1	4	×(-1/2)×(-2)

Получаем четвёртое базисное решение $\mathbf{X_{Б4}}$ = (4; 0; 22; 4). Разложение вектора $\mathbf{A_0}$ по векторам $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_3}$ и $\mathbf{A_4}$ следующее: $A_0 = 4A_1 + 22A_3 + 4A_4$.

Таким образом, данная система линейных уравнений имеет максимально возможное для таких систем количество базисных решений.

П.1. Задачи

1. Для следующих матриц найти обратные и проверить правильность вычислений.

П.1.01.	**П.1.02.**	**П.1.03.**	**П.1.04.**	**П.1.05.**
0 2 0 0 3 -1 1 0 -4	0 3 4 1 1 0 0 1 4	-3 0 3 0 1 -3 -4 0 2	1 0 4 0 0 4 0 4 1 0 2 0 0 4 0 1	0 1 1 4 0 -4 1 0 3
П.1.06	**П.1.07.**	**П.1.08.**	**П.1.09**	**П.1.10.**
3 0 0 0 1 4 -1 0 2	0 3 4 1 2 0 0 1 1	1 0 0 0 0 3 0 1 4	3 0 3 1 0 2 0 1 2	0 0 -3 1 4 0 0 4 1
П.1.11	**П.1.12.**	**П.1.13.**	**П.1.14**	**П.1.15.**
1 0 2 1 1 0 0 2 -4	1 0 0 -2 0 1 1 0 0 -1 -2 0 1 0 0 2	4 3 0 0 2 -1 2 0 4	-1 -3 0 0 -4 0 4 0 0 0 2 -4 0 -1 0 -1	-3 0 -1 -2 0 2 2 1 0
П.1.16	**П.1.17.**	**П.1.18.**	**П.1.19**	**П.1.20.**
0 2 0 1 0 0 3 4 -3 0 2 0 -3 2 0 0	1 0 3 0 -1 0 0 1 -2	0 0 1 4 1 0 3 0 -2	1 1 0 -3 0 2 1 0 3	2 4 0 -1 0 1 2 1 0

П.1.21	**П.1.22.**	**П.1.23.**	**П.1.24**	**П.1.25.**
$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}$
П.1.26	**П.1.27.**	**П.1.28.**	**П.1.29**	**П.1.30.**
$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}$
П.1.31.	**П.1.32.**	**П.1.33.**	**П.1.34.**	**П.1.35.**
$\begin{matrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{matrix}$
П.1.36.	**П.1.37.**	**П.1.38.**	**П.1.39.**	**П.1.40.**
$\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{matrix}$
П.1.41.	**П.1.42.**	**П.1.43.**	**П.1.44.**	**П.1.45.**
$\begin{matrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}$
П.1.46.	**П.1.47.**	**П.1.48.**	**П.1.49.**	**П.1.50.**
$\begin{matrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 0 \end{matrix}$
П.1.51.	**П.1.52.**	**П.1.53.**	**П.1.54.**	**П.1.55.**
$\begin{matrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix}$
П.1.56.	**П.1.57.**	**П.1.58.**	**П.1.59.**	**П.1.60.**
$\begin{matrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{matrix}$
П.1.61.	**П.1.62.**	**П.1.63.**	**П.1.64.**	**П.1.65.**
$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{matrix}$
П.1.66.	**П.1.67.**	**П.1.68.**	**П.1.69.**	**П.1.70.**
$\begin{matrix} 0 & 0 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \end{matrix}$
П.1.71.	**П.1.72.**	**П.1.73.**	**П.1.74.**	**П.1.75.**
$\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

П.1.76.	**П.1.77.**	**П.1.78.**	**П.1.79.**	**П.1.80.**
2 0 -2 0 0 1 0 3 -4 0 0 4 0 1 3 0	0 -3 2 -2 0 1 -1 2 0	4 3 0 4 1 0 0 -4 1	3 0 0 -3 1 -3 0 0 0 0 -1 -2 0 2 -2 0	2 0 1 2 2 0 0 4 2
П.1.81.	**П.1.82.**	**П.1.83.**	**П.1.84.**	**П.1.85.**
0 -3 4 0 3 -2 1 0 3	0 4 1 1 1 0 0 4 3	0 4 -4 0 0 3 0 4 1 0 3 0 1 0 0 1	4 2 0 0 1 1 2 3 0	4 3 0 4 0 -2 0 1 3
П.1.86.	**П.1.87.**	**П.1.88.**	**П.1.89.**	**П.1.90.**
-2 2 0 2 3 0 -3 0 1	2 0 2 3 3 0 0 1 2	1 4 0 0 0 -1 0 3 4	0 -2 2 0 3 1 1 0 3	0 1 0 2 0 1 -3 0 2
П.1.91.	**П.1.92.**	**П.1.93.**	**П.1.94.**	**П.1.95.**
0 1 1 1 -4 0 -4 0 3	-2 2 0 1 4 0 -2 0 1	0 4 0 1 1 1 0 0 0 0 3 -3 3 0 3 0	0 -3 2 0 1 0 1 0 -2	0 0 4 3 -3 0 3 0 3 4 0 0 0 -1 0 1
П.1.96.	**П.1.97.**	**П.1.98.**	**П.1.99.**	**П.1.00.**
0 2 4 0 2 4 1 0 2	0 -3 4 0 0 -1 1 2 0	2 0 1 -1 -1 0 0 -4 0	1 2 0 0 0 4 0 -3 4	0 1 -4 0 4 1 1 0 -4

2. Разложить вектор A_0 по векторам A_1,A_2, и A_3.

П.2.01.	A_1=(3; 1;-4), A_1=(1; 0; 0), A_3=(4;-1; 4), A_0=(0; 0; 1).
П.2.02.	A_1=(1; 2; 1), A_1=(3; 4; 4), A_3=(1;-1; 1), A_0=(-2; 4; 1).
П.2.03.	A_1=(-2; 1; 0), A_1=(0; 0; 1), A_3=(2; 3; 2), A_0=(1; 1; 0).
П.2.04.	A_1=(1; 0; 3), A_1=(3; 0;-1), A_3=(-2; 4; 3), A_0=(1; 4; 3).
П.2.05.	A_1=(3; 0; 1), A_1=(0; 0; 1), A_3=(4;-2; 4), A_0=(1;-2; 2).
П.2.06.	A_1=(3; 2; 0), A_1=(-3; 1; 0), A_3=(0; 3; 4), A_0=(-3; 0;-2).
П.2.07.	A_1=(-3; 2; 0), A_1=(-3; 1; 4), A_3=(1; 4;-2), A_0=(0; 4; 1).
П.2.08.	A_1=(1; 0; 2), A_1=(3;-1; 2), A_3=(3; 1; 4), A_0=(4; 0; 4).
П.2.09.	A_1=(1; 0; 3), A_1=(0;-1;-2), A_3=(3;-1;-1), A_0=(1; 0; 0).
П.2.10.	A_1=(-4; 0; 2), A_1=(1; 0;-2), A_3=(3;-3; 2), A_0=(2;-4; 0).
П.2.11.	A_1=(1; 3; 4), A_1=(0; 2; 2), A_3=(2;-4; 2), A_0=(1; 1; 3).
П.2.12.	A_1=(0; 0; 1), A_1=(4; 4; 2), A_3=(-4;-3; 0), A_0=(0; 1; 0).
П.2.13.	A_1=(-1; 2;-1), A_1=(1; 0; 0), A_3=(-3;-2; 3), A_0=(4; 0;-1).
П.2.14.	A_1=(-3; 0; 2), A_1=(4; 2;-4), A_3=(-3; 1;-4), A_0=(2;-2; 4).
П.2.15.	A_1=(1;-3; 4), A_1=(4; 2; 2), A_3=(-2; 4;-2), A_0=(2; 1; 1).
П.2.16.	A_1=(-2; 0; 1), A_1=(2; 2; 4), A_3=(-2; 1; 3), A_0=(0; 0; 1).
П.2.17.	A_1=(-1;-4; 3), A_1=(0; 1; 0), A_3=(4; 3; 2), A_0=(1; 0; 0).
П.2.18.	A_1=(1; 3; 0), A_1=(4;-2; 2), A_3=(-3; 2; 2), A_0=(-2;-3; 1).
П.2.19.	A_1=(2; 3; 2), A_1=(-3;-4; 2), A_3=(1; 0; 0), A_0=(0;-3; 4).
П.2.20.	A_1=(-2;-1; 3), A_1=(0; 0; 1), A_3=(3;-3;-2), A_0=(-3; 0; 4).
П.2.21.	A_1=(1; 0; 0), A_1=(4;-4;-2), A_3=(2; 3; 3), A_0=(3; 2; 0).
П.2.22.	A_1=(-4;-2; 4), A_1=(0; 1; 0), A_3=(2; 0;-3), A_0=(-2; 3; 2).
П.2.23.	A_1=(0; 1; 1), A_1=(1; 3;-2), A_3=(-4; 3;-1), A_0=(2; 2; 2).
П.2.24.	A_1=(3; 4;-3), A_1=(0; 0; 1), A_3=(0;-3; 3), A_0=(4; 4; 2).
П.2.25.	A_1=(0; 0; 1), A_1=(1;-3; 0), A_3=(1; 4;-4), A_0=(1; 2; 3).
П.2.26.	A_1=(0; 4; 4), A_1=(4; 0; 4), A_3=(3; 0; 1), A_0=(2; 2;-3).
П.2.27.	A_1=(0; 3; 1), A_1=(2;-4; 4), A_3=(3; 0;-1), A_0=(1; 0; 0).
П.2.28.	A_1=(-2;-2; 0), A_1=(4; 0;-1), A_3=(4;-1; 0), A_0=(2; 4;-2).
П.2.29.	A_1=(-4; 0;-1), A_1=(2; 1; 0), A_3=(4; 4; 0), A_0=(4; 1; 4).

П.2.30.	$A_1=(3;-1;1)$, $A_1=(0;1;2)$, $A_3=(-4;1;0)$, $A_0=(-1;4;2)$.
П.2.31.	$A_1=(-2;2;4)$, $A_1=(2;0;3)$, $A_3=(1;0;4)$, $A_0=(3;3;0)$.
П.2.32.	$A_1=(1;4;-3)$, $A_1=(4;-2;3)$, $A_3=(0;4;-4)$, $A_0=(3;-3;3)$.
П.2.33.	$A_1=(3;2;3)$, $A_1=(-1;4;2)$, $A_3=(-3;2;0)$, $A_0=(1;-4;0)$.
П.2.34.	$A_1=(0;2;4)$, $A_1=(0;1;4)$, $A_3=(-1;4;-3)$, $A_0=(4;3;0)$.
П.2.35.	$A_1=(1;2;3)$, $A_1=(0;3;3)$, $A_3=(3;-4;0)$, $A_0=(1;0;-1)$.
П.2.36.	$A_1=(2;1;-4)$, $A_1=(2;1;3)$, $A_3=(-1;3;1)$, $A_0=(0;0;1)$.
П.2.37.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(-1;-3;2)$, $A_3=(3;-4;0)$, $A_0=(0;0;1)$.
П.2.38.	$A_1=(3;3;1)$, $A_1=(3;0;3)$, $A_3=(-1;3;4)$, $A_0=(3;0;4)$.
П.2.39.	$A_1=(-3;1;2)$, $A_1=(0;2;1)$, $A_3=(-2;2;-2)$, $A_0=(0;4;3)$.
П.2.40.	$A_1=(0;1;2)$, $A_1=(3;2;0)$, $A_3=(3;1;-2)$, $A_0=(1;0;2)$.
П.2.41.	$A_1=(0;-1;2)$, $A_1=(-1;3;-2)$, $A_3=(0;1;-1)$, $A_0=(4;1;3)$.
П.2.42.	$A_1=(3;1;2)$, $A_1=(-4;-2;3)$, $A_3=(2;2;2)$, $A_0=(3;-1;0)$.
П.2.43.	$A_1=(2;-1;4)$, $A_1=(2;2;3)$, $A_3=(4;2;-2)$, $A_0=(0;0;1)$.
П.2.44.	$A_1=(-1;1;1)$, $A_1=(1;1;4)$, $A_3=(0;0;1)$, $A_0=(0;-4;2)$.
П.2.45.	$A_1=(-4;-3;4)$, $A_1=(4;2;0)$, $A_3=(3;3;0)$, $A_0=(2;4;1)$.
П.2.46.	$A_1=(-4;4;2)$, $A_1=(0;-1;1)$, $A_3=(1;0;0)$, $A_0=(4;3;0)$.
П.2.47.	$A_1=(3;0;4)$, $A_1=(-2;-4;-3)$, $A_3=(0;3;2)$, $A_0=(4;2;-2)$.
П.2.48.	$A_1=(-1;4;4)$, $A_1=(1;0;0)$, $A_3=(3;3;1)$, $A_0=(3;-1;2)$.
П.2.49.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(2;1;4)$, $A_3=(-2;1;1)$, $A_0=(-3;0;4)$.
П.2.50.	$A_1=(3;2;0)$, $A_1=(-2;1;3)$, $A_3=(1;-1;1)$, $A_0=(-2;-1;0)$.
П.2.51.	$A_1=(2;2;0)$, $A_1=(1;0;0)$, $A_3=(2;4;2)$, $A_0=(2;2;3)$.
П.2.52.	$A_1=(-1;2;0)$, $A_1=(4;1;4)$, $A_3=(2;2;0)$, $A_0=(4;1;-1)$.
П.2.53.	$A_1=(3;0;-4)$, $A_1=(4;0;4)$, $A_3=(2;1;0)$, $A_0=(2;-2;-2)$.
П.2.54.	$A_1=(2;-3;-1)$, $A_1=(1;0;2)$, $A_3=(2;1;3)$, $A_0=(3;-3;0)$.
П.2.55.	$A_1=(-2;0;3)$, $A_1=(2;1;4)$, $A_3=(1;0;1)$, $A_0=(3;1;1)$.
П.2.56.	$A_1=(1;0;4)$, $A_1=(-3;-4;-1)$, $A_3=(0;0;1)$, $A_0=(-1;-2;-4)$.
П.2.57.	$A_1=(-1;1;-3)$, $A_1=(0;-4;2)$, $A_3=(-1;3;2)$, $A_0=(2;-1;2)$.
П.2.58.	$A_1=(1;0;2)$, $A_1=(0;0;1)$, $A_3=(4;-3;0)$, $A_0=(0;4;-2)$.
П.2.59.	$A_1=(0;4;3)$, $A_1=(1;0;0)$, $A_3=(2;1;0)$, $A_0=(4;2;3)$.
П.2.60.	$A_1=(-4;1;2)$, $A_1=(-4;1;3)$, $A_3=(0;0;1)$, $A_0=(2;-4;0)$.
П.2.61.	$A_1=(1;0;0)$, $A_1=(0;0;1)$, $A_3=(4;-3;-4)$, $A_0=(1;4;0)$.
П.2.62.	$A_1=(-3;2;4)$, $A_1=(3;2;1)$, $A_3=(1;3;2)$, $A_0=(-3;1;3)$.
П.2.63.	$A_1=(1;4;4)$, $A_1=(0;1;4)$, $A_3=(-4;0;1)$, $A_0=(-2;0;2)$.
П.2.64.	$A_1=(-1;0;3)$, $A_1=(0;4;2)$, $A_3=(1;4;-3)$, $A_0=(0;1;0)$.
П.2.65.	$A_1=(0;1;0)$, $A_1=(4;2;-1)$, $A_3=(0;0;1)$, $A_0=(-3;1;0)$.
П.2.66.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(2;1;4)$, $A_3=(1;2;4)$, $A_0=(1;0;0)$.
П.2.67.	$A_1=(1;2;1)$, $A_1=(0;3;-3)$, $A_3=(-2;4;-1)$, $A_0=(2;4;1)$.
П.2.68.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(2;1;1)$, $A_3=(3;4;-3)$, $A_0=(3;0;1)$.
П.2.69.	$A_1=(1;0;1)$, $A_1=(3;0;4)$, $A_3=(4;4;0)$, $A_0=(3;4;2)$.
П.2.70.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(1;0;0)$, $A_3=(-2;1;2)$, $A_0=(4;2;2)$.
П.2.71.	$A_1=(4;0;3)$, $A_1=(0;-2;2)$, $A_3=(-1;3;-1)$, $A_0=(4;3;0)$.
П.2.72.	$A_1=(2;3;2)$, $A_1=(0;1;0)$, $A_3=(-4;-4;2)$, $A_0=(-4;-1;1)$.
П.2.73.	$A_1=(-3;-3;-4)$, $A_1=(2;4;1)$, $A_3=(-4;4;4)$, $A_0=(0;-4;-2)$.
П.2.74.	$A_1=(4;3;1)$, $A_1=(0;-4;-2)$, $A_3=(-1;1;1)$, $A_0=(2;-2;2)$.
П.2.75.	$A_1=(1;0;3)$, $A_1=(1;0;0)$, $A_3=(-4;1;-3)$, $A_0=(0;1;0)$.
П.2.76.	$A_1=(-2;1;0)$, $A_1=(0;3;1)$, $A_3=(-4;4;2)$, $A_0=(4;-4;-2)$.
П.2.77.	$A_1=(0;-1;3)$, $A_1=(0;-4;-4)$, $A_3=(3;1;0)$, $A_0=(-1;2;0)$.
П.2.78.	$A_1=(4;0;4)$, $A_1=(1;0;1)$, $A_3=(2;3;2)$, $A_0=(3;3;3)$.
П.2.79.	$A_1=(1;2;-2)$, $A_1=(0;1;0)$, $A_3=(-2;-3;1)$, $A_0=(1;0;0)$.
П.2.80.	$A_1=(4;1;-3)$, $A_1=(3;3;0)$, $A_3=(2;-1;3)$, $A_0=(4;-2;0)$.
П.2.81.	$A_1=(2;-3;-3)$, $A_1=(1;-4;0)$, $A_3=(0;1;0)$, $A_0=(-2;0;-4)$.
П.2.82.	$A_1=(4;1;4)$, $A_1=(0;-1;4)$, $A_3=(1;0;0)$, $A_0=(0;0;1)$.
П.2.83.	$A_1=(-4;2;-1)$, $A_1=(2;2;0)$, $A_3=(0;1;0)$, $A_0=(2;-1;3)$.
П.2.84.	$A_1=(0;4;3)$, $A_1=(-2;-4;-1)$, $A_3=(3;0;2)$, $A_0=(4;0;4)$.
П.2.85.	$A_1=(1;3;1)$, $A_1=(-4;2;4)$, $A_3=(0;1;0)$, $A_0=(0;-2;2)$.

П.2.86.	$A_1=(2;-4;-3)$, $A_1=(-4;0;-3)$, $A_3=(0;2;2)$, $A_0=(-4;1;3)$.
П.2.87.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(1;-4;4)$, $A_3=(0;-4;2)$, $A_0=(-1;4;4)$.
П.2.88.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(-3;-4;2)$, $A_3=(1;-4;-3)$, $A_0=(-1;2;4)$.
П.2.89.	$A_1=(2;4;0)$, $A_1=(2;-3;0)$, $A_3=(0;0;1)$, $A_0=(1;4;4)$.
П.2.90.	$A_1=(-2;1;2)$, $A_1=(-3;-3;4)$, $A_3=(0;1;0)$, $A_0=(3;-2;0)$.
П.2.91.	$A_1=(2;4;0)$, $A_1=(4;3;-4)$, $A_3=(3;-3;4)$, $A_0=(2;4;2)$.
П.2.92.	$A_1=(2;3;1)$, $A_1=(-1;-2;3)$, $A_3=(-2;1;4)$, $A_0=(2;2;3)$.
П.2.93.	$A_1=(-4;0;1)$, $A_1=(4;4;0)$, $A_3=(2;1;3)$, $A_0=(1;0;0)$.
П.2.94.	$A_1=(0;-4;4)$, $A_1=(1;0;0)$, $A_3=(-3;1;-2)$, $A_0=(2;0;-2)$.
П.2.95.	$A_1=(1;4;1)$, $A_1=(0;0;1)$, $A_3=(1;0;0)$, $A_0=(2;3;-2)$.
П.2.96.	$A_1=(4;3;3)$, $A_1=(1;0;0)$, $A_3=(0;0;1)$, $A_0=(-3;-4;-1)$.
П.2.97.	$A_1=(2;1;1)$, $A_1=(0;3;-1)$, $A_3=(1;1;0)$, $A_0=(0;4;3)$.
П.2.98.	$A_1=(0;0;1)$, $A_1=(3;3;1)$, $A_3=(4;-3;0)$, $A_0=(3;2;-1)$.
П.2.99.	$A_1=(-2;-1;-1)$, $A_1=(0;4;4)$, $A_3=(-4;0;1)$, $A_0=(0;2;1)$.
П.2.00.	$A_1=(4;1;3)$, $A_1=(3;1;-2)$, $A_3=(0;1;4)$, $A_0=(2;-2;-2)$.

3. Для следующих систем линейных уравнений найти все базисные решения.

П.3.01.	**П.3.02.**
$x_3+4x_4=5$ $-4x_1+4x_4=7$ $2x_1+x_2=6$	$x_2+2x_3=2$ $x_3+x_4=7$ $x_1-3x_2=8$
П.3.03.	**П.3.04.**
$x_2+x_3=5$ $-x_1+x_4=4$ $-2x_1+x_2=0$	$-x_1-2x_2=3$ $3x_1+x_4=0$ $-4x_2+x_3=4$
П.3.05.	**П.3.06.**
$x_2+4x_3=4$ $x_1+2x_4=0$ $3x_3+x_4=5$	$x_2-3x_3=8$ $-x_1+x_3=4$ $-2x_1+x_4=3$
П.3.07.	**П.3.08.**
$x_1+2x_3=7$ $-x_3-2x_4=4$ $x_2+3x_4=7$	$3x_1+3x_3=6$ $x_2+x_4=7$ $4x_1-2x_3=7$
П.3.09.	**П.3.10.**
$-4x_3-2x_4=5$ $x_1-x_4=6$ $x_2-x_3=3$	$x_3+x_4=8$ $x_1-2x_2=7$ $-x_2+3x_3=5$
П.3.11.	**П.3.12.**
$-2x_1+4x_2+x_4=6$ $-3x_1+x_2+x_3=0$	$x_1+2x_2=8$ $x_2+x_3+x_4=6$
П.3.13.	**П.3.14.**
$4x_1+x_4=4$ $x_3=5$ $3x_1+x_2=8$	$-4x_1+x_3=5$ $x_4=0$ $x_1+x_2=8$
П.3.15.	**П.3.16.**
$x_2+4x_4=0$ $x_3+2x_4=3$ $x_1+2x_2=6$	$x_1+x_2=4$ $-x_3+x_4=6$ $2x_3-2x_4=8$
П.3.17.	**П.3.18.**
$2x_2+2x_4=7$ $x_1+x_3=5$ $-4x_2+4x_4=6$	$x_3+x_4=7$ $x_1+x_2=5$ $x_1+3x_3=0$

П.3.19.	**П.3.20.**
$\begin{cases} 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 = 5 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_2 + 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$
П.3.21.	**П.3.22.**
$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4 \\ 3x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_2 + 4x_4 = 7 \end{cases}$
П.3.23.	**П.3.24.**
$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_3 = 5 \\ -3x_2 + x_4 = 4 \\ -3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$
П.3.25.	**П.3.26.**
$\begin{cases} 3x_1 + x_4 = 4 \\ -2x_1 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_1 + x_4 = 7 \end{cases}$
П.3.27.	**П.3.28.**
$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 5 \\ -x_1 + x_4 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 7 \end{cases}$
П.3.29.	**П.3.30.**
$\begin{cases} x_2 + x_3 = 7 \\ -x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_4 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_2 - 3x_3 = 3 \\ -4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$
П.3.31.	**П.3.32.**
$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 4x_2 + 4x_4 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$
П.3.33.	**П.3.34.**
$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 8 \\ 4x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$
П.3.35.	**П.3.36.**
$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 7 \\ -2x_1 + x_4 = 8 \\ 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 + 3x_4 = 3 \\ 2x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$
П.3.37.	**П.3.38.**
$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_4 = 3 \\ x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$
П.3.39.	**П.3.40.**
$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_2 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$
П.3.41.	**П.3.42.**
$\begin{cases} -4x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 6 \end{cases}$
П.3.43.	**П.3.44.**
$\begin{cases} -3x_1 - 4x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 = 5 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_4 = 2 \end{cases}$
П.3.45.	**П.3.46.**
$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_2 + 4x_4 = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

П.3.47.	**П.3.48.**
$-x_1 + x_2 = 4$ $4x_1 + x_4 = 7$ $x_3 = 5$	$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$ $3x_1 + 4x_3 = 5$
П.3.49.	**П.3.50.**
$x_2 - 3x_4 = 0$ $x_1 + 4x_3 = 7$ $-4x_3 + x_4 = 8$	$x_3 - x_4 = 4$ $4x_1 - 4x_4 = 5$ $x_1 + x_2 = 4$
П.3.51.	**П.3.52.**
$x_2 + 2x_3 = 2$ $3x_3 + 2x_4 = 5$ $x_1 - x_4 = 8$	$3x_1 + x_4 = 8$ $x_2 - x_3 = 2$ $-x_1 + x_3 = 8$
П.3.53.	**П.3.54.**
$x_2 + 4x_4 = 0$ $x_1 + 4x_3 = 4$ $2x_3 + 4x_4 = 7$	$x_1 + 4x_4 = 5$ $2x_3 + x_4 = 3$ $x_2 + 4x_3 = 6$
П.3.55.	**П.3.56.**
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$ $x_2 - x_4 = 8$	$x_3 + x_4 = 0$ $x_1 + 3x_3 = 3$ $x_2 - x_4 = 6$
П.3.57.	**П.3.58.**
$x_2 = 7$ $x_1 + x_4 = 8$ $x_3 + x_4 = 4$	$x_2 + x_3 = 7$ $x_3 + x_4 = 0$ $x_1 = 7$
П.3.59.	**П.3.60.**
$4x_3 + x_4 = 0$ $x_1 - 4x_3 = 4$ $x_2 = 2$	$-2x_2 + x_3 = 5$ $3x_1 + x_4 = 7$ $2x_1 + 4x_2 = 8$
П.3.61.	**П.3.62.**
$4x_2 - 3x_3 = 6$ $x_1 + x_4 = 5$ $-x_2 + 4x_3 = 7$	$x_2 - x_3 = 5$ $4x_3 + 2x_4 = 6$ $x_1 + 3x_4 = 4$
П.3.63.	**П.3.64.**
$x_1 + 2x_3 = 4$ $2x_3 + x_4 = 3$ $x_2 - x_4 = 0$	$-x_3 + x_4 = 6$ $x_1 + 2x_3 = 4$ $x_2 + x_4 = 7$
П.3.65.	**П.3.66.**
$4x_1 + x_4 = 6$ $x_2 - 2x_4 = 4$ $-x_1 + x_3 = 4$	$-x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6$ $2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0$
П.3.67.	**П.3.68.**
$x_1 + x_3 = 8$ $3x_1 + x_4 = 6$ $x_2 - 4x_4 = 5$	$-2x_3 + 4x_4 = 7$ $x_2 - 4x_3 = 6$ $x_1 + x_4 = 7$
П.3.69	**П.3.70.**
$2x_1 - 3x_4 = 0$ $x_2 + 3x_4 = 6$ $4x_1 + x_3 = 0$	$-2x_2 + 4x_3 = 4$ $x_1 + 2x_2 = 7$ $4x_3 + x_4 = 5$
П.3.71.	**П.3.72.**
$x_2 = 5$ $x_3 + 4x_4 = 5$ $x_1 - 4x_4 = 6$	$-3x_2 - 3x_3 = 3$ $x_1 - 2x_3 = 4$ $2x_2 + x_4 = 3$
П.3.73.	**П.3.74.**
$x_2 = 4$ $4x_1 + x_3 = 0$ $2x_1 + x_4 = 0$	$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$ $2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6$

П.3.75.	**П.3.76.**
$x_2 + 4x_3 + x_4 = 4$ $x_1 + 3x_3 = 0$	$4x_2 + 2x_4 = 4$ $x_2 + x_3 = 0$ $x_1 - x_4 = 0$
П.3.77.	**П.3.78.**
$-3x_1 + 2x_2 = 6$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3$	$2x_3 + x_4 = 7$ $x_1 = 3$ $x_2 + x_3 = 6$
П.3.79.	**П.3.80.**
$4x_2 + 2x_3 = 4$ $x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 4$	$x_2 - 4x_4 = 0$ $x_3 + 4x_4 = 4$ $x_1 + 2x_3 = 5$
П.3.81.	**П.3.82.**
$-2x_3 - 2x_4 = 0$ $x_1 + x_3 = 0$ $x_2 - x_4 = 6$	$-3x_2 + x_3 = 7$ $4x_2 + 4x_4 = 8$ $x_1 + 2x_4 = 5$
П.3.83.	**П.3.84.**
$x_2 - 2x_3 = 5$ $x_1 + x_3 = 0$ $-4x_1 + x_4 = 5$	$3x_2 + x_4 = 7$ $x_1 = 0$ $-4x_2 + x_3 = 4$
П.3.85.	**П.3.86.**
$x_2 + 4x_4 = 5$ $x_1 + 2x_4 = 7$ $3x_1 + x_3 = 5$	$-2x_1 + 2x_3 = 7$ $3x_3 + x_4 = 8$ $3x_1 + x_2 = 6$
П.3.87.	**П.3.88.**
$x_2 - 4x_4 = 4$ $-2x_1 + x_4 = 5$ $-4x_1 + x_3 = 8$	$-4x_1 + x_2 + x_4 = 6$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 4$
П.3.89.	**П.3.90.**
$4x_1 + 4x_2 = 4$ $-3x_2 + x_3 = 8$ $2x_1 + x_4 = 8$	$x_1 - 4x_4 = 7$ $x_2 = 5$ $x_3 - 4x_4 = 4$
П.3.91.	**П.3.92.**
$-4x_3 + x_4 = 6$ $4x_1 + 4x_3 = 7$ $x_1 + x_2 = 3$	$x_1 + 4x_2 - 4x_4 = 4$ $2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4$
П.3.93.	**П.3.94.**
$4x_1 - 4x_2 = 6$ $-x_2 + x_4 = 4$ $-4x_1 + x_3 = 6$	$-4x_2 = 5$ $x_1 + x_4 = 8$ $4x_2 + x_3 = 5$
П.3.95.	**П.3.96.**
$4x_3 - x_4 = 6$ $x_1 - 3x_4 = 6$ $x_2 - x_3 = 0$	$x_3 - 2x_4 = 8$ $4x_2 - x_4 = 7$ $x_1 + x_2 = 5$
П.3.97.	**П.3.98.**
$x_1 + x_2 = 5$ $-x_2 + x_4 = 5$ $x_3 = 4$	$-x_1 + x_2 = 6$ $x_2 + x_3 = 3$ $x_1 + x_4 = 6$
П.3.99.	**П.3.00.**
$x_3 = 4$ $x_2 + 3x_4 = 4$ $x_1 + x_4 = 4$	$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 6$ $x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 5$

Ответы

Из-за округлений возможно несовпадение оптимальных значений переменных и целевой функции на сотые в некоторых задачах тем 4,5, 6 и приложения.

Ответы к задачам по теме 2.

2.01. λ =(0,30 ; 0,30 ; 0,40)	**2.02.** λ =(0,18 ; 0,02 ; 0,80)	**2.03.** λ =(0,63 ; 0,27 ; 0,10)
2.04. λ =(0,56 ; 0,14 ; 0,30)	**2.05.** λ =(0,48 ; 0,32 ; 0,20)	**2.06.** λ =(0,32 ; 0,08 ; 0,60)
2.07. λ =(0,36 ; 0,04 ; 0,60)	**2.08.** λ =(0,40 ; 0,00 ; 0,60)	**2.09.** λ =(0,02 ; 0,08 ; 0,90)
2.10. λ =(0,05 ; 0,45 ; 0,50)	**2.11.** λ =(0,06 ; 0,54 ; 0,40)	**2.12.** λ =(0,72 ; 0,08 ; 0,20)
2.13. λ =(0,56 ; 0,24 ; 0,20)	**2.14.** λ =(0,04 ; 0,06 ; 0,90)	**2.15.** λ =(0,16 ; 0,24 ; 0,60)
2.16. λ =(0,15 ; 0,35 ; 0,50)	**2.17.** λ =(0,12 ; 0,48 ; 0,40)	**2.18.** λ =(0,56 ; 0,24 ; 0,20)
2.19. λ =(0,16 ; 0,04 ; 0,80)	**2.20.** λ =(0,08 ; 0,12 ; 0,80)	**2.21.** λ =(0,18 ; 0,12 ; 0,70)
2.22. λ =(0,28 ; 0,42 ; 0,30)	**2.23.** λ =(0,06 ; 0,04 ; 0,90)	**2.24.** λ =(0,48 ; 0,12 ; 0,40)
2.25. λ =(0,81 ; 0,09 ; 0,10)	**2.26.** λ =(0,27 ; 0,03 ; 0,70)	**2.27.** λ =(0,16 ; 0,24 ; 0,60)
2.28. λ =(0,36 ; 0,54 ; 0,10)	**2.29.** λ =(0,14 ; 0,56 ; 0,30)	**2.30.** λ =(0,08 ; 0,72 ; 0,20)
2.31. λ =(0,16 ; 0,04 ; 0,80)	**2.32.** λ =(0,08 ; 0,32 ; 0,60)	**2.33.** λ =(0,06 ; 0,54 ; 0,40)
2.34. λ =(0,24 ; 0,06 ; 0,70)	**2.35.** λ =(0,28 ; 0,12 ; 0,60)	**2.36.** λ =(0,54 ; 0,06 ; 0,40)
2.37. λ =(0,08 ; 0,72 ; 0,20)	**2.38.** λ =(0,30 ; 0,20 ; 0,50)	**2.39.** λ =(0,40 ; 0,00 ; 0,60)
2.40. λ =(0,07 ; 0,63 ; 0,30)	**2.41.** λ =(0,21 ; 0,09 ; 0,70)	**2.42.** λ =(0,18 ; 0,12 ; 0,70)
2.43. λ =(0,03 ; 0,07 ; 0,90)	**2.44.** λ =(0,04 ; 0,06 ; 0,90)	**2.45.** λ =(0,05 ; 0,45 ; 0,50)
2.46. λ =(0,12 ; 0,48 ; 0,40)	**2.47.** λ =(0,08 ; 0,02 ; 0,90)	**2.48.** λ =(0,30 ; 0,20 ; 0,50)
2.49. λ =(0,28 ; 0,12 ; 0,60)	**2.50.** λ =(0,16 ; 0,04 ; 0,80)	**2.51.** λ =(0,48 ; 0,12 ; 0,40)
2.52. λ =(0,56 ; 0,24 ; 0,20)	**2.53.** λ =(0,36 ; 0,24 ; 0,40)	**2.54.** λ =(0,42 ; 0,18 ; 0,40)
2.55. λ =(0,24 ; 0,16 ; 0,60)	**2.56.** λ =(0,54 ; 0,36 ; 0,10)	**2.57.** λ =(0,05 ; 0,05 ; 0,90)
2.58. λ =(0,56 ; 0,14 ; 0,30)	**2.59.** λ =(0,16 ; 0,64 ; 0,20)	**2.60.** λ =(0,20 ; 0,00 ; 0,80)
2.61. λ =(0,30 ; 0,00 ; 0,70)	**2.62.** λ =(0,54 ; 0,06 ; 0,40)	**2.63.** λ =(0,08 ; 0,12 ; 0,80)
2.64. λ =(0,36 ; 0,24 ; 0,40)	**2.65.** λ =(0,10 ; 0,00 ; 0,90)	**2.66.** λ =(0,54 ; 0,36 ; 0,10)
2.67. λ =(0,48 ; 0,32 ; 0,20)	**2.68.** λ =(0,35 ; 0,15 ; 0,50)	**2.69.** λ =(0,16 ; 0,64 ; 0,20)
2.70. λ =(0,05 ; 0,05 ; 0,90)	**2.71.** λ =(0,40 ; 0,10 ; 0,50)	**2.72.** λ =(0,60 ; 0,00 ; 0,40)
2.73. λ =(0,09 ; 0,21 ; 0,70)	**2.74.** λ =(0,14 ; 0,06 ; 0,80)	**2.75.** λ =(0,56 ; 0,14 ; 0,30)
2.76. λ =(0,10 ; 0,00 ; 0,90)	**2.77.** λ =(0,04 ; 0,16 ; 0,80)	**2.78.** λ =(0,06 ; 0,54 ; 0,40)
2.79. λ =(0,48 ; 0,32 ; 0,20)	**2.80.** λ =(0,02 ; 0,08 ; 0,90)	**2.81.** λ =(0,72 ; 0,18 ; 0,10)
2.82. λ =(0,27 ; 0,63 ; 0,10)	**2.83.** λ =(0,08 ; 0,32 ; 0,60)	**2.84.** λ =(0,24 ; 0,16 ; 0,60)
2.85. λ =(0,35 ; 0,15 ; 0,50)	**2.86.** λ =(0,63 ; 0,07 ; 0,30)	**2.87.** λ =(0,48 ; 0,12 ; 0,40)
2.88. λ =(0,72 ; 0,08 ; 0,20)	**2.89.** λ =(0,32 ; 0,08 ; 0,60)	**2.90.** λ =(0,36 ; 0,54 ; 0,10)
2.91. λ =(0,32 ; 0,08 ; 0,60)	**2.92.** λ =(0,24 ; 0,16 ; 0,60)	**2.93.** λ =(0,18 ; 0,42 ; 0,40)
2.94. λ =(0,42 ; 0,28 ; 0,30)	**2.95.** λ =(0,12 ; 0,18 ; 0,70)	**2.96.** λ =(0,27 ; 0,63 ; 0,10)
2.97. λ =(0,48 ; 0,32 ; 0,20)	**2.98.** λ =(0,28 ; 0,42 ; 0,30)	**2.99.** λ =(0,60 ; 0,00 ; 0,40)
2.00. λ =(0,64 ; 0,16 ; 0,20)		

Ответы к задачам по теме 4.

4.1.01. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.	**4.1.02.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.1.03. z_{min}= -1.50, X_{min}=(0.00; 1.50).	**4.1.04.** z_{max}= 8.00, X_{max}=(0.00; 4.00).
4.1.05. z_{min}= 14.00, X_{min}=(7.00; 0.00).	**4.1.06.** z_{min}= 10.80, X_{min}=(3.60; 2.20).
4.1.07. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.1.08.** z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.00; 0.00). Альтернативный оптимум.
4.1.09. z_{max}= 3.00, X_{max}=(1.00; 0.00).	**4.1.10.** z_{min}= 6.67, X_{min}=(0.00; 1.67).
4.1.11. z_{min}= 3.00, X_{min}=(3.00; 0.00).	**4.1.12.** z_{min}= 3.00, X_{min}=(1.00; 0.00).
4.1.13. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.1.14.** z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00).
4.1.15. z_{min}=-12.00, X_{min}=(1.00; 3.00).	**4.1.16.** z_{max}= 5.00, X_{max}=(2.50; 0.00).
4.1.17. z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00).	**4.1.18.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
4.1.19. z_{min}= 1.55, X_{min}=(0.60; 1.55).	**4.1.20.** z_{max}= 0.00, X_{max}=(1.25; 0.00). Альтернативный оптимум.
4.1.21. z_{max}= 0.00, X_{max}=(1.25; 0.00). Альтернативный оптимум.	**4.1.22.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
4.1.23. z_{min}= 0.00, X_{min}=(1.50; 0.00). Альтернативный оптимум.	**4.1.24.** z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00).
4.1.25. z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 1.33). Альтернативный оптимум.	**4.1.26.** z_{min}= 3.33, X_{min}=(0.00; 1.67).
4.1.27. z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00).	**4.1.28.** z_{min}= -5.67, X_{min}=(0.78; 2.67).
4.1.29. z_{min}= -2.50, X_{min}=(0.00; 2.50).	**4.1.30.** z_{min}= -3.00, X_{min}=(5.00; 3.50).
4.1.31. z_{min}= 8.00, X_{min}=(2.00; 2.00).	**4.1.32.** z_{max}= 8.00, X_{max}=(2.67; 0.00).
4.1.33. z_{max}= 6.00, X_{max}=(0.00; 1.50). Альтернативный оптимум.	**4.1.34.** z_{min}= -1.50, X_{min}=(0.00; 1.50).
4.1.35. z_{max}= 20.00, X_{max}=(1.00; 6.00).	**4.1.36.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.1.37. z_{max}= 3.00, X_{max}=(1.00; 2.00). Альтернативный оптимум.	**4.1.38.** z_{min}= 14.00, X_{min}=(5.00; 6.00).
4.1.39. z_{max}= 3.00, X_{max}=(1.50; 1.00).	**4.1.40.** z_{max}= -5.00, X_{max}=(1.25; 0.00). Альтернативный оптимум.
4.1.41. z_{min}= 3.00, X_{min}=(0.00; 1.50).	**4.1.42.** z_{max}= 5.00, X_{max}=(1.67; 0.00).
4.1.43. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.	**4.1.44.** z_{min}= 5.33, X_{min}=(0.00; 2.67).
4.1.45. z_{max}= 4.50, X_{max}=(1.50; 4.00).	**4.1.46.** z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 1.50). Альтернативный оптимум.
4.1.47. z_{min}= 8.00, X_{min}=(0.00; 2.00).	**4.1.48.** z_{max}= -8.00, X_{max}=(0.00; 2.00). Альтернативный оптимум.
4.1.49. z_{max}= 6.00, X_{max}=(2.00; 0.00).	**4.1.50.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
4.1.51. z_{min}= -7.50, X_{min}=(2.00; 2.50).	**4.1.52.** z_{min}= -7.50, X_{min}=(0.00; 2.50).
4.1.53. z_{max}= 3.00, X_{max}=(0.00; 1.00).	**4.1.54.** z_{min}= 6.00, X_{min}=(6.00; 0.00).
4.1.55. z_{max}= 6.50, X_{max}=(1.50; 1.00).	**4.1.56.** z_{max}= 30.00, X_{max}=(3.00; 4.50).
4.1.57. z_{min}= 16.00, X_{min}=(0.00; 4.00).	**4.1.58.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
4.1.59. z_{min}= -4.23, X_{min}=(1.77; 1.08).	**4.1.60.** z_{min}= 16.00, X_{min}=(0.00; 4.00).
4.1.61. z_{min}= 4.00, X_{min}=(1.00; 5.00). Альтернативный оптимум.	**4.1.62.** z_{max}= 9.00, X_{max}=(0.00; 3.00).
4.1.63. z_{max}= 12.00, X_{max}=(12.00; 3.00).	**4.1.64.** z_{min}= -6.00, X_{min}=(0.00; 3.00).
4.1.65. z_{max}= 6.00, X_{max}=(3.00; 0.00).	**4.1.66.** z_{max}= 6.00, X_{max}=(3.00; 6.00). Альтернативный оптимум.
4.1.67. z_{max}= 2.67, X_{max}=(0.00; 1.33).	**4.1.68.** z_{min}= 16.00, X_{min}=(6.00; 1.00).
4.1.69. z_{min}= 8.33, X_{min}=(0.42; 1.67).	**4.1.70.** z_{min}= -5.33, X_{min}=(0.00; 2.67).
4.1.71. z_{min}= 4.40, X_{min}=(0.20; 1.20).	**4.1.72.** z_{max}= 3.50, X_{max}=(0.00; 3.50).
4.1.73. z_{min}=-10.00, X_{min}=(25.00; 5.00). Альтернативный оптимум.	**4.1.74.** z_{max}= 7.00, X_{max}=(0.00; 1.75).

4.1.75. z_{min}= -6.00,X_{min}=(2.00; 0.00).	**4.1.76.** z_{min}= 6.00,X_{min}=(2.00; 0.00).
4.1.77. z_{max}= -7.00,X_{max}=(0.00; 2.33).	**4.1.78.** z_{max}= 5.00,X_{max}=(1.25; 2.50).
4.1.79. z_{min}= -1.00,X_{min}=(1.00; 0.00).	**4.1.80.** z_{max}= 12.00,X_{max}=(3.00; 0.00).
4.1.81. z_{min}=-25.00,X_{min}=(16.00; 7.00).	**4.1.82.** z_{min}= 5.00,X_{min}=(0.13; 1.63).
4.1.83. z_{min}= 8.00,X_{min}=(0.00; 2.67).	**4.1.84.** z_{max}= -2.40,X_{max}=(0.80; 2.40).
4.1.85. z_{min}= 8.00,X_{min}=(2.00; 0.00). Альтернативный оптимум.	**4.1.86.** z_{min}= -4.00,X_{min}=(0.00; 4.00).
4.1.87. z_{min}= 8.00,X_{min}=(0.00; 2.00).	**4.1.88.** z_{max}= 6.00,X_{max}=(5.00; 1.00).
4.1.89. z_{min}= 1.75,X_{min}=(0.00; 1.75).	**4.1.90.** z_{max}= -6.00,X_{max}=(9.50;15.50). Альтернативный оптимум.
4.1.91. z_{max}= 14.00,X_{max}=(0.00; 7.00).	**4.1.92.** z_{max}= 6.00,X_{max}=(0.43; 1.57). Альтернативный оптимум.
4.1.93. z_{min}= 11.42,X_{min}=(1.92; 1.25).	**4.1.94.** z_{max}= -4.00,X_{max}=(5.00; 8.00).
4.1.95. z_{max}= 28.00,X_{max}=(7.00; 0.00).	**4.1.96.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
4.1.97. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.1.98.** z_{min}=-14.00,X_{min}=(7.00; 7.00).
4.1.99. z_{max}= 8.00,X_{max}=(0.00; 2.00).	**4.1.00.** z_{max}= 3.20,X_{max}=(1.60; 0.20).

4.2.01. z_{max}= 22.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 1.00; 5.00).	**4.2.02.** z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.00; 7.00; 0.00; 9.50; 3.50).
4.2.03. z_{min}= -1.60, X_{min}=(1.20; 0.00; 1.60; 0.00; 0.00).	**4.2.04.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.2.05. z_{max}= -13.00, X_{max}=(1.67; 0.00; 2.00; 2.00; 0.00). Альтернативный оптимум.	**4.2.06.** z_{min}= -0.33, X_{min}=(1.67; 0.00; 0.00; 0.33; 0.00).
4.2.07. z_{max}= 12.00, X_{max}=(0.00; 4.00; 0.00; 0.00; 6.00).	**4.2.08.** z_{min}= 3.60, X_{min}=(3.00; 0.00; 3.30; 0.00; 0.90).
4.2.09. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.2.10.** z_{min}= 12.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 0.00; 6.00).
4.2.11. z_{max}= 10.00, X_{max}=(2.11; 0.78; 0.00; 0.00).	**4.2.12.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
4.2.13. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.2.14.** z_{max}= -8.40, X_{max}=(0.87; 0.00; 0.00; 0.60; 3.20).
4.2.15. z_{min}= -6.42, X_{min}=(5.25; 1.67; 0.00; 0.25; 0.00).	**4.2.16.** z_{max}= 18.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 8.00; 1.00).
4.2.17. z_{min}= 3.00, X_{min}=(5.00; 0.00; 3.00; 1.00; 0.00).	**4.2.18.** z_{min}= 2.67, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.67;10.67).
4.2.19. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.	**4.2.20.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.2.21. z_{min}= -12.50, X_{min}=(0.00; 0.00; 1.50;11.00; 4.00).	**4.2.22.** z_{min}= 15.33, X_{min}=(0.00; 2.58; 1.75;15.33; 0.00).
4.2.23. z_{min}= -4.00, X_{min}=(2.50; 1.00; 0.00; 0.00;12.00).	**4.2.24.** z_{min}= -4.00, X_{min}=(2.00;20.00; 0.00; 0.00; 4.00).
4.2.25. z_{min}= 9.67, X_{min}=(1.83; 3.33; 0.00; 0.00).	**4.2.26.** z_{min}= 0.00, X_{min}=(4.00; 0.00; 0.00; 1.75; 1.75).
4.2.27. z_{max}= 10.00, X_{max}=(0.00;26.00; 5.00; 2.00; 0.00).	**4.2.28.** z_{min}= 18.00, X_{min}=(5.00; 0.00; 0.00; 1.50; 6.00).
4.2.29. z_{min}= 14.00, X_{min}=(0.67;10.67; 2.00; 0.00; 0.00).	**4.2.30.** z_{min}= -75.00, X_{min}=(0.00;15.00; 0.00;20.00).
4.2.31. z_{min}= 7.50, X_{min}=(0.00; 2.00; 0.50; 0.00; 0.00).	**4.2.32.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
4.2.33. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.	**4.2.34.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.2.35. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.2.36.** z_{min}= 1.71, X_{min}=(0.86; 0.00; 0.00; 7.00; 0.86).
4.2.37. z_{max}= 16.00, X_{max}=(7.00; 2.00; 0.00; 0.00; 0.00). Альтернативный оптимум.	**4.2.38.** z_{min}= -5.84, X_{min}=(0.26; 0.00; 0.00; 1.68).
4.2.39. z_{max}= 8.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 7.00; 4.00; 3.00).	**4.2.40.** z_{max}= 4.50, X_{max}=(0.00; 1.50; 0.00; 0.00; 3.50).
4.2.41. z_{min}= -11.00, X_{min}=(0.00; 1.50; 4.00; 0.00; 0.50).	**4.2.42.** z_{min}= -4.00, X_{min}=(4.00; 0.00; 4.00; 0.00; 0.00).

4.2.43. z_{min}= 6.50, X_{min}=(0.00; 3.75; 0.00; 1.50; 0.25).	**4.2.44.** z_{min}= 10.00, X_{min}=(12.00; 0.00; 2.00; 4.00; 0.00).
4.2.45. z_{min}= -15.00, X_{min}=(3.00; 0.00; 5.00;10.00; 0.00).	**4.2.46.** z_{min}= 21.00, X_{min}=(7.00; 0.00; 7.00; 0.00; 0.00).
4.2.47. z_{min}= 10.67, X_{min}=(0.83; 1.67; 0.00; 0.00; 3.50).	**4.2.48.** z_{max}= 0.75, X_{max}=(1.88; 0.00; 1.50; 0.00; 2.38).
4.2.49. z_{min}= 24.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 6.00; 0.00).	**4.2.50.** z_{min}= -7.00, X_{min}=(5.00; 0.00; 0.00; 1.00; 2.00).
4.2.51. z_{min}= 9.00, X_{min}=(0.00; 3.00; 1.00; 0.00; 2.00).	**4.2.52.** z_{min}= 15.25, X_{min}=(0.00; 4.50; 0.00; 1.75).
4.2.53. z_{min}= -0.50, X_{min}=(1.50; 4.50; 0.00; 2.50; 0.00).	**4.2.54.** z_{min}= -8.71, X_{min}=(2.71; 0.53; 0.00; 0.00).
4.2.55. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.	**4.2.56.** z_{min}= 0.67, X_{min}=(0.67; 5.00; 0.00; 0.00; 2.67).
4.2.57. z_{min}= 35.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 3.50; 7.00;20.00).	**4.2.58.** z_{max}= 29.33, X_{max}=(1.33; 1.33; 0.00; 0.00; 8.00).
4.2.59. z_{min}= -6.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.50; 2.00; 2.00).	**4.2.60.** z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.60; 0.95; 0.00; 0.00; 2.60).
4.2.61. z_{min}= -13.25, X_{min}=(0.00; 2.25; 0.00; 2.00; 3.50).	**4.2.62.** z_{max}= 11.00, X_{max}=(4.00; 5.00; 0.00;15.00; 0.00).
4.2.63. z_{max}= 10.50, X_{max}=(0.00; 0.00; 3.50; 0.00; 6.50).	**4.2.64.** z_{min}= -33.00, X_{min}=(0.00; 1.67; 0.00;11.00).
4.2.65. z_{max}= 1.13, X_{max}=(0.00; 0.00; 2.50; 2.50; 0.38).	**4.2.66.** z_{max}= 5.00, X_{max}=(1.67; 1.50; 0.00; 0.00; 8.00).
4.2.67. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.	**4.2.68.** z_{max}= 5.09, X_{max}=(0.00; 2.55; 0.00; 2.91).
4.2.69. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.	**4.2.70.** z_{max}= 16.25, X_{max}=(8.25; 0.00; 3.50; 2.25; 0.00).
4.2.71. z_{max}= 84.00, X_{max}=(2.67; 4.33; 0.00;25.33; 0.00).	**4.2.72.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.2.73. z_{max}= 30.00, X_{max}=(0.00; 0.00;24.00; 1.50; 7.00).	**4.2.74.** z_{max}= 16.00, X_{max}=(3.00; 7.00; 0.00; 0.00). Альтернативный оптимум.
4.2.75. z_{min}= 6.67, X_{min}=(8.00; 1.33; 0.00; 0.00; 3.33).	**4.2.76.** z_{min}= -10.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 2.50;10.00).
4.2.77. z_{min}= 9.00, X_{min}=(3.00; 0.00; 1.00; 0.00).	**4.2.78.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.2.79. z_{max}= 3.55, X_{max}=(2.82; 0.00; 0.36; 0.00).	**4.2.80.** Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
4.2.81. z_{max}= -5.00, X_{max}=(1.35; 0.20; 0.00; 7.00; 0.00). Альтернативный оптимум.	**4.2.82.** z_{min}= 7.15, X_{min}=(1.19; 0.00; 0.08; 2.38; 0.00).
4.2.83. z_{max}= 9.00, X_{max}=(1.00; 0.00; 3.00; 0.00).	**4.2.84.** z_{max}= -10.00, X_{max}=(0.00; 3.00; 0.00; 8.00; 1.00).
4.2.85. z_{min}= 0.00, X_{min}=(7.00; 4.00; 0.00; 0.00; 0.00).	**4.2.86.** Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
4.2.87. z_{max}= 18.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 2.00; 6.00; 4.00).	**4.2.88.** z_{max}= -6.00, X_{max}=(6.00; 0.00; 0.00; 0.00).
4.2.89. z_{max}= 30.00, X_{max}=(3.00; 0.00; 0.00; 4.00; 6.00).	**4.2.90.** z_{max}= 13.00, X_{max}=(2.40; 0.00; 3.05; 0.00; 0.79).
4.2.91. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.2.92.** z_{max}= 22.00, X_{max}=(0.00; 1.67; 3.00; 0.00;11.00).
4.2.93. z_{min}= -4.33, X_{min}=(1.67; 8.00; 0.00; 0.67; 0.00).	**4.2.94.** z_{max}= -1.00, X_{max}=(0.00; 3.00; 7.00; 8.00; 0.00). Альтернативный оптимум.
4.2.95. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.	**4.2.96.** z_{min}= -18.00, X_{min}=(2.00; 0.00;10.00; 4.00; 0.00).
4.2.97. z_{min}= -1.75, X_{min}=(0.00; 3.00; 4.25; 0.00;18.75).	**4.2.98.** z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 7.00; 0.00; 0.00).
4.2.99. z_{max}= 16.00, X_{max}=(0.00; 4.00; 0.00; 0.67; 5.33).	**4.2.00.** z_{min}= -1.00, X_{min}=(0.50; 8.50; 0.00; 0.00; 2.50).

Ответы к задачам по теме 5.

5.1.01.	z_{max}= 9.00, X_{max}=(0.00; 1.33; 0.00; 7.67).
5.1.02.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.1.03.	z_{min}= -13.71, X_{min}=(1.29; 0.00; 0.00; 3.43; 0.00).
5.1.04.	z_{max}= 10.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 1.25; 1.25).
5.1.05.	z_{max}= 5.00, X_{max}=(0.00; 3.00; 7.00; 0.00; 2.00).
5.1.06.	z_{max}= 6.00, X_{max}=(1.00; 2.00; 0.00).
5.1.07.	z_{min}= -30.00, X_{min}=(6.00;18.00; 6.00; 0.00; 0.00).
5.1.08.	z_{min}= 7.00, X_{min}=(2.50; 1.67; 0.00; 0.58).
5.1.09.	z_{max}= 32.00, X_{max}=(2.00; 0.00; 8.00; 0.00; 0.00).
5.1.10.	z_{min}= -9.00, X_{min}=(0.00; 1.00; 6.00; 2.00; 0.00; 0.00).
5.1.11.	z_{max}= 17.00, X_{max}=(5.00; 0.00; 0.00; 3.00).
5.1.12.	z_{min}= 32.00, X_{min}=(0.00; 7.00; 9.00; 0.00; 4.00).
5.1.13.	z_{max}= 10.00, X_{max}=(1.67; 0.00; 0.00; 1.67).
5.1.14.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
5.1.15.	z_{max}= 44.50, X_{max}=(0.00;11.50; 0.75; 1.50).
5.1.16.	z_{max}= 22.86, X_{max}=(0.00; 0.00; 3.43; 0.00; 4.57).
5.1.17.	z_{min}= -10.25, X_{min}=(0.83; 1.75; 9.33; 0.00; 0.00).
5.1.18.	z_{max}= 3.75, X_{max}=(1.50; 0.00; 0.00; 0.75; 0.00).
5.1.19.	z_{min}= -4.75, X_{min}=(2.25; 0.00; 0.00; 0.50; 0.00).
5.1.20.	z_{min}= 8.37, X_{min}=(0.00; 0.00;21.75; 0.94; 0.00; 3.25).
5.1.21.	z_{max}= 20.50, X_{max}=(0.00; 6.50; 0.00; 2.40; 2.10; 0.00).
5.1.22.	z_{min}= -6.00, X_{min}=(0.00; 1.00; 0.00; 1.50; 0.00; 0.00).
5.1.23.	z_{min}= -21.00, X_{min}=(11.00; 3.00; 0.00; 0.00; 0.00).
5.1.24.	z_{max}= 3.58, X_{max}=(0.00; 0.17; 0.00; 1.88).
5.1.25.	z_{min}= -11.20, X_{min}=(0.73; 2.07; 0.00; 0.00; 0.00; 4.13).
5.1.26.	z_{min}= 29.00, X_{min}=(0.00; 0.50; 2.00; 8.50; 0.00; 0.00).
5.1.27.	z_{max}= -14.33, X_{max}=(0.00;12.00;14.33; 0.00).
5.1.28.	z_{min}= -18.40, X_{min}=(0.00; 2.80; 0.00; 0.00; 0.80; 2.40).
5.1.29.	z_{min}= 4.70, X_{min}=(1.15; 0.00; 0.60; 0.00).
5.1.30.	z_{min}= 2.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 5.00; 0.50).
5.1.31.	z_{min}= -7.00, X_{min}=(4.00; 0.00; 1.00; 0.00; 1.00).
5.1.32.	z_{min}= -5.33, X_{min}=(0.00; 0.00; 1.33;10.67; 0.00; 1.00).
5.1.33.	z_{max}= 238.00, X_{max}=(19.00; 0.00; 0.00;39.00; 3.00).
5.1.34.	z_{max}= 11.40, X_{max}=(8.80; 0.00; 0.80; 0.60).
5.1.35.	z_{min}= -0.50, X_{min}=(6.00; 2.33; 0.25; 0.00; 0.00; 0.00).
5.1.36.	z_{max}= 108.00, X_{max}=(4.50; 0.00; 0.00;31.50; 4.67; 0.00). Альтернативный оптимум.
5.1.37.	z_{min}= -28.00, X_{min}=(0.00;14.00; 0.00; 0.00; 3.50).
5.1.38.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.1.39.	z_{max}= -0.50, X_{max}=(1.50; 0.00; 8.50; 0.00; 1.00).
5.1.40.	z_{min}= 24.00, X_{min}=(0.00; 3.00; 0.00; 0.00; 6.00).
5.1.41.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 0.00).
5.1.42.	z_{min}= -15.60, X_{min}=(4.70; 0.00; 0.00; 3.60; 0.00; 0.70).
5.1.43.	z_{min}= -3.25, X_{min}=(4.75; 0.00; 1.25; 0.25; 0.00; 0.00).
5.1.44.	z_{min}= -7.00, X_{min}=(2.33; 0.00; 0.00).
5.1.45.	z_{max}= 33.00, X_{max}=(0.00;18.00; 5.00; 0.00; 0.00).
5.1.46.	z_{max}= 1.83, X_{max}=(0.00; 0.00; 0.17; 1.33).
5.1.47.	z_{max}= -4.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 6.00; 0.00; 1.00; 1.50).
5.1.48.	z_{max}= 8.00, X_{max}=(3.00; 0.00; 0.00; 4.00).
5.1.49.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.1.50.	z_{min}= -13.75, X_{min}=(1.25; 0.00; 3.75).
5.1.51.	z_{min}= -6.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.00; 0.00).
5.1.52.	z_{min}= -86.00, X_{min}=(0.00;10.00; 0.00; 8.00;27.00).
5.1.53.	z_{min}= 29.18, X_{min}=(0.00; 0.00; 1.41; 1.35; 0.00; 9.71).
5.1.54.	z_{min}= 6.43, X_{min}=(0.00; 2.86; 0.00; 0.71; 0.00).
5.1.55.	z_{max}= 243.00, X_{max}=(89.00; 0.00; 6.00; 0.00;24.00; 0.00).
5.1.56.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.1.57.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
5.1.58.	z_{max}= 19.50, X_{max}=(3.00; 3.00; 0.00; 1.50; 0.00).

5.1.59.	z_{min}= 1.62, X_{min}=(0.00; 0.54; 0.00; 1.62).
5.1.60.	z_{max}= 66.00, X_{max}=(17.00; 0.00; 5.00).
5.1.61.	z_{max}= 71.00, X_{max}=(0.00; 0.00;14.00; 0.00; 5.00; 5.00).
5.1.62.	z_{min}= -10.67, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.67; 1.67; 0.00).
5.1.63.	z_{min}= -11.60, X_{min}=(2.90; 0.00; 0.40; 0.00; 0.00).
5.1.64.	z_{max}= 35.00, X_{max}=(7.00; 0.00; 3.00; 0.00; 0.00; 4.00).
5.1.65.	z_{min}= 2.50, X_{min}=(2.00; 0.00; 0.00; 3.50; 7.50).
5.1.66.	z_{min}= 14.00, X_{min}=(0.00; 1.00; 0.00; 0.00; 4.00; 4.00).
5.1.67.	z_{min}= -2.57, X_{min}=(0.00; 0.86; 0.86; 0.00).
5.1.68.	z_{max}= 90.00, X_{max}=(10.00; 0.00; 0.00;15.00).
5.1.69.	z_{min}= -18.00, X_{min}=(2.00; 0.00; 0.00; 7.00; 1.00).
5.1.70.	z_{min}= -33.00, X_{min}=(5.25; 0.00;14.50; 1.75; 0.00; 0.00).
5.1.71.	z_{min}= -26.00, X_{min}=(7.00; 0.00; 0.00; 3.00).
5.1.72.	z_{max}= -20.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 5.00; 5.00).
5.1.73.	z_{max}= 44.00, X_{max}=(0.00; 0.75; 0.00;26.00; 7.00).
5.1.74.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 5.00; 0.00).
5.1.75.	z_{min}= -23.75, X_{min}=(7.25; 0.00; 1.25; 1.75; 0.00).
5.1.76.	z_{min}= -2.17, X_{min}=(0.00; 0.67; 3.00; 1.50).
5.1.77.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 1.25; 0.62; 0.00; 0.00).
5.1.78.	z_{min}= 48.00, X_{min}=(6.00; 0.00; 0.00; 0.00; 6.00).
5.1.79.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.1.80.	z_{min}= 5.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 5.00; 0.00; 0.00).
5.1.81.	z_{max}= 5.67, X_{max}=(2.11; 0.00; 0.00; 0.33).
5.1.82.	z_{max}= -12.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 6.00; 6.00; 0.00).
5.1.83.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(5.14; 1.86; 0.00). Альтернативный оптимум.
5.1.84.	z_{min}= -3.00, X_{min}=(3.00; 0.00; 3.00; 0.00).
5.1.85.	z_{max}= 10.00, X_{max}=(0.00; 3.00; 4.00;10.00; 0.00).
5.1.86.	z_{min}= 40.00, X_{min}=(6.00; 0.00; 7.00; 0.00; 0.00).
5.1.87.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
5.1.88.	z_{min}= -17.52, X_{min}=(1.88; 0.00; 0.00; 0.16; 0.00; 4.48).
5.1.89.	z_{min}= 6.00, X_{min}=(3.00; 1.50; 0.00; 0.00).
5.1.90.	z_{max}= 20.67, X_{max}=(10.33; 0.00; 0.00; 2.33).
5.1.91.	z_{min}= -10.83, X_{min}=(1.50; 0.00; 3.17; 0.00).
5.1.92.	z_{min}= -5.20, X_{min}=(0.00; 5.20; 0.00; 0.20; 0.00).
5.1.93.	z_{min}= 7.00, X_{min}=(0.00; 1.00; 0.00; 3.00).
5.1.94.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(3.00; 0.00; 1.00; 0.00; 0.00).
5.1.95.	z_{min}= -25.14, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 4.86; 5.14).
5.1.96.	z_{max}= 10.00, X_{max}=(0.00; 1.67; 0.00; 1.67; 6.67).
5.1.97.	z_{min}= -13.67, X_{min}=(0.00; 2.33; 0.00; 2.00; 4.33).
5.1.98.	z_{min}= 2.50, X_{min}=(0.50; 0.67; 1.50; 0.00; 0.00). Альтернативный оптимум.
5.1.99.	z_{min}= -4.67, X_{min}=(0.00; 1.33; 0.00; 0.00; 2.00).
5.1.00.	z_{max}= 70.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 2.50;23.50; 6.00).

5.2.01.	z_{min}= 4.20, X_{min}=(1.40; 0.90).
5.2.02.	Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
5.2.03.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.2.04.	z_{min}= 42.25, X_{min}=(7.75; 0.00; 9.50).
5.2.05.	z_{max}= 51.00, X_{max}=(3.00;17.00; 0.00).
5.2.06.	z_{max}= 16.00, X_{max}=(0.00; 4.00).
5.2.07.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.2.08.	z_{min}= 7.50, X_{min}=(2.50; 0.00).
5.2.09.	z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.00; 1.25; 0.00).
5.2.10.	z_{min}= 9.00, X_{min}=(3.00; 0.00).
5.2.11.	z_{min}= 12.00, X_{min}=(6.00; 0.00).
5.2.12.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 2.00; 0.00; 0.00). Альтернативный оптимум.
5.2.13.	z_{max}= -10.00, X_{max}=(0.00; 4.00;11.00).
5.2.14.	z_{min}= 8.00, X_{min}=(0.00; 2.00; 2.00).
5.2.15.	z_{min}= 1.00, X_{min}=(1.00; 0.00; 1.50).
5.2.16.	z_{max}= -14.00, X_{max}=(0.00; 1.00; 4.50).

5.2.17.	z_{max}= 42.00, X_{max}=(6.00; 0.00; 9.00).
5.2.18.	z_{min}= 14.00, X_{min}=(3.50; 0.00).
5.2.19.	z_{max}= 24.00, X_{max}=(8.00; 0.00).
5.2.20.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(2.17; 0.00; 0.42). Альтернативный оптимум.
5.2.21.	z_{min}= 0.57, X_{min}=(0.57; 0.57).
5.2.22.	z_{min}= -7.00, X_{min}=(0.00; 7.00). Альтернативный оптимум.
5.2.23.	z_{max}= 16.00, X_{max}=(4.00; 0.00; 0.00).
5.2.24.	z_{min}= 1.75, X_{min}=(0.00; 0.00; 1.75).
5.2.25.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(3.50; 0.00).
5.2.26.	z_{max}= 8.00, X_{max}=(4.00; 0.00).
5.2.27.	z_{min}= -2.00, X_{min}=(2.00; 4.00; 0.00).
5.2.28.	z_{max}= 4.00, X_{max}=(2.00; 0.00).
5.2.29.	z_{max}= -1.20, X_{max}=(1.20; 2.40; 0.00).
5.2.30.	z_{max}= 16.00, X_{max}=(4.00; 0.00).
5.2.31.	z_{min}= 9.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 3.00).
5.2.32.	Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
5.2.33.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.2.34.	z_{min}= 2.80, X_{min}=(0.00; 2.80; 2.40).
5.2.35.	z_{max}= 16.00, X_{max}=(0.00; 4.00).
5.2.36.	z_{min}= 2.00, X_{min}=(0.00; 2.00; 0.00).
5.2.37.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(6.00; 0.00).
5.2.38.	z_{max}= 5.33, X_{max}=(1.33; 1.33).
5.2.39.	z_{max}= 8.00, X_{max}=(0.00; 4.00).
5.2.40.	z_{max}= 4.67, X_{max}=(0.00; 0.00; 2.33).
5.2.41.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
5.2.42.	z_{min}= -21.00, X_{min}=(5.00; 6.00; 3.00).
5.2.43.	z_{min}= -21.00, X_{min}=(0.00; 7.00).
5.2.44.	z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 6.00). Альтернативный оптимум.
5.2.45.	z_{max}= 8.00, X_{max}=(6.00; 1.00; 0.00). Альтернативный оптимум.
5.2.46.	z_{max}= 18.00, X_{max}=(0.00; 6.00).
5.2.47.	z_{min}= 15.00, X_{min}=(0.00; 5.00; 0.00).
5.2.48.	z_{min}= -3.50, X_{min}=(0.00; 0.00; 3.50).
5.2.49.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(5.00; 0.00; 0.00; 0.00).
5.2.50.	z_{max}= -7.00, X_{max}=(7.00; 0.00; 0.00).
5.2.51.	z_{min}= 12.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 4.00; 5.50).
5.2.52.	z_{max}= 9.50, X_{max}=(0.50; 2.00; 0.00; 0.50).
5.2.53.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 8.00; 4.00).
5.2.54.	z_{max}= 43.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 1.67;10.33).
5.2.55.	z_{min}= -2.00, X_{min}=(1.00; 0.00; 1.25).
5.2.56.	z_{min}= -8.00, X_{min}=(0.00; 4.00; 0.00).
5.2.57.	z_{max}= 6.00, X_{max}=(0.00; 6.00).
5.2.58.	z_{max}= 7.00, X_{max}=(0.75; 1.75; 0.00). Альтернативный оптимум.
5.2.59.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 2.00).
5.2.60.	z_{max}= 4.00, X_{max}=(0.00; 4.00; 0.00; 0.00).
5.2.61.	z_{min}= 8.00, X_{min}=(2.00; 0.00; 7.00).
5.2.62.	z_{min}= -6.00, X_{min}=(2.00; 0.00).
5.2.63.	Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
5.2.64.	z_{max}= -3.00, X_{max}=(0.00; 0.50; 3.50).
5.2.65.	z_{max}= 3.50, X_{max}=(1.75; 0.00; 0.00).
5.2.66.	z_{min}= 66.00, X_{min}=(2.00; 0.00;15.00).
5.2.67.	z_{min}= 4.00, X_{min}=(4.00; 0.00;13.00).
5.2.68.	z_{min}= 3.20, X_{min}=(0.80; 0.00; 1.60; 0.00).
5.2.69.	z_{min}= 4.38, X_{min}=(0.63; 0.00; 0.63).
5.2.70.	z_{max}= 31.50, X_{max}=(9.50; 0.00; 3.00).
5.2.71.	z_{max}= -6.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 3.00). Альтернативный оптимум.
5.2.72.	z_{max}= 6.00, X_{max}=(0.00; 2.00).
5.2.73.	z_{max}= 8.00, X_{max}=(2.00; 0.00; 0.00).
5.2.74.	z_{max}= 21.00, X_{max}=(8.00; 5.00; 0.00; 0.00).
5.2.75.	z_{max}= -2.14, X_{max}=(0.71; 1.43).
5.2.76.	z_{max}= 4.67, X_{max}=(0.00; 1.33; 0.67).
5.2.77.	Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.

5.2.78.	z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 0.00). Альтернативный оптимум.
5.2.79.	z_{min}= -7.00, X_{min}=(0.00; 1.75).
5.2.80.	z_{max}= -10.17, X_{max}=(1.50; 0.00; 3.67; 0.00).
5.2.81.	z_{max}= 1.67, X_{max}=(1.67; 0.00).
5.2.82.	z_{min}= 12.25, X_{min}=(0.25; 4.00; 4.00).
5.2.83.	z_{max}= 8.00, X_{max}=(0.00; 2.00).
5.2.84.	z_{max}= 0.00, X_{max}=(4.00; 0.00; 0.00; 0.00).
5.2.85.	z_{min}= 3.00, X_{min}=(2.00; 0.00; 3.00).
5.2.86.	z_{min}= 41.33, X_{min}=(0.00; 9.00; 1.33; 0.00).
5.2.87.	Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
5.2.88.	z_{min}= 3.20, X_{min}=(0.40; 0.80).
5.2.89.	z_{max}= 3.00, X_{max}=(1.00; 1.25; 0.00).
5.2.90.	Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
5.2.91.	z_{min}= 3.17, X_{min}=(8.17; 0.33; 1.08).
5.2.92.	z_{min}= 33.00, X_{min}=(15.00; 0.00; 8.00; 3.00).
5.2.93.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
5.2.94.	z_{min}= 4.00, X_{min}=(2.00; 0.00; 0.00; 0.00).
5.2.95.	z_{max}= 12.00, X_{max}=(3.00; 0.00; 0.00).
5.2.96.	z_{min}= 3.50, X_{min}=(0.00; 1.75).
5.2.97.	z_{min}= 1.25, X_{min}=(2.50; 0.00; 1.25).
5.2.98.	z_{max}= 11.00, X_{max}=(11.00; 4.00; 0.00).
5.2.99.	z_{min}= 9.14, X_{min}=(5.71; 2.57; 1.43).
5.2.00.	z_{min}= 5.00, X_{min}=(0.00; 1.60; 1.80).

Ответы к задачам по теме 6.

6.2.01.	z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 6.00).Y_{min}=(0.00 0.00-0.50).
6.2.02.	Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
6.2.03.	z_{max}= 15.00, X_{max}=(5.00; 0.00; 5.00;10.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 3.00 0.00).
6.2.04.	z_{min}= 1.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 1.00; 1.00).Y_{max}=(0.25 0.00 0.00).
6.2.05.	z_{max}= 3.00, X_{max}=(0.00; 1.50; 0.00; 3.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.50 0.00 0.00).
6.2.06.	z_{min}= 60.00, X_{min}=(3.00; 0.00; 2.50;15.00).Y_{max}=(0.00 8.00 4.00).
6.2.07.	z_{max}= -2.00, X_{max}=(1.00;14.00; 3.00).Y_{min}=(0.50-1.00-0.25).
6.2.08.	Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху.
6.2.09.	z_{max}= 0.00, X_{max}=(7.00; 0.00; 2.50; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.10.	z_{max}= 0.00, X_{max}=(1.00; 7.00; 1.50). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 1.00 0.00).
6.2.11.	z_{max}= 0.14, X_{max}=(0.14; 1.14).Y_{min}=(0.14-0.11).
6.2.12.	z_{max}= -9.33, X_{max}=(1.67; 9.33).Y_{min}=(-0.67-1.00).
6.2.13.	z_{min}= 1.50, X_{min}=(0.00; 0.12; 1.50). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.25 0.00 0.00).
6.2.14.	z_{max}= 8.00, X_{max}=(3.00; 2.00; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(4.00 0.00 0.00).
6.2.15.	z_{max}= -6.00, X_{max}=(1.00; 5.00; 1.00).Y_{min}=(-1.00 0.00-0.25).
6.2.16.	z_{min}= 6.50, X_{min}=(8.88; 1.63; 1.25; 0.00).Y_{max}=(0.00 0.50 2.00).
6.2.17.	z_{min}= -3.50, X_{min}=(4.00; 0.00; 3.50; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 0.00-0.50).
6.2.18.	z_{max}= 15.25, X_{max}=(4.00; 0.00; 0.25).Y_{min}=(4.75 0.00-0.75).
6.2.19.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 4.00; 3.00; 0.00).Y_{max}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.20.	z_{max}= 6.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 1.50; 3.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 0.00 2.00).
6.2.21.	z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 1.33). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 0.00).
6.2.22.	z_{max}= 9.33, X_{max}=(0.00; 0.00; 2.33).Y_{min}=(1.33 0.00).
6.2.23.	z_{max}= 20.00, X_{max}=(5.00; 0.00).Y_{min}=(4.00 0.00).

6.2.24. z_{min}= -4.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.00).Y_{max}=(-3.67 3.00).
6.2.25. z_{min}= -4.00, X_{min}=(2.00; 3.00; 0.00).Y_{max}=(-3.00 0.50 0.00).
6.2.26. z_{min}= 24.00, X_{min}=(0.00; 5.00; 0.00; 6.00).Y_{max}=(0.00 0.00 4.00).
6.2.27. z_{min}= -10.00, X_{min}=(0.00; 5.00; 0.00).Y_{max}=(-2.00 0.00).
6.2.28. z_{min}= 5.00, X_{min}=(2.50; 0.00; 5.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 1.00 0.00).
6.2.29. z_{max}= -9.00, X_{max}=(3.00; 0.00; 2.00).Y_{min}=(-3.00 0.00 0.00).
6.2.30. z_{max}= 1.67, X_{max}=(0.00; 1.67; 0.00).Y_{min}=(0.33 0.00).
6.2.31. z_{min}= 2.67, X_{min}=(0.00; 1.33; 2.67). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 0.33 0.00).
6.2.32. z_{min}= 3.00, X_{min}=(0.00; 2.00; 1.00).Y_{max}=(-0.86 0.43).
6.2.33. z_{max}= 3.75, X_{max}=(7.00; 0.00; 0.00; 1.25).Y_{min}=(0.00 0.75 0.00).
6.2.34. z_{min}= 2.33, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.33).Y_{max}=(0.00 0.33).
6.2.35. z_{min}= -32.00, X_{min}=(0.00; 8.00; 6.00).Y_{max}=(0.00 0.00-4.00).
6.2.36. z_{min}= -0.20, X_{min}=(0.60; 0.00; 0.80).Y_{max}=(-1.80 1.40).
6.2.37. z_{min}= 2.00, X_{min}=(0.00; 1.00; 1.00).Y_{max}=(0.67 0.00 0.50).
6.2.38. z_{min}= 5.25, X_{min}=(1.75; 1.25; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 0.75 0.00).
6.2.39. z_{min}= 0.00, X_{min}=(1.50; 0.00).Y_{max}=(-1.00 1.00).
6.2.40. z_{min}= 7.00, X_{min}=(7.00; 0.00; 3.50; 0.00).Y_{max}=(2.00-1.00 0.00).
6.2.41. z_{max}= -8.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 2.00).Y_{min}=(0.00 2.00-2.00).
6.2.42. z_{min}= 0.00, X_{min}=(8.00; 1.75; 0.00; 0.00).Y_{max}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.43. z_{min}= -7.38, X_{min}=(0.15; 5.00; 2.54; 0.00).Y_{max}=(0.69 0.92-3.00).
6.2.44. Не имеет решения, так как система ограничений противоречива.
6.2.45. Не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу.
6.2.46. z_{max}= 26.33, X_{max}=(0.00; 1.33; 7.00).Y_{min}=(1.33 0.00 3.00).
6.2.47. z_{min}= 0.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 0.00; 1.75).Y_{max}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.48. z_{max}= 6.00, X_{max}=(2.00; 0.00).Y_{min}=(1.00 0.00).
6.2.49. z_{min}= 7.50, X_{min}=(2.00; 0.00; 2.50; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 1.50 0.00).
6.2.50. z_{min}= 5.86, X_{min}=(1.86; 0.71).Y_{max}=(0.43 0.71).
6.2.51. z_{max}= 24.00, X_{max}=(0.00; 8.00; 0.00).Y_{min}=(0.00 3.00).
6.2.52. z_{max}= 3.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 3.00; 5.00).Y_{min}=(0.00 0.50 0.00).
6.2.53. z_{min}= 2.00, X_{min}=(0.00; 6.00; 1.00; 1.00).Y_{max}=(-0.13 0.00 0.50).
6.2.54. z_{max}= -4.00, X_{max}=(0.00; 2.00; 1.00; 2.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(-2.00 0.00 0.00).
6.2.55. z_{min}= 1.50, X_{min}=(3.00; 9.00; 1.50; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 0.00 0.25).
6.2.56. z_{max}= 0.00, X_{max}=(3.00; 0.00; 0.00; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(2.00 0.00 0.00).
6.2.57. z_{max}= -0.67, X_{max}=(1.00; 2.67; 4.00).Y_{min}=(0.17 0.00-0.50).
6.2.58. z_{max}= 6.00, X_{max}=(4.00; 0.00; 2.00).Y_{min}=(3.00 3.33-1.50).
6.2.59. z_{max}= 8.00, X_{max}=(0.00; 2.00; 0.00).Y_{min}=(0.00 1.00).
6.2.60. z_{max}= -15.00, X_{max}=(4.00; 2.50; 2.50; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 0.00-3.00).
6.2.61. z_{min}= -5.00, X_{min}=(2.50; 2.50; 0.00).Y_{max}=(0.33-1.00).
6.2.62. z_{max}= 63.00, X_{max}=(21.00; 9.00; 0.00; 4.00).Y_{min}=(-6.00 9.00 3.00).
6.2.63. z_{max}= 0.00, X_{max}=(0.00; 1.50; 0.00).Y_{min}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.64. z_{min}= 5.25, X_{min}=(1.75; 0.00; 7.00).Y_{max}=(0.00 0.00 0.75).
6.2.65. z_{min}= 21.00, X_{min}=(7.00; 7.00; 0.00).Y_{max}=(2.00 1.00 0.00).
6.2.66. z_{min}= -2.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.00).Y_{max}=(-0.50 0.00).
6.2.67. z_{min}= -6.83, X_{min}=(1.33; 4.67; 0.83).Y_{max}=(-1.83-2.00 2.75).
6.2.68. z_{min}= 16.00, X_{min}=(1.67; 3.67; 8.00; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 0.00 2.00).
6.2.69. z_{max}= 0.00, X_{max}=(8.00; 6.00; 0.00; 0.00).Y_{min}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.70. z_{min}= 8.00, X_{min}=(2.67; 7.83; 1.83). Альтернативный оптимум.

Y_{max}=(1.00 0.00 0.00).
6.2.71. z_{min}= 19.78, X_{min}=(0.78; 1.33; 9.11).Y_{max}=(-2.22 3.33 2.00).
6.2.72. z_{min}= 8.00, X_{min}=(8.00; 0.00).Y_{max}=(1.00 0.00).
6.2.73. z_{min}= 12.00, X_{min}=(2.33; 1.33; 0.00).Y_{max}=(0.00 2.00).
6.2.74. z_{min}= 2.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.00).Y_{max}=(0.25 0.00).
6.2.75. z_{min}= -6.29, X_{min}=(0.00; 0.64; 2.21). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(-1.71 0.57).
6.2.76. z_{max}= 10.00, X_{max}=(0.00; 0.00; 5.00).Y_{min}=(2.00 0.00).
6.2.77. z_{max}= 40.00, X_{max}=(0.00;38.00;10.00; 5.00).Y_{min}=(8.00 0.00-4.00).
6.2.78. z_{max}= 3.33, X_{max}=(1.67; 0.00; 0.00).Y_{min}=(0.67 0.00).
6.2.79. z_{min}= 24.00, X_{min}=(12.00; 2.00; 0.00).Y_{max}=(2.00-0.25 1.50).
6.2.80. z_{min}= 18.00, X_{min}=(6.00; 6.00; 0.00; 0.00).Y_{max}=(0.00 3.00 0.00).
6.2.81. z_{max}= 15.00, X_{max}=(5.00; 1.75; 0.33; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 0.00 3.00).
6.2.82. z_{max}= 5.25, X_{max}=(1.75; 4.00; 0.00).Y_{min}=(0.75 0.00 0.00).
6.2.83. z_{min}= 3.33, X_{min}=(0.00; 1.67).Y_{max}=(0.67 0.00).
6.2.84. z_{min}= 5.00, X_{min}=(0.00; 0.00; 2.50).Y_{max}=(-1.00-2.00 2.00).
6.2.85. z_{min}= -1.00, X_{min}=(1.00; 0.00; 2.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00-0.25 0.00).
6.2.86. z_{max}= -5.25, X_{max}=(1.92; 1.75; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 0.00-0.75).
6.2.87. z_{max}= 12.00, X_{max}=(8.00; 5.00; 6.00; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(2.00 0.00 0.00).
6.2.88. z_{min}= 9.00, X_{min}=(1.00; 3.00; 1.75).Y_{max}=(2.00-3.00 3.00).
6.2.89. z_{min}= 0.00, X_{min}=(8.00; 0.00; 6.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.90. z_{max}= -0.00, X_{max}=(6.00; 0.00; 6.00; 0.00).Y_{min}=(0.00 0.00 0.00).
6.2.91. z_{min}= 3.14, X_{min}=(0.86; 0.00; 1.57).Y_{max}=(-0.29 0.57).
6.2.92. z_{max}= 3.00, X_{max}=(1.75; 3.00; 0.00; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(1.00 0.00 0.00).
6.2.93. z_{min}= -15.00, X_{min}=(5.00; 0.00; 7.00; 0.00).Y_{max}=(0.00 0.00-3.00).
6.2.94. z_{max}= -28.00, X_{max}=(20.00; 0.00; 7.00; 0.00).Y_{min}=(0.00 8.00-4.00).
6.2.95. z_{max}= -15.00, X_{max}=(5.00; 1.00; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{min}=(0.00 0.00-3.00).
6.2.96. z_{min}= 19.33, X_{min}=(0.00; 9.67; 2.67; 0.00).Y_{max}=(0.67-1.08 2.00).
6.2.97. z_{min}= 22.57, X_{min}=(5.00; 1.86; 2.57).Y_{max}=(4.00 0.29 0.43).
6.2.98. z_{min}= 4.29, X_{min}=(2.14; 0.14; 0.00).Y_{max}=(0.29 0.29).
6.2.99. z_{min}= -4.33, X_{min}=(1.67; 1.67; 0.00; 4.33).Y_{max}=(0.33 0.50-1.00).
6.2.00. z_{min}= -2.50, X_{min}=(2.38; 1.25; 0.00). Альтернативный оптимум. Y_{max}=(-0.50 0.00 0.00).

Ответы к задачам по теме 7.

7.1.01. Z_{min}= 959	**7.1.02.** Z_{min}= 399	**7.1.03.** Z_{min}= 645	**7.1.04.** Z_{min}= 598
7.1.05. Z_{min}= 1093	**7.1.06.** Z_{min}= 320	**7.1.07.** Z_{min}= 21	**7.1.08.** Z_{min}= 683
7.1.09. Z_{min}= 8	**7.1.10.** Z_{min}= 266	**7.1.11.** Z_{min}= 292	**7.1.12.** Z_{min}= 310
7.1.13. Z_{min}= 194	**7.1.14.** Z_{min}= 728	**7.1.15.** Z_{min}= 418	**7.1.16.** Z_{min}= 394
7.1.17. Z_{min}= 704	**7.1.18.** Z_{min}= 131	**7.1.19.** Z_{min}= 799	**7.1.20.** Z_{min}= 415
7.1.21. Z_{min}= 276	**7.1.22.** Z_{min}= 182	**7.1.23.** Z_{min}= 840	**7.1.24.** Z_{min}= 78
7.1.25. Z_{min}= 149	**7.1.26.** Z_{min}= 961	**7.1.27.** Z_{min}= 530	**7.1.28.** Z_{min}= 31
7.1.29. Z_{min}= 218	**7.1.30.** Z_{min}= 104	**7.1.31.** Z_{min}= 346	**7.1.32.** Z_{min}= 146
7.1.33. Z_{min}= 204	**7.1.34.** Z_{min}= 236	**7.1.35.** Z_{min}= 806	**7.1.36.** Z_{min}= 317
7.1.37. Z_{min}= 338	**7.1.38.** Z_{min}= 583	**7.1.39.** Z_{min}= 159	**7.1.40.** Z_{min}= 728
7.1.41. Z_{min}= 862	**7.1.42.** Z_{min}= 268	**7.1.43.** Z_{min}= 673	**7.1.44.** Z_{min}= 64
7.1.45. Z_{min}= 250	**7.1.46.** Z_{min}= 795	**7.1.47.** Z_{min}= 76	**7.1.48.** Z_{min}= 117
7.1.49. Z_{min}= 71	**7.1.50.** Z_{min}= 653	**7.1.51.** Z_{min}= 331	**7.1.52.** Z_{min}= 594

7.1.53. Z_{min}= 20	**7.1.54.** Z_{min}= 440	**7.1.55.** Z_{min}= 268	**7.1.56.** Z_{min}= 511
7.1.57. Z_{min}= 53	**7.1.58.** Z_{min}= 862	**7.1.59.** Z_{min}= 364	**7.1.60.** Z_{min}= 950
7.1.61. Z_{min}= 150	**7.1.62.** Z_{min}= 450	**7.1.63.** Z_{min}= 414	**7.1.64.** Z_{min}= 493
7.1.65. Z_{min}= 207	**7.1.66.** Z_{min}= 169	**7.1.67.** Z_{min}= 638	**7.1.68.** Z_{min}= 391
7.1.69. Z_{min}= 45	**7.1.70.** Z_{min}= 922	**7.1.71.** Z_{min}= 28	**7.1.72.** Z_{min}= 132
7.1.73. Z_{min}= 132	**7.1.74.** Z_{min}= 1198	**7.1.75.** Z_{min}= 319	**7.1.76.** Z_{min}= 414
7.1.77. Z_{min}= 399	**7.1.78.** Z_{min}= 137	**7.1.79.** Z_{min}= 198	**7.1.80.** Z_{min}= 488
7.1.81. Z_{min}= 176	**7.1.82.** Z_{min}= 516	**7.1.83.** Z_{min}= 314	**7.1.84.** Z_{min}= 777
7.1.85. Z_{min}= 787	**7.1.86.** Z_{min}= 436	**7.1.87.** Z_{min}= 930	**7.1.88.** Z_{min}= 371
7.1.89. Z_{min}= 56	**7.1.90.** Z_{min}= 2019	**7.1.91.** Z_{min}= 534	**7.1.92.** Z_{min}= 169
7.1.93. Z_{min}= 435	**7.1.94.** Z_{min}= 914	**7.1.95.** Z_{min}= 254	**7.1.96.** Z_{min}= 224
7.1.97. Z_{min}= 571	**7.1.98.** Z_{min}= 119	**7.1.99.** Z_{min}= 334	**7.1.00.** Z_{min}= 221

7.2.01. Z_{max}= 25	**7.2.02.** Z_{max}= 21	**7.2.03.** Z_{max}= 21	**7.2.04.** Z_{max}= 20
7.2.05. Z_{max}= 19	**7.2.06.** Z_{max}= 23	**7.2.07.** Z_{max}= 18	**7.2.08.** Z_{max}= 22
7.2.09. Z_{max}= 21	**7.2.10.** Z_{max}= 19	**7.2.11.** Z_{max}= 27	**7.2.12.** Z_{max}= 18
7.2.13. Z_{max}= 26	**7.2.14.** Z_{max}= 24	**7.2.15.** Z_{max}= 18	**7.2.16.** Z_{max}= 15
7.2.17. Z_{max}= 23	**7.2.18.** Z_{max}= 20	**7.2.19.** Z_{max}= 22	**7.2.20.** Z_{max}= 21
7.2.21. Z_{max}= 19	**7.2.22.** Z_{max}= 25	**7.2.23.** Z_{max}= 23	**7.2.24.** Z_{max}= 22
7.2.25. Z_{max}= 18	**7.2.26.** Z_{max}= 20	**7.2.27.** Z_{max}= 26	**7.2.28.** Z_{max}= 23
7.2.29. Z_{max}= 25	**7.2.30.** Z_{max}= 23	**7.2.31.** Z_{max}= 24	**7.2.32.** Z_{max}= 22
7.2.33. Z_{max}= 23	**7.2.34.** Z_{max}= 23	**7.2.35.** Z_{max}= 23	**7.2.36.** Z_{max}= 25
7.2.37. Z_{max}= 24	**7.2.38.** Z_{max}= 22	**7.2.39.** Z_{max}= 23	**7.2.40.** Z_{max}= 28
7.2.41. Z_{max}= 22	**7.2.42.** Z_{max}= 22	**7.2.43.** Z_{max}= 23	**7.2.44.** Z_{max}= 24
7.2.45. Z_{max}= 23	**7.2.46.** Z_{max}= 21	**7.2.47.** Z_{max}= 21	**7.2.48.** Z_{max}= 26
7.2.49. Z_{max}= 22	**7.2.50.** Z_{max}= 16	**7.2.51.** Z_{max}= 17	**7.2.52.** Z_{max}= 20
7.2.53. Z_{max}= 21	**7.2.54.** Z_{max}= 24	**7.2.55.** Z_{max}= 22	**7.2.56.** Z_{max}= 20
7.2.57. Z_{max}= 18	**7.2.58.** Z_{max}= 21	**7.2.59.** Z_{max}= 23	**7.2.60.** Z_{max}= 25
7.2.61. Z_{max}= 22	**7.2.62.** Z_{max}= 20	**7.2.63.** Z_{max}= 24	**7.2.64.** Z_{max}= 18
7.2.65. Z_{max}= 19	**7.2.66.** Z_{max}= 24	**7.2.67.** Z_{max}= 22	**7.2.68.** Z_{max}= 24
7.2.69. Z_{max}= 20	**7.2.70.** Z_{max}= 20	**7.2.71.** Z_{max}= 24	**7.2.72.** Z_{max}= 23
7.2.73. Z_{max}= 20	**7.2.74.** Z_{max}= 19	**7.2.75.** Z_{max}= 21	**7.2.76.** Z_{max}= 20
7.2.77. Z_{max}= 20	**7.2.78.** Z_{max}= 21	**7.2.79.** Z_{max}= 22	**7.2.80.** Z_{max}= 21
7.2.81. Z_{max}= 18	**7.2.82.** Z_{max}= 20	**7.2.83.** Z_{max}= 16	**7.2.84.** Z_{max}= 22
7.2.85. Z_{max}= 15	**7.2.86.** Z_{max}= 24	**7.2.87.** Z_{max}= 26	**7.2.88.** Z_{max}= 18
7.2.89. Z_{max}= 22	**7.2.90.** Z_{max}= 23	**7.2.91.** Z_{max}= 19	**7.2.92.** Z_{max}= 25
7.2.93. Z_{max}= 23	**7.2.94.** Z_{max}= 16	**7.2.95.** Z_{max}= 19	**7.2.96.** Z_{max}= 20
7.2.97. Z_{max}= 23	**7.2.98.** Z_{max}= 21	**7.2.99.** Z_{max}= 22	**7.2.00.** Z_{max}= 25

Ответы к задачам по теме 8.

8.01. P= 199	**8.02.** P= 188	**8.03.** P= 196	**8.04.** P= 196	**8.05.** P= 185
8.06. P= 174	**8.07.** P= 217	**8.08.** P= 210	**8.09.** P= 185	**8.10.** P= 174
8.11. P= 193	**8.12.** P= 191	**8.13.** P= 194	**8.14.** P= 204	**8.15.** P= 200
8.16. P= 192	**8.17.** P= 187	**8.18.** P= 192	**8.19.** P= 222	**8.20.** P= 216
8.21. P= 182	**8.22.** P= 191	**8.23.** P= 181	**8.24.** P= 193	**8.25.** P= 196
8.26. P= 211	**8.27.** P= 191	**8.28.** P= 183	**8.29.** P= 222	**8.30.** P= 184
8.31. P= 198	**8.32.** P= 203	**8.33.** P= 176	**8.34.** P= 204	**8.35.** P= 190
8.36. P= 199	**8.37.** P= 180	**8.38.** P= 156	**8.39.** P= 195	**8.40.** P= 176
8.41. P= 220	**8.42.** P= 170	**8.43.** P= 180	**8.44.** P= 208	**8.45.** P= 181
8.46. P= 194	**8.47.** P= 205	**8.48.** P= 178	**8.49.** P= 165	**8.50.** P= 201
8.51. P= 165	**8.52.** P= 197	**8.53.** P= 192	**8.54.** P= 160	**8.55.** P= 188
8.56. P= 180	**8.57.** P= 198	**8.58.** P= 185	**8.59.** P= 180	**8.60.** P= 184
8.61. P= 177	**8.62.** P= 193	**8.63.** P= 201	**8.64.** P= 198	**8.65.** P= 182
8.66. P= 206	**8.67.** P= 181	**8.68.** P= 168	**8.69.** P= 196	**8.70.** P= 167
8.71. P= 193	**8.72.** P= 195	**8.73.** P= 174	**8.74.** P= 196	**8.75.** P= 186
8.76. P= 167	**8.77.** P= 202	**8.78.** P= 184	**8.79.** P= 164	**8.80.** P= 214
8.81. P= 197	**8.82.** P= 181	**8.83.** P= 194	**8.84.** P= 206	**8.85.** P= 171
8.86. P= 184	**8.87.** P= 202	**8.88.** P= 181	**8.89.** P= 190	**8.90.** P= 189
8.91. P= 188	**8.92.** P= 169	**8.93.** P= 176	**8.94.** P= 195	**8.95.** P= 172
8.96. P= 183	**8.97.** P= 184	**8.98.** P= 192	**8.99.** P= 203	**8.00.** P= 207

Ответы к задачам по теме 9.

9.01. $T_{кр}=17$	**9.02.** $T_{кр}=18$	**9.03.** $T_{кр}=32$	**9.04.** $T_{кр}=27$	**9.05.** $T_{кр}=20$
9.06. $T_{кр}=20$	**9.07.** $T_{кр}=14$	**9.08.** $T_{кр}=22$	**9.09.** $T_{кр}=21$	**9.10.** $T_{кр}=36$
9.11. $T_{кр}=23$	**9.12.** $T_{кр}=15$	**9.13.** $T_{кр}=24$	**9.14.** $T_{кр}=23$	**9.15.** $T_{кр}=18$
9.16. $T_{кр}=24$	**9.17.** $T_{кр}=16$	**9.18.** $T_{кр}=18$	**9.19.** $T_{кр}=19$	**9.20.** $T_{кр}=29$
9.21. $T_{кр}=21$	**9.22.** $T_{кр}=25$	**9.23.** $T_{кр}=25$	**9.24.** $T_{кр}=30$	**9.25.** $T_{кр}=27$
9.26. $T_{кр}=12$	**9.27.** $T_{кр}=24$	**9.28.** $T_{кр}=21$	**9.29.** $T_{кр}=17$	**9.30.** $T_{кр}=22$
9.31. $T_{кр}=23$	**9.32.** $T_{кр}=32$	**9.33.** $T_{кр}=27$	**9.34.** $T_{кр}=19$	**9.35.** $T_{кр}=23$
9.36. $T_{кр}=25$	**9.37.** $T_{кр}=31$	**9.38.** $T_{кр}=30$	**9.39.** $T_{кр}=33$	**9.40.** $T_{кр}=21$
9.41. $T_{кр}=29$	**9.42.** $T_{кр}=27$	**9.43.** $T_{кр}=22$	**9.44.** $T_{кр}=27$	**9.45.** $T_{кр}=30$
9.46. $T_{кр}=29$	**9.47.** $T_{кр}=15$	**9.48.** $T_{кр}=25$	**9.49.** $T_{кр}=16$	**9.50.** $T_{кр}=17$
9.51. $T_{кр}=24$	**9.52.** $T_{кр}=22$	**9.53.** $T_{кр}=15$	**9.54.** $T_{кр}=20$	**9.55.** $T_{кр}=19$
9.56. $T_{кр}=20$	**9.57.** $T_{кр}=17$	**9.58.** $T_{кр}=23$	**9.59.** $T_{кр}=22$	**9.60.** $T_{кр}=26$
9.61. $T_{кр}=18$	**9.62.** $T_{кр}=26$	**9.63.** $T_{кр}=26$	**9.64.** $T_{кр}=28$	**9.65.** $T_{кр}=35$
9.66. $T_{кр}=23$	**9.67.** $T_{кр}=14$	**9.68.** $T_{кр}=24$	**9.69.** $T_{кр}=20$	**9.70.** $T_{кр}=35$
9.71. $T_{кр}=25$	**9.72.** $T_{кр}=27$	**9.73.** $T_{кр}=23$	**9.74.** $T_{кр}=29$	**9.75.** $T_{кр}=17$
9.76. $T_{кр}=36$	**9.77.** $T_{кр}=21$	**9.78.** $T_{кр}=34$	**9.79.** $T_{кр}=15$	**9.80.** $T_{кр}=25$
9.81. $T_{кр}=20$	**9.82.** $T_{кр}=30$	**9.83.** $T_{кр}=24$	**9.84.** $T_{кр}=22$	**9.85.** $T_{кр}=37$
9.86. $T_{кр}=29$	**9.87.** $T_{кр}=27$	**9.88.** $T_{кр}=32$	**9.89.** $T_{кр}=18$	**9.90.** $T_{кр}=19$
9.91. $T_{кр}=21$	**9.92.** $T_{кр}=16$	**9.93.** $T_{кр}=19$	**9.94.** $T_{кр}=36$	**9.95.** $T_{кр}=27$
9.96. $T_{кр}=22$	**9.97.** $T_{кр}=18$	**9.98.** $T_{кр}=26$	**9.99.** $T_{кр}=23$	**9.00.** $T_{кр}=35$

Ответы к задачам приложения.

П.1.01.	**П.1.02.**	**П.1.03.**
6.00-4.00 1.00 0.50 0.00 0.00 1.50-1.00 0.00	-0.50 1.00 0.50 0.50 0.00-0.50 -0.13 0.00 0.38	0.33 0.00-0.50 2.00 1.00-1.50 0.67 0.00-0.50
П.1.04.	**П.1.05.**	**П.1.06.**
-1.00 0.00 2.00 0.00 0.00-0.08 0.00 0.33 0.50 0.00-0.50 0.00 0.00 0.33 0.00-0.33	0.00 0.19 0.25 1.00 0.06-0.25 0.00-0.06 0.25	0.33 0.00 0.00 -0.67 1.00-2.00 0.17 0.00 0.50
П.1.07.	**П.1.08.**	**П.1.09.**
2.00 1.00-8.00 -1.00 0.00 4.00 1.00 0.00-3.00	1.00 0.00 0.00 0.00-1.33 1.00 0.00 0.33 0.00	0.67-1.00 0.00 0.67-2.00 1.00 -0.33 1.00 0.00
П.1.10.	**П.1.11.**	**П.1.12.**
-0.33 1.00-1.00 0.08 0.00 0.25 -0.33 0.00 0.00	Обратная матрица не суще- ствует	0.50 0.00 0.00 0.50 0.00 2.00 1.00 0.00 0.00-1.00-1.00 0.00 -0.25 0.00 0.00 0.25
П.1.13.	**П.1.14.**	**П.1.15.**
0.31-0.46-0.12 -0.08 0.62 0.15 -0.15 0.23 0.31	2.00-0.75 1.50-6.00 -1.00 0.25-0.50 2.00 2.00-0.50 1.50-6.00 1.00-0.25 0.50-3.00	-0.25-0.13 0.00 0.50 0.25 1.00 -0.25 0.38 0.00
П.1.16.	**П.1.17.**	**П.1.18.**
0.53-0.13 0.20-0.53 0.80-0.20 0.30-0.30 0.80-0.20 0.80-0.80 -0.60 0.40-0.60 0.60	1.00 1.50 1.50 0.00-1.00 0.00 0.00-0.50-0.50	0.67 0.00 0.33 -2.67 1.00-1.33 1.00 0.00 0.00
П.1.19.	**П.1.20.**	**П.1.21.**
0.00-0.27 0.18 1.00 0.27-0.18 0.00 0.09 0.27	-0.17 0.00 0.67 0.33 0.00-0.33 -0.17 1.00 0.67	-0.20 0.00 0.60 0.00 0.00 0.17 0.00 0.33 0.40 0.00-0.20 0.00 0.00-0.17 0.00 0.17
П.1.22.	**П.1.23.**	**П.1.24.**
1.00-0.33 0.25 0.00 0.33-0.25 0.00 0.33 0.00	Обратная матрица не суще- ствует	0.27 0.27-0.09-0.82 0.18 0.18 0.27-0.55 0.27 0.27-0.09 0.18 -0.82 0.18 0.27-0.55

П.1.25.	**П.1.26.**	**П.1.27.**
-1.33-0.67 1.00 0.33-0.33 0.00 0.33 0.17 0.00	0.00 0.57-0.43 1.00-1.14 0.86 0.00 0.14 0.14	0.14 0.08-0.19-0.11 0.19 0.11 0.08-0.14 -0.11 0.19 0.14 0.08 -0.08 0.14 0.11-0.19
П.1.28.	**П.1.29.**	**П.1.30.**
Обратная матрица не существует	0.10 0.20-0.20 0.20-0.10-0.40 0.20-0.10 0.10	-1.14 0.57 1.00 0.43 0.29 0.00 0.29-0.14 0.00
П.1.31.	**П.1.32.**	**П.1.33.**
-4.00 1.00-4.00 0.00 0.00 0.25 -1.00 0.00-1.00	-0.29 0.14 0.00 -0.07 0.29 0.00 -1.14 0.57 1.00	-4.00 4.00 1.00 -1.00 2.00 0.00 1.00-1.00 0.00
П.1.34.	**П.1.35.**	**П.1.36.**
0.17 0.00 0.00 0.17 0.00 2.00-0.50 0.00 0.00 1.00-0.50 0.00 0.11 0.00 0.00-0.22	0.00 0.50 0.00 -0.33 0.67 0.00 -1.00 2.00 1.00	1.00 0.40-0.60 0.00-0.13 0.20 0.00-0.20-0.20
П.1.37.	**П.1.38.**	**П.1.39.**
0.19 0.08 0.06 0.19-0.25 0.06 0.25-0.33-0.25	0.43-0.57 0.00 0.14 0.14 0.00 1.29-1.71 1.00	-0.33 0.00 0.00 0.67 0.00 0.21 0.29 0.00 0.33 0.00 0.00-0.17 0.00-0.14 0.14 0.00
П.1.40.	**П.1.41.**	**П.1.42.**
0.25 0.00 0.00 -0.75 1.00 0.00 -3.00 4.00 1.00	Обратная матрица не существует	0.13-0.50 0.00 0.38-0.50 0.00 -0.38 0.50 1.00
П.1.43.	**П.1.44.**	**П.1.45.**
-0.17 0.50 0.00 -0.33 0.00 0.00 -0.67 2.00 1.00	0.00 1.00 0.00 1.00 4.50-1.50 0.00-1.50 0.50	0.33 0.00 0.67 0.67 0.00 0.33 1.00 1.00 2.00
П.1.46.	**П.1.47.**	**П.1.48.**
Обратная матрица не существует	0.00 0.00 0.50 0.50 0.00-0.75 -1.00 1.00 1.50	-0.50 0.00 1.00 1.50 1.00-1.50 0.50 0.00-0.50
П.1.49.	**П.1.50.**	**П.1.51.**
0.07 0.07-0.07 0.27 -0.20-0.20 0.20 0.20 -0.05 0.20 0.05-0.20 0.27 0.27 0.07-0.27	Обратная матрица не существует	0.00 0.50 0.00 -1.00 1.50 1.00 0.50-0.75 0.00
П.1.52.	**П.1.53.**	**П.1.54.**
0.08 0.04-0.17-0.06 -0.23 0.06-0.23-0.08 0.31 0.17 0.31-0.23 -0.31 0.08-0.31 0.23	-0.22 0.06-0.06 0.11 0.22-0.22 0.22 0.44 0.06	1.00-1.00 0.25 0.00 0.50-0.13 0.00 0.00 0.25
П.1.55.	**П.1.56.**	**П.1.57.**
-0.60 0.40 0.80 0.40-0.10-0.20 1.20-0.30-1.60	0.21 0.21 0.14 -0.07 0.43 0.29 -0.07-0.07 0.29	0.67 1.00 0.67 0.33 0.00 0.33 0.00 0.00 0.50
П.1.58.	**П.1.59.**	**П.1.60.**
-0.06-0.06 0.17 0.22 -0.06 0.44 0.17 0.22 -0.07-0.07 0.22-0.04 0.30 0.30 0.11 0.15	Обратная матрица не существует	-0.36 0.09 0.24-0.18 0.36-0.09 0.09 0.18 -0.27-0.18 0.18-0.14 -0.36 0.09-0.09 0.07
П.1.61.	**П.1.62.**	**П.1.63.**
1.00 1.00-0.50-0.50 -0.50-0.50 0.50 0.25 -1.00-0.50 0.50 0.50 1.00 0.50-0.50-0.25	0.46-0.35 0.31 0.23 0.08 0.15 -0.15 0.12 0.23	-0.07 0.14 0.14-0.10 0.14 0.21-0.29-0.14 0.14 0.21-0.29 0.19 0.11-0.21 0.29 0.14

П.1.64.	**П.1.65.**	**П.1.66.**
0.11-0.43 0.07 0.07-0.29-0.29 0.21 0.14 0.14	3.00-6.00-8.00 3.00 -1.00 2.00 3.00-1.00 -4.00 9.0012.00-4.50 -2.00 4.50 6.00-2.00	-0.25 0.38 0.25-0.25 0.50-0.25-0.50 0.50 0.13-0.19-0.13 0.38 0.50-0.25-0.17 0.50
П.1.67.	**П.1.68.**	**П.1.69.**
0.30 0.40 0.00 -1.20-1.60 1.00 0.10-0.20 0.00	2.57-0.86-0.64 0.29 1.29-0.43-0.07 0.14 -0.29 0.43 0.07-0.14 0.86-0.29-0.21 0.43	-0.20 0.20-0.80-0.20 0.30-0.30 1.20 0.80 0.40-0.40 0.60 0.40 -0.80 0.30-1.20-0.80
П.1.70.	**П.1.71.**	**П.1.72.**
-2.00-1.00 2.00-1.00 2.00 1.00-2.00 0.75 -3.00-2.00 3.00-1.50 1.33 0.67-1.00 0.50	0.00 0.21 0.14 1.00 0.64 0.43 0.00 0.29-0.14	Обратная матрица не существует
П.1.73.	**П.1.74.**	**П.1.75.**
0.50 0.00-0.25 -1.00 0.00 1.00 3.00 1.00-3.00	-0.31-0.15-0.23 0.15 0.21 0.10 0.15 0.23 0.23 0.12-0.08-0.12 -0.31 0.35-0.23-0.35	-0.19-0.06 0.13-0.13 0.25-0.25 0.50-0.50 0.38 0.13 0.75-0.75 -0.19-0.06 0.13 0.38
П.1.76.	**П.1.77.**	**П.1.78.**
Обратная матрица не существует	0.40-0.80 0.60 0.20-0.40 0.80 0.80-0.60 1.20	-0.13 0.38 0.00 0.50-0.50 0.00 2.00-2.00 1.00
П.1.79.	**П.1.80.**	**П.1.81.**
0.29 0.14-0.43 0.21 0.10-0.29-0.14 0.07 0.10-0.29-0.14-0.43 -0.05 0.14-0.43 0.21	0.25 0.25-0.13 -0.25 0.25 0.13 0.50-0.50 0.25	-1.50-1.50 1.00 0.33 0.67 0.00 0.50 0.50 0.00
П.1.82.	**П.1.83.**	**П.1.84.**
-0.38 1.00 0.13 0.38 0.00-0.13 -0.50 0.00 0.50	0.15-0.20 0.20 0.80 0.20 0.07 0.27-0.27 -0.05 0.07 0.27-0.27 -0.15 0.20-0.20 0.20	0.38 0.00-0.25 -0.25 0.00 0.50 0.25 1.00-0.50
П.1.85.	**П.1.86.**	**П.1.87.**
-0.07 0.32 0.21 0.43-0.43-0.29 -0.14 0.14 0.43	-0.30 0.20 0.00 0.20 0.20 0.00 -0.90 0.60 1.00	0.33 0.11-0.33 -0.33 0.22 0.33 0.17-0.11 0.33
П.1.88.	**П.1.89.**	**П.1.90.**
1.00-5.33-1.33 0.00 1.33 0.33 0.00-1.00 0.00	-1.13-0.75 1.00 -0.13 0.25 0.00 0.38 0.25 0.00	0.00 0.29-0.14 1.00 0.00 0.00 0.00 0.43 0.29
П.1.91.	**П.1.92.**	**П.1.93.**
0.63 0.16-0.21 0.16-0.21-0.05 0.84 0.21 0.05	-0.40 0.20 0.00 0.10 0.20 0.00 -0.80 0.40 1.00	-0.20 0.80-0.07 0.07 0.20 0.20 0.07-0.07 0.20-0.80 0.07 0.27 0.20-0.80-0.27 0.27
П.1.94.	**П.1.95.**	**П.1.96.**
1.00 3.00 1.00 0.00 1.00 0.00 0.50 1.50 0.00	0.57-0.76-0.43-1.71 -0.43 0.57 0.57 1.29 0.57-0.43-0.43-1.71 -0.43 0.57 0.57 2.29	Обратная матрица не существует
П.1.97.	**П.1.98.**	**П.1.99.**
0.67 2.67 1.00 -0.33-1.33 0.00 0.00-1.00 0.00	0.00-1.00 0.25 0.00 0.00-0.25 1.00 2.00-0.50	1.00-0.67 0.67 0.00 0.33-0.33 0.00 0.25 0.00
П.1.00.		
-0.94 0.24 1.00 0.06 0.24 0.00 -0.24 0.06 0.00		

П.2.01. Векторы линейно зависимы и не образуют базис.	**П.2.02.** λ=(-6.33; 3.00;-4.67).
П.2.03. λ=(-0.13;-0.75; 0.38).	**П.2.04.** λ=(0.30; 0.90; 1.00).
П.2.05. λ=(-1.00;-1.00; 1.00).	**П.2.06.** λ=(0.17; 1.17;-0.50).
П.2.07. λ=(-0.42; 0.76; 1.02).	**П.2.08.** λ=(0.00; 0.67; 0.67).
П.2.09. λ=(-0.13;-0.38; 0.38).	**П.2.10.** λ=(1.11; 2.44; 1.33).
П.2.11. λ=(0.50; 0.25; 0.25).	**П.2.12.** λ=(-2.00; 1.00; 1.00).
П.2.13. λ=(-0.50; 2.00;-0.50).	**П.2.14.** λ=(-0.75;-0.63;-0.75).
П.2.15. λ=(0.00; 0.50; 0.00).	**П.2.16.** λ=(3.00; 1.00;-2.00).
П.2.17. λ=(-0.14;-1.21; 0.21).	**П.2.18.** λ=(-1.20; 0.10; 0.40).
П.2.19. λ=(0.71; 1.29; 2.43).	**П.2.20.** λ=(1.00; 0.33;-0.33).
П.2.21. λ=(8.33;-1.00;-0.67).	**П.2.22.** λ=(0.50; 4.00; 0.00).
П.2.23. λ=(2.25; 0.33;-0.42).	**П.2.24.** λ=(1.33; 4.67; 0.44).
П.2.25. λ=(5.86; 0.29; 0.71).	**П.2.26.** λ=(0.50;-2.13; 3.50).
П.2.27. λ=(0.07; 0.06; 0.30).	**П.2.28.** λ=(-1.00; 2.00;-2.00).
П.2.29. λ=(-4.00;-13.00; 3.50).	**П.2.30.** λ=(-3.67; 2.83;-2.50).
П.2.31. λ=(1.50; 6.00;-6.00).	**П.2.32.** λ=(-1.00; 1.00; 0.75).
П.2.33. λ=(3.33;-5.00; 4.67).	**П.2.34.** λ=(22.00;-25.00;-4.00).
П.2.35. λ=(7.00;-7.33;-2.00).	**П.2.36.** λ=(-0.14; 0.14; 0.00).
П.2.37. λ=(1.00; 0.00; 0.00).	**П.2.38.** λ=(-0.14; 1.19; 0.14).
П.2.39. λ=(0.17; 2.17;-0.25).	**П.2.40.** Векторы линейно зависимы и не образуют базис.
П.2.41. λ=(8.00;-4.00;21.00).	**П.2.42.** λ=(1.83;-0.17;-1.58).
П.2.43. λ=(0.08; 0.15;-0.12).	**П.2.44.** λ=(-2.00;-2.00;12.00).
П.2.45. λ=(0.25;-0.88; 2.17).	**П.2.46.** λ=(0.50;-1.00; 6.00).
П.2.47. λ=(-1.14;-3.71;-4.29).	**П.2.48.** λ=(0.88; 8.38;-1.50).
П.2.49. λ=(6.25;-0.75; 0.75).	**П.2.50.** λ=(-0.59; 0.05;-0.14).
П.2.51. λ=(-2.00; 3.00; 1.50).	**П.2.52.** λ=(-1.25;-0.25; 1.88).
П.2.53. λ=(1.14; 0.64;-2.00).	**П.2.54.** λ=(1.13; 0.00; 0.38).
П.2.55. λ=(-0.80; 1.00;-0.60).	**П.2.56.** λ=(0.50; 0.50;-5.50).
П.2.57. λ=(-1.42;-0.54;-0.58).	**П.2.58.** λ=(5.33;-12.67;-1.33).
П.2.59. λ=(1.00; 8.00;-2.00).	**П.2.60.** Векторы линейно зависимы и не образуют базис.
П.2.61. λ=(6.33;-5.33;-1.33).	**П.2.62.** λ=(0.87;-0.07;-0.20).
П.2.63. λ=(-0.13; 0.51; 0.47).	**П.2.64.** λ=(0.25; 0.00; 0.25).
П.2.65. λ=(2.50;-0.75;-0.75).	**П.2.66.** λ=(-1.33; 0.67;-0.33).
П.2.67. λ=(1.78; 0.30;-0.11).	**П.2.68.** λ=(-3.20; 2.40;-0.60).
П.2.69. λ=(-10.00; 3.00; 1.00).	**П.2.70.** λ=(-2.00; 8.00; 2.00).
П.2.71. λ=(1.00;-1.50; 0.00).	**П.2.72.** λ=(-0.33; 3.33; 0.83).
П.2.73. λ=(0.00;-0.67;-0.33).	**П.2.74.** λ=(2.67; 4.67; 8.67).
П.2.75. λ=(1.00; 3.00; 1.00).	**П.2.76.** λ=(0.00; 0.00;-1.00).
П.2.77. λ=(-0.58;-0.44;-0.33).	**П.2.78.** Векторы линейно зависимы и не образуют базис.
П.2.79. λ=(-0.33;-1.33;-0.67).	**П.2.80.** λ=(1.00;-0.67; 1.00).
П.2.81. λ=(1.33;-4.67;-14.67).	**П.2.82.** λ=(0.13; 0.13;-0.50).
П.2.83. λ=(-3.00;-5.00;15.00).	**П.2.84.** λ=(0.40; 0.40; 1.60).
П.2.85. λ=(1.00; 0.25;-5.50).	**П.2.86.** λ=(-10.00;-4.00;-19.50).
П.2.87. λ=(8.00;-1.00; 0.00).	**П.2.88.** λ=(1.88; 0.13;-0.63).
П.2.89. λ=(0.79;-0.29; 4.00).	**П.2.90.** λ=(-6.00; 3.00;13.00).
П.2.91. λ=(1.38;-0.32; 0.18).	**П.2.92.** λ=(1.24; 0.79;-0.15).
П.2.93. λ=(-0.23;-0.02; 0.08).	**П.2.94.** λ=(0.50; 8.00; 2.00).
П.2.95. λ=(0.75;-2.75; 1.25).	**П.2.96.** λ=(-1.33; 2.33; 3.00).
П.2.97. λ=(6.50; 3.50;-13.00).	**П.2.98.** λ=(-1.81; 0.81; 0.14).
П.2.99. λ=(2.00; 1.00;-1.00).	**П.2.00.** λ=(1.43;-1.24;-2.19).

П.3.01.	$X_{Б1}$=(0.00; 6.00;-2.00; 1.75), $X_{Б2}$=(-0.50; 7.00; 0.00; 1.25), $X_{Б3}$=(-1.75; 9.50; 5.00; 0.00), $X_{Б4}$=(3.00; 0.00;-14.00; 4.75).
П.3.02.	$X_{Б1}$=(8.00; 0.00; 1.00; 6.00), $X_{Б2}$=(14.00; 2.00; 0.00; 7.00), $X_{Б3}$=(-28.00;-12.00; 7.00; 0.0), $X_{Б4}$=(0.00;-2.67; 2.33; 4.67).
П.3.03.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 5.00; 4.00), $X_{Б2}$=(2.50; 5.00; 0.00; 6.50), $X_{Б3}$=(-4.00;-8.00;13.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 0.00; 5.00; 4.00).

П.3.04.	$X_{Б1}$=(0.00;-1.50;-2.00; 0.00), $X_{Б2}$=(-3.00; 0.00; 4.00; 9.00), $X_{Б3}$=(0.00;-1.50;-2.00; 0.00), $X_{Б4}$=(-1.00;-1.00; 0.00; 3.00).
П.3.05.	$X_{Б1}$=(-10.00; 4.00; 0.00; 5.0), $X_{Б2}$=(-4.00; 0.00; 1.00; 2.00), $X_{Б3}$=(0.00;-2.67; 1.67; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00;-2.67; 1.67; 0.00).
П.3.06.	$X_{Б1}$=(0.00;20.00; 4.00; 3.00), $X_{Б2}$=(-6.67; 0.00;-2.67;-10.33), $X_{Б3}$=(-4.00; 8.00; 0.00;-5.00), $X_{Б4}$=(-1.50;15.50; 2.50; 0.00).
П.3.07.	$X_{Б1}$=(7.00;13.00; 0.00;-2.00), $X_{Б2}$=(0.00;18.25; 3.50;-3.75), $X_{Б3}$=(15.00; 7.00;-4.00; 0.00), $X_{Б4}$=(24.33; 0.00;-8.67; 2.33).
П.3.08.	$X_{Б1}$=(1.83; 0.00; 0.17; 7.00), $X_{Б2}$=(1.83; 7.00; 0.17; 0.00).
П.3.09.	$X_{Б1}$=(3.50; 3.00; 0.00;-2.50), $X_{Б2}$=(6.00; 1.75;-1.25; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 4.75; 1.75;-6.00), $X_{Б4}$=(9.50; 0.00;-3.00; 3.50).
П.3.10.	$X_{Б1}$=(7.00; 0.00; 1.67; 6.33), $X_{Б2}$=(45.00;19.00; 8.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00;-3.50; 0.50; 7.50), $X_{Б4}$=(-3.00;-5.00; 0.00; 8.00).
П.3.11.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 0.00; 6.00), $X_{Б2}$=(-3.00; 0.00;-9.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 1.50;-1.50; 0.00), $X_{Б4}$=(0.60; 1.80; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 0.00; 0.00; 6.00), $X_{Б6}$=(0.00; 0.00; 0.00; 6.00).
П.3.12.	$X_{Б1}$=(8.00; 0.00; 0.00; 6.00), $X_{Б2}$=(0.00; 4.00; 0.00; 2.00), $X_{Б3}$=(-4.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(8.00; 0.00; 6.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 4.00; 2.00; 0.00).
П.3.13.	$X_{Б1}$=(0.00; 8.00; 5.00; 4.00), $X_{Б2}$=(1.00; 5.00; 5.00; 0.00), $X_{Б3}$=(2.67; 0.00; 5.00;-6.67).
П.3.14.	$X_{Б1}$=(0.00; 8.00; 5.00; 0.00), $X_{Б2}$=(-1.25; 9.25; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(8.00; 0.00;37.00; 0.00).
П.3.15.	$X_{Б1}$=(6.00; 0.00; 3.00; 0.00), $X_{Б2}$=(6.00; 0.00; 3.00; 0.00), $X_{Б3}$=(18.00;-6.00; 0.00; 1.50), $X_{Б4}$=(0.00; 3.00; 4.50;-0.75).
П.3.16.	Система линейных уравнений несовместна
П.3.17.	$X_{Б1}$=(0.00; 1.00; 5.00; 2.50), $X_{Б2}$=(5.00; 1.00; 0.00; 2.50).
П.3.18.	$X_{Б1}$=(0.00; 5.00; 0.00; 7.00), $X_{Б2}$=(-21.00;26.00; 7.00; 0.0), $X_{Б3}$=(5.00; 0.00;-1.67; 8.67), $X_{Б4}$=(0.00; 5.00; 0.00; 7.00).
П.3.19.	$X_{Б1}$=(0.00; 5.00; 0.00; 5.00), $X_{Б2}$=(-1.67; 5.00; 1.67; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 5.00; 0.00; 5.00).
П.3.20.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00;13.00; 1.50), $X_{Б2}$=(13.00; 0.00; 0.00; 1.50), $X_{Б3}$=(25.00;-6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00;-6.00;25.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 6.50; 0.00; 3.13).
П.3.21.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 0.00; 5.00), $X_{Б2}$=(1.11; 0.56; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 0.00; 5.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 0.00; 5.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 0.00; 0.00; 5.00).
П.3.22.	$X_{Б1}$=(2.25; 0.00; 4.00; 1.75), $X_{Б2}$=(0.00; 2.25;-2.75; 4.00), $X_{Б3}$=(0.92; 1.33; 0.00; 3.08), $X_{Б4}$=(4.00;-1.75; 9.25; 0.00).
П.3.23.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 8.00; 8.00), $X_{Б2}$=(8.00; 0.00; 0.00; 8.00), $X_{Б3}$=(0.00;-8.00; 0.00;24.00), $X_{Б4}$=(12.00; 4.00; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 4.00;12.00; 0.00).
П.3.24.	$X_{Б1}$=(6.50; 0.00; 1.50; 4.00), $X_{Б2}$=(0.00;-8.67;-5.00;-22.0), $X_{Б3}$=(5.50;-1.33; 0.50; 0.00), $X_{Б4}$=(5.00;-2.00; 0.00;-2.00).
П.3.25.	$X_{Б1}$=(0.00; 5.00;-1.00; 4.00), $X_{Б2}$=(1.33; 7.67;-2.33; 0.00), $X_{Б3}$=(-1.00; 3.00; 0.00; 7.00), $X_{Б4}$=(-2.50; 0.00; 1.50;11.50).
П.3.26.	$X_{Б1}$=(0.00; 1.76; 0.32; 7.00), $X_{Б2}$=(7.00; 1.76; 0.32; 0.00).
П.3.27.	$X_{Б1}$=(0.00; 5.00; 4.00; 3.00), $X_{Б2}$=(-2.50; 0.00; 4.00; 0.50), $X_{Б3}$=(-3.00;-1.00; 4.00; 0.00).
П.3.28.	$X_{Б1}$=(0.00;-8.00; 4.00; 7.00), $X_{Б2}$=(2.00; 0.00; 0.00;-1.00), $X_{Б3}$=(2.00; 0.00; 0.00;-1.00), $X_{Б4}$=(1.75;-1.00; 0.50; 0.00).
П.3.29.	$X_{Б1}$=(9.00; 7.00; 0.00;-3.00), $X_{Б2}$=(16.00; 0.00; 7.00;-6.50), $X_{Б3}$=(3.00;13.00;-6.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00;16.00;-9.00; 1.50).
П.3.30.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00;-1.00; 2.00), $X_{Б2}$=(-3.00; 1.00; 0.00; 6.00), $X_{Б3}$=(1.50;-0.50;-1.50; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 0.00;-1.00; 2.00).
П.3.31.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 2.25; 1.25), $X_{Б2}$=(2.25; 0.00; 0.00; 1.25), $X_{Б3}$=(0.00;-0.32; 0.00; 1.57), $X_{Б4}$=(11.00; 1.25; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 1.25;11.00; 0.00).
П.3.32.	$X_{Б1}$=(0.00;-6.00; 5.00;12.00), $X_{Б2}$=(1.25;-3.50; 0.00; 9.50), $X_{Б3}$=(6.00; 6.00;-19.00; 0.0), $X_{Б4}$=(3.00; 0.00;-7.00; 6.00).
П.3.33.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 0.00; 4.00), $X_{Б2}$=(4.00;-6.00; 2.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 0.00; 0.00; 4.00), $X_{Б4}$=(0.00; 0.00; 0.00; 4.00).

П.3.34.	$X_{Б1}$=(8.00; 4.00; 0.00; 1.50), $X_{Б2}$=(0.00; 9.33; 2.67;-1.17), $X_{Б3}$=(3.50; 7.00; 1.50; 0.00), $X_{Б4}$=(14.00; 0.00;-2.00; 3.50).
П.3.35.	$X_{Б1}$=(0.00; 7.00;-16.00; 8.0), $X_{Б2}$=(-3.50; 0.00; 5.00; 1.00), $X_{Б3}$=(-4.00;-1.00; 8.00; 0.00), $X_{Б4}$=(-2.67; 1.67; 0.00; 2.67).
П.3.36.	$X_{Б1}$=(0.00; 2.14; 5.00; 0.29), $X_{Б2}$=(5.00; 2.14; 0.00; 0.29).
П.3.37.	$X_{Б1}$=(0.00; 2.18; 0.00; 0.45), $X_{Б2}$=(0.00; 2.18; 0.00; 0.45).
П.3.38.	$X_{Б1}$=(0.00; 8.00; 6.00; 2.00), $X_{Б2}$=(4.00; 4.00;-6.00; 0.00), $X_{Б3}$=(8.00; 0.00;-18.00;-2.0), $X_{Б4}$=(2.00; 6.00; 0.00; 1.00).
П.3.39.	$X_{Б1}$=(7.00; 0.00; 0.00; 8.00), $X_{Б2}$=(-1.00; 8.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(23.00; 0.00;-8.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 7.67;-0.33; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 7.00; 0.00; 1.00), $X_{Б6}$=(0.00; 0.00; 3.50;11.50).
П.3.40.	$X_{Б1}$=(5.00; 0.00;11.00; 3.00), $X_{Б2}$=(-9.67; 7.33; 0.00;-8.00), $X_{Б3}$=(1.00; 2.00; 8.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 2.50; 7.25;-0.75).
П.3.41.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 0.00; 5.00), $X_{Б2}$=(0.00; 0.00; 0.00; 5.00), $X_{Б3}$=(0.00; 5.00; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 5.00; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(1.67; 0.00; 1.67; 0.00).
П.3.42.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 0.00; 6.00), $X_{Б2}$=(0.00; 0.00; 0.00; 6.00), $X_{Б3}$=(3.00; 0.00; 3.00; 0.00).
П.3.43.	$X_{Б1}$=(0.00; 5.00;-1.25; 4.25), $X_{Б2}$=(-1.67; 3.33; 0.00; 3.00), $X_{Б3}$=(-5.00; 0.00; 2.50; 0.50), $X_{Б4}$=(-5.67;-0.67; 3.00; 0.00).
П.3.44.	$X_{Б1}$=(8.00; 6.00; 0.00;-6.00), $X_{Б2}$=(6.50; 0.00; 1.50;-4.50), $X_{Б3}$=(2.00;-18.00; 6.00; 0.0), $X_{Б4}$=(0.00;-26.00; 8.00; 2.0).
П.3.45.	$X_{Б1}$=(0.00; 6.00; 7.00; 0.00), $X_{Б2}$=(7.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00;-8.00; 0.00; 3.50), $X_{Б4}$=(4.00; 0.00; 0.00; 1.50), $X_{Б5}$=(0.00; 0.00; 4.00; 1.50).
П.3.46.	$X_{Б1}$=(6.00; 0.00; 6.00; 0.00), $X_{Б2}$=(-2.00; 2.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 1.50; 1.50; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 0.00;-3.00; 3.00), $X_{Б5}$=(2.00; 0.00; 0.00; 2.00), $X_{Б6}$=(0.00; 1.00; 0.00; 1.00).
П.3.47.	$X_{Б1}$=(0.00; 4.00; 5.00; 7.00), $X_{Б2}$=(-4.00; 0.00; 5.00;23.00), $X_{Б3}$=(1.75; 5.75; 5.00; 0.00).
П.3.48.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 1.25;-3.75), $X_{Б2}$=(15.00; 0.00;-10.00; 0.0), $X_{Б3}$=(0.00;-3.75; 1.25; 0.00), $X_{Б4}$=(1.67;-3.33; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(1.67; 0.00; 0.00;-3.33).
П.3.49.	$X_{Б1}$=(7.00;24.00; 0.00; 8.00), $X_{Б2}$=(15.00; 0.00;-2.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00;45.00; 1.75;15.00), $X_{Б4}$=(15.00; 0.00;-2.00; 0.00).
П.3.50.	$X_{Б1}$=(0.00; 4.00; 2.75;-1.25), $X_{Б2}$=(-2.75; 6.75; 0.00;-4.00), $X_{Б3}$=(1.25; 2.75; 4.00; 0.00), $X_{Б4}$=(4.00; 0.00; 6.75; 2.75).
П.3.51.	$X_{Б1}$=(10.50; 2.00; 0.00; 2.50), $X_{Б2}$=(9.00; 0.00; 1.00; 1.00), $X_{Б3}$=(8.00;-1.33; 1.67; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00;-12.00; 7.00;-8.0).
П.3.52.	$X_{Б1}$=(0.00;10.00; 8.00; 8.00), $X_{Б2}$=(2.67;12.67;10.67; 0.00), $X_{Б3}$=(-10.00; 0.00;-2.00;38.0), $X_{Б4}$=(-8.00; 2.00; 0.00;32.00).
П.3.53.	$X_{Б1}$=(4.00;-7.00; 0.00; 1.75), $X_{Б2}$=(-10.00; 0.00; 3.50; 0.0), $X_{Б3}$=(0.00;-5.00; 1.00; 1.25), $X_{Б4}$=(-10.00; 0.00; 3.50; 0.0).
П.3.54.	$X_{Б1}$=(-7.00; 6.00; 0.00; 3.00), $X_{Б2}$=(0.00; 2.50; 0.88; 1.25), $X_{Б3}$=(5.00; 0.00; 1.50; 0.00), $X_{Б4}$=(5.00; 0.00; 1.50; 0.00).
П.3.55.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00;29.00;-8.00), $X_{Б2}$=(29.00; 0.00; 0.00;-8.00), $X_{Б3}$=(0.00; 4.83; 0.00;-3.17), $X_{Б4}$=(-19.00; 8.00; 0.00; 0.0), $X_{Б5}$=(0.00; 8.00;-19.00; 0.0).
П.3.56.	$X_{Б1}$=(3.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б2}$=(3.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 5.00; 1.00;-1.00), $X_{Б4}$=(-15.00; 0.00; 6.00;-6.0).
П.3.57.	$X_{Б1}$=(8.00; 7.00; 4.00; 0.00), $X_{Б2}$=(0.00; 7.00;-4.00; 8.00), $X_{Б3}$=(4.00; 7.00; 0.00; 4.00).
П.3.58.	$X_{Б1}$=(7.00; 7.00; 0.00; 0.00), $X_{Б2}$=(7.00; 0.00; 7.00;-7.00), $X_{Б3}$=(7.00; 7.00; 0.00; 0.00).
П.3.59.	$X_{Б1}$=(4.00; 2.00; 0.00; 0.00), $X_{Б2}$=(4.00; 2.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 2.00;-1.00; 4.00).
П.3.60.	$X_{Б1}$=(0.00; 2.00; 9.00; 7.00), $X_{Б2}$=(9.00;-2.50; 0.00;-20.0), $X_{Б3}$=(2.33; 0.83; 6.67; 0.00), $X_{Б4}$=(4.00; 0.00; 5.00;-5.00).
П.3.61.	$X_{Б1}$=(0.00; 3.46; 2.62; 5.00), $X_{Б2}$=(5.00; 3.46; 2.62; 0.00).
П.3.62.	$X_{Б1}$=(-5.00; 5.00; 0.00; 3.00), $X_{Б2}$=(-35.00; 0.00;-5.00;13.0), $X_{Б3}$=(4.00; 6.50; 1.50; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 5.83; 0.83; 1.33).
П.3.63.	$X_{Б1}$=(4.00; 3.00; 0.00; 3.00), $X_{Б2}$=(0.00;-1.00; 2.00;-1.00), $X_{Б3}$=(1.00; 0.00; 1.50; 0.00), $X_{Б4}$=(1.00; 0.00; 1.50; 0.00).

П.3.64.	$X_{Б1}$=(4.00; 1.00; 0.00; 6.00), $X_{Б2}$=(16.00; 7.00;-6.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00;-1.00; 2.00; 8.00), $X_{Б4}$=(2.00; 0.00; 1.00; 7.00).
П.3.65.	$X_{Б1}$=(0.00;16.00; 4.00; 6.00), $X_{Б2}$=(1.50; 4.00; 5.50; 0.00), $X_{Б3}$=(2.00; 0.00; 6.00;-2.00), $X_{Б4}$=(-4.00;48.00; 0.00;22.00).
П.3.66.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 0.86; 0.86), $X_{Б2}$=(12.00; 0.00; 6.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00;-2.40; 1.20; 0.00), $X_{Б4}$=(-3.00;-3.00; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(-2.00; 0.00; 0.00; 1.00), $X_{Б6}$=(0.00; 6.00; 0.00; 3.00).
П.3.67.	$X_{Б1}$=(0.00;29.00; 8.00; 6.00), $X_{Б2}$=(8.00;-67.00; 0.00;-18.0), $X_{Б3}$=(2.00; 5.00; 6.00; 0.00), $X_{Б4}$=(2.42; 0.00; 5.58;-1.25).
П.3.68.	$X_{Б1}$=(5.25; 6.00; 0.00; 1.75), $X_{Б2}$=(7.00;-8.00;-3.50; 0.00), $X_{Б3}$=(6.00; 0.00;-1.50; 1.00), $X_{Б4}$=(0.00;48.00;10.50; 7.00).
П.3.69.	$X_{Б1}$=(0.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б2}$=(0.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(3.00; 0.00;-12.00; 2.0), $X_{Б4}$=(0.00; 6.00; 0.00; 0.00).
П.3.70.	$X_{Б1}$=(7.00; 0.00; 1.00; 1.00), $X_{Б2}$=(11.00;-2.00; 0.00; 5.00), $X_{Б3}$=(0.00; 3.50; 2.75;-6.00), $X_{Б4}$=(6.00; 0.50; 1.25; 0.00).
П.3.71.	$X_{Б1}$=(6.00; 5.00; 5.00; 0.00), $X_{Б2}$=(11.00; 5.00; 0.00; 1.25), $X_{Б3}$=(0.00; 5.00;11.00;-1.50).
П.3.72.	$X_{Б1}$=(2.00; 0.00;-1.00; 3.00), $X_{Б2}$=(4.00;-1.00; 0.00; 5.00), $X_{Б3}$=(0.00; 1.00;-2.00; 1.00), $X_{Б4}$=(-1.00; 1.50;-2.50; 0.00).
П.3.73.	$X_{Б1}$=(0.00; 4.00; 0.00; 0.00), $X_{Б2}$=(0.00; 4.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 4.00; 0.00; 0.00).
П.3.74.	$X_{Б1}$=(12.00; 0.00; 0.00;-3.00), $X_{Б2}$=(0.00; 2.00; 0.00;-1.00), $X_{Б3}$=(-6.00; 3.00; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(12.00; 0.00;-3.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 2.00;-1.00; 0.00).
П.3.75.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 0.00; 4.00), $X_{Б2}$=(0.00; 4.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(-3.00; 0.00; 1.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 4.00; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 0.00; 0.00; 4.00).
П.3.76.	$X_{Б1}$=(2.00; 0.00; 0.00; 2.00), $X_{Б2}$=(0.00; 1.00;-1.00; 0.00), $X_{Б3}$=(2.00; 0.00; 0.00; 2.00), $X_{Б4}$=(0.00; 1.00;-1.00; 0.00).
П.3.77.	$X_{Б1}$=(0.00; 3.00; 0.00;-3.00), $X_{Б2}$=(-2.00; 0.00; 0.00; 1.00), $X_{Б3}$=(-1.50; 0.75; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 3.00;-3.00; 0.00), $X_{Б5}$=(-2.00; 0.00; 1.00; 0.00).
П.3.78.	$X_{Б1}$=(3.00; 6.00; 0.00; 7.00), $X_{Б2}$=(3.00; 2.50; 3.50; 0.00), $X_{Б3}$=(3.00; 0.00; 6.00;-5.00).
П.3.79.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 2.00;-4.00), $X_{Б2}$=(-4.00; 0.00; 2.00; 0.00), $X_{Б3}$=(1.00; 1.00; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 0.80; 0.40; 0.00), $X_{Б5}$=(0.00; 1.00; 0.00; 1.00).
П.3.80.	$X_{Б1}$=(5.00; 4.00; 0.00; 1.00), $X_{Б2}$=(-3.00; 0.00; 4.00; 0.00), $X_{Б3}$=(-3.00; 0.00; 4.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 1.50; 2.50; 0.38).
П.3.81.	$X_{Б1}$=(0.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б2}$=(0.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 6.00; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(-6.00; 0.00; 6.00;-6.00).
П.3.82.	$X_{Б1}$=(1.00; 0.00; 7.00; 2.00), $X_{Б2}$=(-3.67;-2.33; 0.00; 4.33), $X_{Б3}$=(5.00; 2.00;13.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00;-0.50; 5.50; 2.50).
П.3.83.	$X_{Б1}$=(0.00; 5.00; 0.00; 5.00), $X_{Б2}$=(2.50; 0.00;-2.50;15.00), $X_{Б3}$=(0.00; 5.00; 0.00; 5.00), $X_{Б4}$=(-1.25; 7.50; 1.25; 0.00).
П.3.84.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 4.00; 7.00), $X_{Б2}$=(0.00; 2.33;13.33; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00;-1.00; 0.00;10.00).
П.3.85.	$X_{Б1}$=(0.00;-9.00; 5.00; 3.50), $X_{Б2}$=(4.50; 0.00;-8.50; 1.25), $X_{Б3}$=(7.00; 5.00;-16.00; 0.0), $X_{Б4}$=(1.67;-5.67; 0.00; 2.67).
П.3.86.	$X_{Б1}$=(0.00; 6.00; 3.50;-2.50), $X_{Б2}$=(-3.50;16.50; 0.00; 8.00), $X_{Б3}$=(-0.83; 8.50; 2.67; 0.00), $X_{Б4}$=(2.00; 0.00; 5.50;-8.50).
П.3.87.	$X_{Б1}$=(0.00;24.00; 8.00; 5.00), $X_{Б2}$=(-3.00; 0.00;-4.00;-1.00), $X_{Б3}$=(-2.50; 4.00;-2.00; 0.00), $X_{Б4}$=(-2.00; 8.00; 0.00; 1.00).
П.3.88.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 4.00; 6.00), $X_{Б2}$=(-1.50; 0.00; 2.50; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 6.00;-2.00; 0.00), $X_{Б4}$=(-0.67; 3.33; 0.00; 0.00), $X_{Б5}$=(-4.00; 0.00; 0.00;-10.0), $X_{Б6}$=(0.00; 4.00; 0.00; 2.00).
П.3.89.	$X_{Б1}$=(0.00; 1.00;11.00; 8.00), $X_{Б2}$=(1.00; 0.00; 8.00; 6.00), $X_{Б3}$=(3.67;-2.67; 0.00; 0.67), $X_{Б4}$=(4.00;-3.00;-1.00; 0.00).
П.3.90.	$X_{Б1}$=(7.00; 5.00; 4.00; 0.00), $X_{Б2}$=(0.00; 5.00;-3.00;-1.75), $X_{Б3}$=(3.00; 5.00; 0.00;-1.00).
П.3.91.	$X_{Б1}$=(0.00; 3.00; 1.75;13.00), $X_{Б2}$=(3.25;-0.25;-1.50; 0.00), $X_{Б3}$=(1.75; 1.25; 0.00; 6.00), $X_{Б4}$=(3.00; 0.00;-1.25; 1.00).
П.3.92.	$X_{Б1}$=(4.00; 0.00; 4.00; 0.00), $X_{Б2}$=(0.00; 1.00; 2.00; 0.00),

	$X_{Б3}$=(-4.00; 2.00; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(9.33; 0.00; 0.00; 1.33), $X_{Б5}$=(0.00; 1.40; 0.00; 0.40), $X_{Б6}$=(0.00; 0.00; 7.00;-1.00).
П.3.93.	$X_{Б1}$=(0.00;-1.50; 6.00; 2.50), $X_{Б2}$=(1.50; 0.00;12.00; 4.00), $X_{Б3}$=(-2.50;-4.00;-4.00; 0.00), $X_{Б4}$=(-1.50;-3.00; 0.00; 1.00).
П.3.94.	$X_{Б1}$=(0.00;-1.25;10.00; 8.00), $X_{Б2}$=(8.00;-1.25;10.00; 0.00).
П.3.95.	$X_{Б1}$=(-12.00; 0.00; 0.00;-6.0), $X_{Б2}$=(6.00; 1.50; 1.50; 0.00), $X_{Б3}$=(0.00; 1.00; 1.00;-2.00), $X_{Б4}$=(-12.00; 0.00; 0.00;-6.0).
П.3.96.	$X_{Б1}$=(5.00; 0.00;-6.00;-7.00), $X_{Б2}$=(4.25; 0.75; 0.00;-4.00), $X_{Б3}$=(3.25; 1.75; 8.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00; 5.00;34.00;13.00).
П.3.97.	$X_{Б1}$=(5.00; 0.00; 4.00; 5.00), $X_{Б2}$=(0.00; 5.00; 4.00;10.00), $X_{Б3}$=(10.00;-5.00; 4.00; 0.00).
П.3.98.	$X_{Б1}$=(0.00; 6.00;-3.00; 6.00), $X_{Б2}$=(-6.00; 0.00; 3.00;12.00), $X_{Б3}$=(-3.00; 3.00; 0.00; 9.00), $X_{Б4}$=(6.00;12.00;-9.00; 0.00).
П.3.99.	$X_{Б1}$=(4.00; 4.00; 4.00; 0.00), $X_{Б2}$=(2.67; 0.00; 4.00; 1.33), $X_{Б3}$=(0.00;-8.00; 4.00; 4.00).
П.3.00.	$X_{Б1}$=(0.00; 0.00; 8.67; 3.67), $X_{Б2}$=(2.75; 0.00; 2.25; 0.00), $X_{Б3}$=(2.75;-0.56; 0.00; 0.00), $X_{Б4}$=(0.00;-2.17; 0.00; 3.67), $X_{Б5}$=(3.71; 0.00; 0.00;-1.29).

Список рекомендуемой литературы для изучения курса

1. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование./Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В – М.: Высш. шк., 1980. – 350 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
3. Решение задач математического программирования (курс лекций для студентов экономических специальностей) / Христиановский В.В., Ерин В.Г., Ткаченко О. В. – Донецк: ДонГУ, 1992. –254 с.
4. Методические указания и задачи по математическому программированию (для студентов экономических специальностей) / Христиановский В.В., Ерин В.Г., Ткаченко О. В. – Донецк: ДонГУ, 1990. –154 с.
5. Ходыкин В.Ф. Математическое программирование: Тексты лекций. – донецк: ДонНу, 2000. – 76 с.
6. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.
7. Матряшин И.П. Математическое программирование./Матряшин И.П., Макеева В.К. – М.: Высш. шк., 1978. – 160 с.
8. Линейное и нелинейное программирование. / Под. Ред. И.Н. Ляшенко. –Киев: Вища шк., 1975. – 372 с.
9. Полунин И.В. Курс математического программирования. – Минск: Вышэйш.. шк., 1970. – 320 с.
10. Ермольев Ю.М. Математические методы исследования операций: Учеб. пособие для вузов./Ермольев Ю.М., Ляшенко И.И., Михалевич В.С.– Киев: Вища шк., 1979. – 312 с.
11. Ларионов А.И. Экономико-математические методы в планировании./Ларионов А.И., Юрченко Т.И. – М.: Высш. шк., 1984. – 224 с.

Оглавление