ТЕОРИЯ ИГР

Одним из важнейших математических методов, которые применяются в экономических исследованиях, являются методы принятия управленческих решений в конфликтных ситуациях, которые объединяются под общим названием «Теория игр». Конфликтной ситуацией называется некоторая проблема, в которой участвуют несколько сторон, интересы которых противоположны. Методы теории игр позволяют планировать экономические процессы, оптимально распределять ресурсы, выбирать наилучшие варианты при принятии решений, решать другие задачи оптимизации.

1. Основные понятия. Решение игр в чистых стратегиях

Рассмотрим следующую модель. Некоторый субъект A (предприниматель, организация, совет и др.) желает принять решение, на результат которого влияет другой субъект B, цели которого противоположны A. При этом B анализирует все возможные варианты A и принимает такое решение, которое приводит к наименьшему выигрышу A (соответственно максимальному своему выигрышу). Примерами таких ситуаций служат отношения между продавцом и покупателем, адвокатом и прокурором, кредитором и дебитором, истцом и ответчиком и т.д. Подобные ситуации называются ***конфликтными***. Математические методы анализа конфликтных ситуаций объединяются под названием ***теории игр***, сама конфликтная ситуация носит название ***игры***, а стороны, участвующие в конфликте, называются ***игроками***. Если в игре участвуют только две стороны, то игра называется ***парной***. Исход игры называется ***выигрышем*** (или ***проигрышем***) игроков. Если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, то игра называется ***антагонистической***. Пусть игрок A может выбрать в качестве действий одну из n альтернатив: A_1, A_2,…, A_n. Эти альтернативы в теории игр принято называть ***стратегиями***. Аналогично, игрок B может принять одну из m стратегий B_1, B_2,…, B_m. Предположим, что известны выигрыши (проигрыши) игрока A при любой выбранной им стратегии A_i и любом ответе ему игроком B – стратегии B_j. Пусть этот результат выражен числом a_{ij} (которое может быть и отрицательным в случае проигрыша A). Величины a_{ij} образуют матрицу:

A_i B_j	B_1	B_2	…	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{21}	…	a_{2m}
…			…	
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Эта матрица называется ***платежной*** или ***матрицей игры***.

Рассмотрим игру со стороны A. Он, выбирая свою стратегию A_i, понимает, что B ответит ему такой стратегией B_j, чтобы выигрыш A был минимальным. Поэтому, из всех наихудших вариантов (минимальных элементов каждой строки платежной матрицы) $\alpha_i = \min_j(a_{ij})$, игроку A выгодно выбрать стратегию, соответствующую максимальному из этих элементов:

$$\alpha = \max_i(\alpha_i) = \max_i \min_j(a_{ij}).$$

Величина α называется ***нижней ценой игры*** или ***максимином***. Это гарантированный выигрыш игрока A. С другой стороны, игрок B выбирая свою стратегию B_j понимает, что игрок A ответит такой стратегией A_i, чтобы его выигрыш был максимален. Поэтому из наилучших вариантов для A (максимальных элементов каждого столбца) $\beta_j = \max_i(a_{ij})$ игроку В рационально выбрать свою стратегию, соответствующую минимальному из этих чисел:

$$\beta = \min_j(\beta_j) = \min_j \max_i(a_{ij}).$$

Величина β называется ***верхней ценой игры*** или ***минимаксом***. Это максимальный проигрыш игрока B. Реальный результат решения конфликтной ситуации, называемый ***ценой игры*** ν, заключен между верхней и нижней ценой: $\alpha \le \nu \le \beta$. В случае, если верхняя и нижняя цены совпадают $\alpha = \beta = \nu$, то игра имеет ***решение в чистых стратегиях***, то есть можно точно определить стратегии (A_i, B_j), которые выгодны для обоих сторон. Если одна сторона отойдет от своей оптимальной стратегии, то ее выигрыш от этого только уменьшится.

Пример 1. Дебитор A желает выбрать один из четырех условий займа: A_1, A_2, A_3, A_4. Кредитор может на любой вариант займа ответить вариантом предоставления кредита B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Процентные ставки для дебитора при любом варианте кредитора представлены платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	1	8	7	4
A_2	4	3	2	6	5
A_3	3	7	6	9	8
A_4	2	6	7	8	3

Находим минимальные элементы каждой строки платежной матрицы α_I и из них находим максимальное значение. Из максимальных элементов каждого столбца β_j выбираем минимальный.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	6	1	8	4	4	*1*
A_2	9	6	7	$\boxed{5}$	8	$\boxed{5}$
A_3	3	7	6	2	8	*2*
A_4	2	6	7	3	3	*2*
β_j	*9*	*7*	*8*	$\boxed{5}$	*8*	

Видно, что верхние и нижние цены игры совпадают $\alpha = \beta = \nu = 5$, следовательно для обоих игроков выгодны стратегии (A_2, B_4) и процентная ставка, равная 5. При принятии игроками иной стратегии, отличной от оптимальной, этот игрок только проиграет.

2. Решение игр в смешанных стратегиях

Рассмотрим теперь ситуацию, когда верхняя и нижняя цены не совпадают $\alpha \neq \beta$. В этом случае игра решается в ***смешанных стратегиях***. Смешанный стратегии предполагают, что каждый игрок будет выбирать случайно из возможно допустимых чистых стратегий (но выбирать их с вероятностями), либо частично реализовывать чистые стратегии в заданных пропорциях. Нахождение этих вероятностей (или пропорций) и является решением игры. Таким образом, в общем виде, решением игры являются смешанные стратегии $\begin{pmatrix} A_1\ A_2 \ldots A_n \\ p_1\ p_2 \ldots p_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_1\ B_2 \ldots B_m \\ q_1\ q_2 \ldots q_m \end{pmatrix}$, где p_i и q_j - вероятности чистых или доли чистых стратегий A_i *и* B_j в смешанной.

Рассмотрим сначала простейший случай игры, решаемой в смешанных стратегиях – игру 2х2, когда у каждого игрока имеется лишь по две стратегии. Платежная матрица такой игры есть:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Решение игры $\begin{pmatrix} A_1\ A_2 \\ p_1\ p_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_1\ B_2 \\ q_1\ q_2 \end{pmatrix}$, где $p_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$, $p_2 = 1 - p_1$, $q_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$, $q_2 = 1 - q_1$. Цена игры равна

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}.$$

Пример 2. Игрок *A* прячет в одной из рук монету. Игрок *B* пытается угадать руку с монетой. Если *B* не угадывает, то *A* получает от *B* 1 у.е. Если *B* угадывает руку с монетой и эта рука правая, то он получает от *A* 1 у.е. Если *B* находит монету в левой руке, то он получает от *A* 2 у.е. Определить оптимальные стратегии поведения для каждого игрока и средний выигрыш для *A*.

Пусть стратегии игроков: A_1 – спрятать в правой; B_1 – искать в правой; A_2 – спрятать в левой; B_2 – искать в левой. Игровая матрица для данной ситуации относительно игрока А имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-2

Тогда вероятности чистых стратегий в смешанной равны:

$$p_1=\frac{-2-1}{-1-2-1-1}=\frac{3}{5},\qquad p_2=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5},\qquad q_1=\frac{-2-1}{-1-2-1-1}=\frac{3}{5},$$

$q_2=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$. Цена игры равна $\nu=\dfrac{(-1)\cdot(-2)-1\cdot 1}{-1-2-1-1}=-\dfrac{1}{5}$.

Таким образом, игроку *A* нужно случайно чередовать руки с монетой, но в правой руке прятать в среднем в трех случаях из пяти, а в левой в двух случаях из пяти. В это случае в каждой игре в среднем *A* получит (-1/5) руб., то есть теряет 20 коп., игра для *A* не выгодная. Для игрока В выгодно также чередовать руки в которых он ищет монету, но в правой руке искать в 3 случаях из 5, что приведет к среднему выигрышу для него в 20 коп. за игру.

В данном примере виден смысл величин p_1, p_2 и q_1, q_2. Это – вероятности выбора чистых стратегий в смешанной (вероятности выбрать руку в общей стратегии поведения). Однако, данные показатели могут иметь смысл доли реализации чистых стратегий в смешанной. Рассмотрим это на примере.

Пример 3. Торговая организация *A* выделяет 1 млн. руб. на закупку товара на реализацию. Имеется выбор между закупкой товаров $Т_1$ или $Т_2$. Ожидаемая прибыль зависит от того, какой товар $Т_1$ или $Т_2$ будет закупать конкурент *B*. Если оба будут закупать $Т_1$, то ввиду конкуренции *A* понесет убытки в 200 тыс. руб. Если оба будут закупать $Т_2$, то по той же причине *A* понесет убытки в 100 тыс. руб. Если *A* закупит $Т_1$ а *B* закупит $Т_2$, то прибыль *A* составит 900 тыс. руб. Если *A* закупит $Т_2$ а *B* закупит $Т_1$, то прибыль *A* составит 700 тыс. руб. Как лучше поступить игрокам при оптимальном поведении?

Обозначим стратегии игроков:

$А_1$ – компания *A* закупает товар $Т_1$,

$А_2$ – компания *A* закупает товар $Т_2$,

B_1 – компания *B* закупает товар T_1,

B_2 – компания *B* закупает товар T_2.

Платежная матрица имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	-200	900
A_2	700	-100

Тогда вероятности чистых стратегий в смешанной равны:

$$p_1 = \frac{-100-700}{-200-100-700-900} = \frac{8}{19},\ p_2 = 1-\frac{8}{19} = \frac{11}{19},$$

$$q_1 = \frac{-100-900}{-200-100-700-900} = \frac{10}{19},\ q_2 = 1-\frac{10}{19} = \frac{9}{10}.$$

Цена игры равна $\nu = \dfrac{(-200)\cdot(-100)-900\cdot 700}{-200-100-700-900} = 226{,}316$.

Следовательно, игроку выгодно реализовать обе стратегии A_1 и A_1 в долях 8/19=0,421 и 11/19=0,579, то есть закупить и товар T_1, и T_2. При этом T_1 должен быть закуплен на сумму 421 тыс. руб., а T_2 на сумму 579 тыс. руб. Прибыль, не зависимо от поведения соперника, составит 226316 руб. То же можно сказать и для игрока *B* (если, конечно, игра антагонистическая и выигрыш А это проигрыш В): закупать оба товара, первого на сумму 10/19 от запланированной, а второго на сумму 9/19.

В некоторых случаях удается аналогичным образом решить и игровые ситуации с платежными матрицами, большего размера, упростив их до игры 2х2. При этом используются следующие правила:

1) Если все элементы какой-либо строки платежной матрицы не превышают соответствующих элементов любой другой строки, то строка с меньшими элементами соответствует стратегии, которая для игрока *A* заведомо не выгодна при любом ответе игрока *B*. Поэтому из платежной матицы строку с меньшими элементами можно вычеркнуть, тем самым выведя из рассмотрения соответствующую ей стратегию.

2) С другой стороны, для игрока В невыгодна заранее, независимо от ответа А, стратегия, которой соответствует столбец платежной матрицы, у которого все элементы больше или равны соответствующим элементам любого другого столбца. Столбец с большими элементами также можно вывести из рассмотрения, вычеркнув из платежной матрицы.

Пример 3. Директор транспортной компании *A*, оказывающей транспортные услуги по перевозке пассажиров в областном центре, планирует открыть один или несколько маршрутов: A_1, A_2, A_3 и A_4. Для этого было закуплено 100 микроавтобусов. Он может поставить весь транспорт на одном из маршрутов (наиболее выгодном), либо распределить по нескольким маршрутам. Спрос на транспорт, а соответственно и прибыль компании во многом зависит от того, какие маршруты в ближайшее время откроет главный конкурент - компания *B*. Ее руководство полностью владеет ситуацией и может открыть несколько из пяти маршрутов B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. Оценки прибыли компании *A* (млн. руб.) при любом ответе *B* представлена платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	4	6	9
A_2	6	5	3	4	8
A_3	7	6	6	7	5
A_4	6	7	5	4	3

Находим оптимальное распределение прибыли по маршрутам и ожидаемую прибыль.

Вычеркиваем из таблицы второй столбец, т.к. все его элементы больше или равны элементам третьего. Вычеркиваем четвертую строку, т.к. ее оставшиеся элементы меньше элементов третьей. Элементы первого столбца больше элементов третьего, вычеркиваем первый столбец. Вторую строку вычеркиваем в результате сравнения с первой. Четвертый столбец вычеркиваем после сравнения с третьим. В результате получаем матрицу:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	~~5~~	~~6~~	4	~~6~~	9
A_2	~~6~~	~~5~~	~~3~~	~~4~~	~~8~~
A_3	~~7~~	~~6~~	6	~~7~~	5
A_4	~~6~~	~~7~~	~~5~~	~~4~~	~~3~~

которая эквивалентна матрице:

A_i \ B_j	B_3	B_5
A_1	4	9
A_3	6	5

Тогда вероятности чистых стратегий компании *A* в смешанной $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}$ равны: $p_1 = \dfrac{5-6}{4+5-6-9} = \dfrac{1}{6}$, $p_3 = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$. Цена игры равна $\nu = \dfrac{4 \cdot 5 - 9 \cdot 6}{4+5-6-9} = \dfrac{34}{6} \approx 5{,}67$. Следовательно, 1/6 часть автопарка (17 машин) нужно направить на маршрут A_1, а остальные 5/6 парка (83 машины) на маршрут A_3. Маршруты A_2 и A_4 использовать не рационально. При этом прибыль, не зависимо от ответа компании B будет составлять 34/6 млн. руб.

3. Приведение матричных игр к задаче линейного программирования и решение их на ЭВМ

Рассмотрим случай, когда платежную матрицу нельзя упростить до размера 2x2. Пусть упрощенная платежная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & . \; . \; . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$. Тогда для нахождения вероятностей p_i и q_j смешанных стратегий $\begin{pmatrix} A_1\ A_2 \dots A_n \\ p_1\ p_2 \dots p_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_1\ B_2 \dots B_m \\ q_1\ q_2 \dots q_m \end{pmatrix}$, необходимо решать прямую и двойственную задачи линейного программирования вида:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \ge 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n \ge 1; \\ \quad . \; . \; . \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n \ge 1; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0; \; i = 1,2,\ldots,n.$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m \le 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m \le 1; \\ \quad . \; . \; . \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \le 1 \end{cases}$$

$$y_j \ge 0; \; j = 1,2,\ldots,m.$$

Из решения задач линейного программирования находятся цена игры $\nu = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \dfrac{1}{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}$ и вероятности состояний $p_i = x_i\nu, \;\; q_j = y_j\nu$.

Пример 5. Построить прямую и двойственную задачи линейного программирования для решения матричной игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Прямая и двойственная задачи линейного программирования имеют вид:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \to \min;$$
$$\begin{cases} 9x_1+2x_2+6x_3+5x_4+3x_5 \ge 1; \\ 3x_1+5x_2+7x_3+2x_4+8x_5 \ge 1; \\ 6x_1+8x_2+2x_3+3x_4+x_5 \ge 1; \\ 5x_1+3x_2+4x_3+6x_4+7x_5 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i=1,2,3,4,5.$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 9y_1+3y_2+6y_3+5y_4 \le 1; \\ 2y_1+5y_2+8y_3+3y_4 \le 1; \\ 6y_1+7y_2+2y_3+4y_4 \le 1; \\ 5y_1+2y_2+3y_3+6y_4 \le 1; \\ 3y_1+8y_2+y_3+7y_4 \le 1; \end{cases}$$
$$y_j \ge 0;\ j=1,2,3,4.$$

Из решения можно найти игры цену игры $\nu = \dfrac{1}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5} = \dfrac{1}{y_1+y_2+y_3+y_4}$ и вероятности состояний $p_i = x_i\nu,\ (i=1,2,3,4,5);\ q_j = y_j\nu,\ (j=1,2,3,4)$.

Известно, что решение задач линейного программирования связано с громоздкими вычислениями. Однако эти задачи легко решаются на ЭВМ. Для численного решения этих задач можно использовать надстройку пакета прикладных программ MS Excel «Поиск решения», которая входит в MS Office. Нак это делать на практике – рассмотрим на примере.

Пример 6. В регионе две конкурирующие фирмы по производству обуви: фирма А и фирма В. Фирма А может производить в будущем году 4 новых модели обуви: A_1, A_2, A_3 и A_4. Конкурент В также может производить 4 новые модели: B_1, B_2, B_3, B_4. Так как обувь аналогичная, то спрос и соответственно прибыль каждой фирмы от производства каждой модели зависит от того, что производит конкурент. Оценки прибыли фирмы А (которые, ввиду конкуренции, пропорциональны убыткам фирмы В) приведены в таблице (тыс. р.):

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70	30	20	50
A_2	60	50	40	80
A_3	20	60	80	60
A_4	50	70	30	50

Как рациональнее всего поступить каждой фирме, чтоб получить наибольшую прибыль?

Построим задачу линейного программирования. Рассмотрим задачу со стороны фирмы А. Введем параметры, пропорциональные вероятностям чистых стратегий, которые равны x_1, x_2, x_3, x_4. Тогда нужно составить задачу линейного программирования (ЗЛП), то есть необходимо найти минимум функции при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \ge 1; \\ 30x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 70x_4 \ge 1; \\ 20x_1 + 40x_2 + 80x_3 + 30x_4 \ge 1; \\ 50x_1 + 80x_2 + 60x_3 + 50x_4 \ge 1; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0.$$

Для решения полученной задачи линейного программирования необходимо подготовить предварительно в электронной таблице данные. Запускаем программу MS EXCEL. Вводим в открывшуюся электронную таблицу в ячейку A1 (левая верхняя) надпись «Переменные» (здесь и далее кавычки вводить не надо), а в следующие ячейки — произвольные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Это вначале могут быть произвольные числа, например единицы. Вводим в ячейки B1–E1 в каждую цифры 1.

Далее, в ячейку A2 вводим подпись «Целевая» (целевая функция одинаковая для всех задач, зависит только от числа альтернатив для игрока A). Вводим в соседнюю ячейку B2 значение целевой функции (переключившись в английский режим набора текста): «**=B1+C1+D1+E1**», что означает формулу $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, так как значение x_1 хранится в ячейке B1, значение x_2 хранится в ячейке C1 и т. д. В третьей строке вводятся левые части системы ограничений. Для этого переводим курсор в ячейку A3 и вводим в ней текст «Ограничения». Переключившись в английский режим клавиатуры, вводим в ячейку B3 формулу **«=70*B1+60*C1+20*D1+50*E1»**, которая соответствует левой части первого ограничения системы $70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \ge 1$ (здесь переменная x_1 —данные в ячейке B1, переменная x_2 — данные в C1 и т. д.). Три остальных ограничения вводим в ячейки C3–B3, а именно:

в ячейку C3: **«=30*B1+50*C1+60*D1+70*E1»**,
в ячейку D3: **«=20*B1+40*C1+80*D1+30*E1»**,
в ячейку E3: **«=50*B1+80*C1+60*D1+50*E1»**.

После этого вызываем специальную надстройку, которая позволяет решать подобные задачи.

Вызываем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ. Если Вы работаете в «EXCEL 2003» или ранней версии, то заходим в меню СЕРВИС, выбираем НАДСТРОЙКИ и проверяем наличие флажка напротив «Поиск решения», «ОК», заходим вновь в меню СЕРВИС, выбираем

ПОИСК РЕШЕНИЯ. Если Вы работаете в «EXCEL 2007» или более поздней версии, то нажимаем левой кнопкой мыши по круглой кнопке “Office” в верхнем левом углу экрана, внизу выбираем «Параметры EXCEL», слева выбираем НАДСТРОЙКИ, нажимаем кнопку «Перейти» внизу окна и в открывшемся окне проверяем наличие флажка напротив «Поиск решения», «ОК». В меню ДАННЫЕ выбираем ПОИСК РЕШЕНИЯ, открывается окно надстройки. В поле «Установить целевую ячейку» даем ссылку на B2 (ставим в поле курсор и щелкаем мышью по B2). Ниже, в области «Равной», поставить переключатель на минимальное значение. Ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» и даем ссылки на переменные, обводя мышью ячейки B1–E1. Далее, переводим курсор в поле «Ограничения» и вводим ограничения. Для этого нажимаем на кнопку «Добавить» слева от поля и в появившемся окне в поле «Ссылка на ячейку» даем ссылку на ячейку, содержащую левую часть первого ограничения $70x_1+60x_2+20x_3+50x_4\geq 1$, которая хранится в ячейке B3 (то есть переводим курсор в поле «Ссылка на ячейку» и щелкаем мышью по ячейке B3). В центральном поле выбираем знак неравенства — ограничения : «≥», в поле «Ограничение» вводим единицу. Нажимаем «ОК». Вводим второе ограничение, нажимая «Добавить», вводим в поля: ссылку на «C3», «≥», «1», нажимаем «ОК», далее «Добавить», ссылку на «D3», «≥», «1», «ОК», «Добавить», ссылку на «E3», «≥», «1», «ОК». Для ввода дополнительных ограничений $x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ x_3\geq 0;\ x_4\geq 0$ нажимаем «Добавить», в поле «Ссылка на ячейку» ставим курсор и обводим ячейки B1–E1, выводим в центральное поле «≥», ограничение «0», нажимаем «ОК». Далее запускаем программу, нажимая «Выполнить». Результат: $x_1=0,\ x_2=0{,}015,\ x_3=0{,}05,\ x_4=0$, что видно из ячеек B1–E1. Вводим в A5 подпись «Цена игры», а в соседнюю B5 формулу (переключаясь на английский язык) **«=1/(B1+C1+D1+E1)»**. Результат: 50. Это ожидаемая прибыль для фирмы А. Находим вероятности чистых стратегий в смешанной стратегии *p*. Для этого вводим в A6 подпись «P1=«, а в соседнюю B6 формулу **«=B5*B1»**, вводим в A7: **«**P2=**«**, а в B7 формулу **«=B5*C1»**, в A8: **«**P3=«, а в B8: **«=B5*D1»**, в A9: **«**P4=**«**, в B9: **«=B5*E1»**. Данные показатели (0; 0,75; 0,25; 0) и есть решение задачи. То есть фирме А модели A_1 и A_4 выпускать не надо совсем, модель A_2 должна составлять 75 % всего ассортимента, а A_3 — 25 %.

Рассмотрим теперь решение относительно фирмы В.

Для него вводим переменные, пропорциональные вероятностям чистых стратегий y_1, y_2, y_3, y_4. ЗЛП для игрока В имеет вид:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 70y_1 + 30y_2 + 20y_3 + 50y_4 \le 1; \\ 60y_1 + 50y_2 + 40y_3 + 80y_4 \le 1; \\ 20y_1 + 60y_2 + 80y_3 + 60y_4 \le 1; \\ 50y_1 + 70y_2 + 30y_3 + 50y_4 \le 1; \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0; \quad y_2 \ge 0; \quad y_3 \ge 0; \quad y_4 \ge 0.$$

Переходим на «Лист 2» электронной таблицы, щелкнув на соответствующей закладке внизу таблицы. Вводим в ячейки открывшейся чистой электронной таблицы в ячейку A1 надпись «Переменные», а в следующие ячейки, произвольные значения переменных, например, вводим в ячейки B1–E1 в каждую цифры 1. В ячейку A2 вводим подпись «Целевая». Вводим в ячейку B2 значение целевой функции (переключившись в английский режим набора текста): **«=B1+C1+D1+E1»**, что означает формулу $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$. В третьей строке вводятся левые части системы ограничений. Для этого переводим курсор в ячейку A3 и вводим в ней текст «Ограничения». Переключившись в английский режим клавиатуры, вводим в ячейку B3 формулу **«=70*B1+30*C1+20*D1+50*E1»**, которая соответствует левой части первого ограничения системы $70y_1 + 30x_2 + 20x_3 + 50x_4 \le 1$.

Вводим:

в ячейку C3: **«=60*B1+50*C1+40*D1+80*E1»**,

в ячейку D3: **«=20*B1+60*C1+80*D1+60*E1»**,

в ячейку E3: **«=50*B1+70*C1+30*D1+50*E1»**.

После этого вызываем надстройку в меню «сервис» и подменю «Поиск решений», открывается окно надстройки. В поле «Установить целевую ячейку» даем ссылку на B2. Ниже, в области «Равной», поставить переключатель на максимальное значение. Ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» и даем ссылки на переменные, обводя мышью ячейки B1–E1. Далее переводим курсор в поле «Ограничения» и вводим ограничения. Для этого нажимаем на кнопку «Добавить» и далее в поле «Ссылка на ячейку» даем ссылку на ячейку B3, в центральном поле выбираем знак неравенства — ограничения : «≤», в поле «Ограничение» вводим единицу. Нажимаем «ОК». Вводим второе ограничение, нажимая «Добавить», вводим в поля: «C3», «≤», «1», нажимаем «ОК», далее «Добавить», ссылку на «D3», «≤», «1», «ОК», «Добавить», ссылку на «E3», «≤», «1», «ОК». Для ввода дополнительных ограничений $y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0$ нажимаем «Добавить», в поле «Ссылка на ячейку» ставим курсор и обводим ячейки B1–E1, выводим в центральное поле «≥», ограничение «0», нажимаем «ОК». Далее запускаем программу, нажимая «Выполнить». Результат решения ЗЛП в ячейках B1–E1. Вводим в A5 подпись «Цена игры», а в соседнюю B5 формулу (переключаясь на английский язык) **«=1/(B1+C1+D1+E1)»**. Находим вероятности чистых стратегий q в смешанной стратегии игрока B. Для этого вводим в A6 подпись «q1=«, а в соседнюю B6 формулу **«=B5*B1»**, вводим в A7: «q2=«, а в B7 формулу **«=B5*C1»**, в A8: «q3=«, а в B8: **«=B5*D1»**, в A9: «q4=«, в B9:»**=B5*E1»**. Данные показатели и есть решение задачи для фирмы B. Из решения видно, что лучше всего 50 % выпускать B_1 и 50 % B_3, модели B_2 и B_4 выпускать не следует.

4. Игры с природой

В рассмотренных ранее задачах соперником игрока был другой игрок, который осознанно выбирал стратегию с максимальной выгодой для себя и минимальной для соперника. Однако, часто бывают ситуации, когда соперник не является мыслящим субъектом, и свой выбор он осуществляет случайно, вне зависимости выгодно это сопернику или нет. Такие ситуации в теории игр называются «играми с природой». Рассмотрим такие модели.

Предположим, что игрок *A* имеет *n* чистых стратегий, которые обозначим $A_1, A_2,..., A_n$. Результат выбора (выигрыш игрока) зависит от того, как будит развиваться ситуация, на которую игрок повлиять ни как не может. Предположим, что игрок выделяет m вариантов развития ситуации, которые обозначим $S_1, S_2,.., S_m$. Данные варианты в теории принятия решений называют *«Состояниями природы»*, т.к. в большинстве реальные задачи этого типа связаны с погодными, климатическими, социальными и другими неопределенностями.

Допустим, что известен результат для игрока *A* (выраженный количественно) при каждой альтернатива A_i и развитии ситуации B_j. Обозначим его a_{ij}. Получаем матрицу $A=(a_{ij})$, которую называют матрицей выигрышей или матрицей потерь, в зависимости от того, максимизируется или минимизируется результат для игрока.

В соответствии с реальными условиями, существует несколько критериев выбора стратегии. Для более наглядного описания этих методов, рассмотрим их на примерах. Изучим сначала критерии ***максимизации*** результата, когда показатели привлекательности a_{ij} *чем больше, тем лучше для игрока А*.

Пример 7. Директор торговой фирмы, продающей телевизоры марки «Zarya» решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин в отдельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Успех торговой фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации S_1, S_2, S_3, S_4. Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей a_{ij} (млн. р./год).

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Рассмотрим основные критерии, позволяющие выбирать оптимальную альтернативу для принятия решения.

1) Критерий Лапласа.

Он основан на предположении, что каждый вариант развития ситуации (состояния «природы») равновероятен. Поэтому, для принятия решения, необходимо рассчитать функцию полезности F_i для каждой альтернативы, равную среднеарифметическому показателей привлекательности по каждому «состоянию природы»:

$$F_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} .$$

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна. Для примера:

$$F_1 = \frac{1}{4}(8+12+14+5) = 9{,}75;$$

$$F_2 = \frac{1}{4}(9+10+11+10) = 10;$$

$$F_3 = \frac{1}{4}(2+4+9+22) = 9{,}25;$$

$$F_4 = \frac{1}{4}(12+14+10+1) = 9{,}25;$$

$$F_5 = \frac{1}{4}(15+6+7+14) = 10{,}5.$$

Видно, что функция полезности максимальна для альтернативы A_5, следовательно ее рациональнее всего принять.

2) Критерий Вальда.

Данный критерий основывается на принципе максимального пессимизма, то есть на предположении, что скорее всего произойдет наиболее худший вариант развития ситуации и риск наихудшего варианта нужно свести к минимуму. Для применения критерия нужно для каждой альтернативы выбрать наихудший показатель привлекательности α_i (наименьшее число в каждой строке матрицы выигрышей) и выбрать ту альтернативу, для которой этот показатель максимальный. Для нашего примера: $\alpha_1 = 5;\ \alpha_2 = 9; \alpha_3 = 2;\ \alpha_4 = 1;\ \alpha_5 = 6.$ Видно, что наилучшим из наихудших показателей обладает альтернатива A_2 , для нее $\alpha_2 = 9$ наибольшее.

3) Критерий максимального оптимизма.

Наиболее простой критерий, основывающийся на идее, что ЛПР, имея возможность в некоторой степени управлять ситуацией, рассчитывает, что произойдет такое развитие ситуации, которое для него является наиболее выгодным. В соответствии с критерием принимается альтернатива, соответствующая максимальному элементу матрицы выигрышей. Для приведенного примера эта величина $a_{34} = 22$, поэтому выбираем альтернативу A_3.

4) Критерий Сэвиджа.

Он основан на принципе минимизации потерь, связанных с тем, что ЛПР принял не оптимальное решение. Для решения задачи составляется матрица потерь, которая называется ***матрицей рисков*** r_{ij}, которая получается из матрицы выигрышей a_{ij} путем вычитания из максимального элемента каждого столбца $a_j^{\max} = \max\limits_i(a_{ij})$ всех остальных элементов. В рассматриваемом примере эта матрица есть:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	2	0	17
A_2	6	4	3	12
A_3	13	10	5	0
A_4	3	0	4	21
A_5	0	8	7	8

Далее, для каждой альтернативы определяем величины β_i, равные максимальному риску (наибольшее число в каждой строке матрицы рисков) и выбирают ту альтернативу, для которой максимальный риск минимален. В нашем примере: $\beta_1 = 17;$ $\beta_2 = 12;$ $\beta_3 = 13;$ $\beta_4 = 21;$ $\beta_5 = 18,$ минимально $\beta_2 = 12.$ Принимаем альтернативу A_2 .

5) Критерий Гурвица.

Это самый универсальный критерий, который позволяет управлять степенью «оптимизма - пессимизма» ЛПР. Введем некоторый коэффициент α, который назовем ***коэффициентом доверия*** или коэффициентом оптимизма. Этот коэффициент можно интерпретировать как вероятность, с которой произойдет наилучший для ЛПР исход. Исходя из этого, наихудший вариант можно ожидать с вероятностью (1-α). Коэффициент доверия α показывает, насколько ЛПР может управлять ситуацией и в той или иной степени рассчитывает на благоприятный для него исход. Если вероятности благоприятной и неблагоприятной ситуации для ЛПР равны, то следует принять α=0,5.

Для реализации критерия определяются наилучшие a_i^+ и наихудшие a_i^- значение каждой альтернативе по формулам $a_i^+ = \max\limits_j (a_{ij})$, $a_i^- = \min\limits_j (a_{ij})$. Далее, вычисляются функции полезности по формуле:

$$F_i = a_i^+ \cdot \alpha + a_i^- \cdot (1-\alpha)\ .$$

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна.

Предположим, что для нашего примера ЛПР достаточно уверен в положительном результате и оценивает вероятность максимального успеха в α=0,7. Тогда:

$$F_1 = 14 \cdot 0{,}7 + 5 \cdot (1-0{,}7) = 11{,}3;$$

$$F_2 = 11 \cdot 0{,}7 + 9 \cdot 0{,}3 = 10{,}4;$$

$$F_3 = 22 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}3 = 16{,}0;$$

$$F_4 = 14 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}3 = 10{,}1;$$

$$F_5 = 15 \cdot 0{,}7 + 6 \cdot 0{,}3 = 12{,}3.$$

В соответствии с расчетами ЛПР следует выбрать альтернативу A_3. Если же, например, ЛПР не очень уверен в положительном исходе и расценивает его вероятность порядка α=0,2, то функции полезности равны:

$$F_1 = 14 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot (1-0{,}2) = 6{,}8;$$

$$F_2 = 11 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}8 = 9{,}4;$$

$$F_3 = 22 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}8 = 6;$$

$$F_4 = 14 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}8 = 3{,}6;$$

$$F_5 = 15 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}8 = 7{,}8.$$

Видно, что в этом случае следует принять A_2, для которого функция полезности максимальна.

Следует отметить, что при α=0, критерий Гурвица переходит в пессимистический критерий Вальда, а при α=1 – в критерий максимального оптимизма.

В случае, если показатель привлекательности по критерию a_{ij} ***минимизируются*** (*чем меньше, тем лучше для игрока*, например затраты, риск и др.), то критерии принятия оптимального решения несколько меняются. Рассмотрим эти отличия.

Критерий ***Лапласа*** определяет оптимальное решение по минимальной функции полезности. Применяя критерий ***Вальда*** необходимо вычислять максимальный показатель каждой альтернативы (строки) α_i и принимать альтернативу, где этот показатель минимален. Критерий ***максимального оптимизма*** позволяет определить оптимальное решение, соответствующее минимальному элементу матрицы выигрышей (которую в случае минимизации часто называют матрицей потерь). Матрица рисков в критерии ***Сэвиджа*** получается в результате вычитания из каждого элемента матрицы потерь a_{ij} минимального элемента каждого столбца $a_j^{\min} = \min\limits_i(a_{ij})$. Для реализации критерия ***Гурвица*** вычисляются максимальные и минимальные показатели для каждой альтернативы $a_i^+ = \max\limits_j\left(a_{ij}\right)$, $a_i^- = \min\limits_j\left(a_{ij}\right)$ и функции полезности рассчитываются по формуле: $F_i = a_i^- \cdot \alpha + a_i^+ \cdot (1-\alpha)$. Выбирается альтернатива с наименьшей функцией полезности. Рассмотрим пример.

Пример 8. Нефтяная компания собирается построить в районе крайнего севера нефтяную вышку. Имеется 4 проекта A, B, C и D. Затраты на строительство (млн. руб.) зависят от того, какие погодные условия будут в период строительства. Возможны 5 вариантов погоды S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Выбрать оптимальный проект для строительства используя критерии Лапласа, Вальда, максимального оптимизма, Сэвиджа и Гурвица при $\alpha = 0{,}6$. Матрица затрат имеет вид:

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	12	8	10	5
A_2	9	10	7	8	9
A_3	6	8	15	9	7
A_4	9	10	8	11	7

Критерий ***Лапласа***.

$F_1 = (7+12+8+10+5)/5 = 8{,}4;$

$F_2 = (9+10+7+8+9)/5 = 8{,}6;$

$F_3 = (6+8+15+9+7)/5 = 9;$

$F_4 = (9+10+8+11+7)/5 = 9.$

Следует выбрать альтернативу A_1.

Критерий ***Вальда***: среди наихудших вариантов α_1=12, α_2=10, α_3=15, α_4=11, наилучший соответствует α_2=10, следовательно принимаем альтернативу A_2.

Критерий ***максимального оптимизма.*** Соответствует альтернативе, для которой $a_{15} = 5$ минимальное.

Критерии ***Сэвиджа*** имеет матрицу рисков:

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	1	4	1	2	0
A_2	3	2	0	0	4
A_3	0	0	8	1	2
A_4	3	2	1	3	2

Максимальные элементы для каждого критерия матрицы рисков равны: β_1=4; β_2=4; β_3=8; β_4=3. Принимаем альтернативу, соответствующую минимальному значению β_4=3, то есть A_4.

В соответствии с критерии Гурвица на уровне $\alpha = 0{,}6$, функции полезности равны:

$F_1 = 5\cdot 0{,}6 + 12\cdot 0{,}4 = 7{,}8;\quad F_2 = 7\cdot 0{,}6 + 10\cdot 0{,}4 = 8{,}2;$

$F_3 = 6\cdot 0{,}6 + 15\cdot 0{,}4 = 9{,}6;\quad F_4 = 7\cdot 0{,}6 + 11\cdot 0{,}4 = 8{,}6.$

Принимаем альтернативу A_2 с наименьшей функцией полезности $F_1 = 7{,}8$.

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Номер варианта определяется по двум последним цифрам Вашего индивидуального номера зачетной книжки (не путать с номером группы или годом поступления, какой у всех один и тот же). Если этот номер меньше 30, то он и есть Ваш вариант. Если больше – отнимаем 30 несколько раз до тех пор, пока оставшееся число не станет меньше 30 - Вашим номером варианта. Например, 43-30=13 вариант, 84-30-30=24 вариант, 00=10 вариант

Задание № 1.

Предприниматель собирается вложить сумму в количестве 100 тыс. р. в совместное предприятие. У него есть четыре альтернативы выбора формы заключения договора с партнером (стратегии A_1, A_2, A_3, A_4). С другой стороны, прибыль предпринимателя зависит от того, какую стратегию поведения выберет его партнер и совет директоров (у партнера — контрольный пакет акций). Имеются оценки выигрышей предпринимателя для каждой пары альтернатив (A_i, B_j) (прибыль приводится в процентах годовых от вложения), которые приведены в платежной матрице a_{ij}. Определить оптимальную стратегию вложения денег для предпринимателя, если партнер получает тем большую прибыль, чем меньше получит предприниматель, поэтому в его задачу входит минимизировать прибыль предпринимателя.

Матрица a_{ij} имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Вари-ант	Платежная матрица, a_{ij}				Вари-ант	Платежная матрица, a_{ij}				Вари-ант	Платежная матрица, a_{ij}			
1,	30	60	30	70	6,	20	10	20	50	11,	10	30	10	50
	60	50	40	70		50	40	50	60		80	60	30	50
16	50	60	30	50	21	30	20	30	70	26	40	30	20	60
	40	70	40	90		40	10	20	60		20	50	20	70

2,	100	90	30	70	7,	70	20	60	50	12,	90	70	50	80
	80	70	40	50		90	40	80	50		60	30	40	50
17	30	40	20	60	22	80	50	70	90	27	30	70	20	90
	70	50	30	50		40	10	20	60		20	50	20	70
3,	45	30	50	80	8,	60	50	40	30	13,	40	30	50	60
	75	70	90	80		70	60	70	90		80	70	60	70
18	60	40	50	70	23	60	50	80	80	28	70	60	50	55
	10	20	30	40		40	30	60	70		60	50	40	40
4,	40	50	50	60	9,	10	70	30	80	14,	50	60	90	80
	20	30	30	40		30	40	50	30		30	80	50	30
19	10	20	20	30	24	40	60	70	90	29	40	50	90	80
	5	15	15	20		20	30	60	70		60	50	40	40
5,	60	70	90	80	10	70	40	20	30	15,	50	70	40	30
	40	50	70	30	,	80	50	40	70		30	80	70	10
20	20	30	20	10		50	70	30	80	30	40	50	60	20
	5	15	15	20	25	20	30	20	60		30	50	20	10

Задание № 2.

Некоторая организация A собирается либо выпускать (стратегия A_1), либо не выпускать (стратегия A_2) новый вид продукции. При этом ей не известно, будет ли выпускать тот же вид продукции конкурирующая организация B. Если и A и B будут выпускать одну и ту же продукцию, то это принесет организации A убыток в a млн р. Если и A и B не будут выпускать эту продукцию, то это не принесет организации A ни прибыли ни убытка. Если A будет выпускать продукцию, а B — нет, то прибыль организации A составит b млн р. Если B будет выпускать продукцию, а A — нет, то из-за прекращения конкуренции организации B по другим товарам прибыль организации A составит c млн р. Методами теории игр определить, с какой вероятностью следует решиться на выпуск нового товара, чтобы полученная ожидаемая прибыль была максимальна и какая эта прибыль при соблюдении организациями оптимальных стратегий.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
a	1	2	3	9	2	9	5	9	5	4	1	6	2	3	4
b	11	17	18	15	11	17	11	16	16	14	10	12	12	17	10
c	5	3	4	3	2	8	8	7	9	7	8	1	2	8	3
Вариант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	3	9	4	4	2	8	7	8	1	5	4	8	9	4	4
b	19	13	15	18	14	13	14	17	13	18	14	17	11	12	12
c	6	8	5	3	3	3	7	5	8	7	7	2	7	5	9

Задание № 3.

В регионе имеются две конкурирующие компании ***A*** и ***B***, которые производят меховую одежду. Перед отделом маркетинга компании ***A*** поставлена задача определить оптимальный выпуск новых видов продукции, при этом имеется возможность выпускать один или несколько моделей одежды из возможных трех, которые обозначим A_1, A_2 и A_3. Ожидаемая прибыль по прогнозам экспертов во многом зависит от того, какие модели будет выпускать конкурент ***B***. По имеющейся информации компания ***B*** может наладить выпуск одной или нескольких моделей из четырех: B_1, B_2, B_3 и B_4. Прогнозируемая прибыль компании ***A*** для каждой модели одежды при всех возможных вариантах выпуска одежды компанией ***B*** описывается платежной матрицей:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Методами теории игр ответить на вопрос: В каких долях нужно выпускать каждый вид одежды из возможных компанией ***A***, чтобы полученная прибыль была максимальна и не зависима от действий компании ***B***?

Вари-ант	Платежная матрица игры, a_{ij}				Вари-ант	Платежная матрица игры, a_{ij}				Вари-ант	Платежная матрица игры, a_{ij}			
1, 16	6	5	3	4	2, 17	7	5	6	7	3, 18	4	3	1	4
	7	4	7	8		6	9	10	11		6	3	2	5
	3	3	2	4		5	7	8	9		5	7	6	4
4, 19	10	9	6	7	5, 20	7	2	6	5	6, 21	3	5	2	–4
	8	7	4	5		9	4	8	9		–1	0	–2	3
	5	4	2	6		8	5	3	5		1	6	–4	–6
7, 22	8	9	4	2	8, 23	9	4	5	6	9, 24	2	0	–1	3
	9	7	6	9		8	7	3	7		2	2	2	–1
	5	8	7	3		7	6	9	9		1	3	1	–3
10, 25	8	7	8	8	11, 26	5	4	6	8	12, 27	6	2	3	4
	5	4	5	7		9	8	5	6		4	5	6	7
	7	6	7	9		6	5	9	9		7	3	4	5
13, 28	7	6	5	3	14, 29	5	2	4	3	15, 30	3	2	1	2
	8	5	4	7		3	8	9	10		8	6	4	5
	5	7	3	2		4	1	2	3		4	3	5	7

Задание № 4.

Составить задачу линейного программирования для выбора оптимальных смешанных стратегий для сторон A и B.

Вари-ант	Платежная матрица игры, a_{ij}						Вари-ант	Платежная матрица игры, a_{ij}						Вари-ант	Платежная матрица игры, a_{ij}					
1, 16	3	4	5	3	6	8	2, 17	4	3	5	7	5	8	3, 18	5	2	4	2	2	1
	6	3	5	3	1	9		2	7	1	2	5	8		6	8	9	4	7	8
	5	3	5	5	10	9		5	3	2	5	7	2		5	8	5	2	2	6
	9	7	6	8	6	7		8	7	3	5	2	2		7	9	3	4	9	6
4, 19	2	2	1	5	1	3	5, 20	3	4	9	5	5	4	6, 21	4	5	3	7	1	5
	4	7	8	8	9	4		4	5	4	4	4	3		1	2	3	5	3	2
	2	2	6	6	3	8		4	5	3	7	5	6		7	2	2	7	6	5
	4	9	6	4	7	4		4	3	7	6	6	8		6	4	6	3	7	6
7, 22	7	1	5	8	6	3	8, 23	5	2	3	7	7	2	9, 24	4	4	9	7	7	5
	5	3	2	9	7	7		2	2	4	9	1	1		3	8	4	7	6	7
	7	6	5	4	7	5		2	5	6	2	4	8		1	3	1	4	7	6
	3	7	6	6	3	4		3	3	7	6	7	4		1	3	5	8	5	7
10, 25	7	6	5	4	7	5	11, 26	2	5	6	2	4	8	12, 27	1	3	1	4	7	6
	3	7	6	6	3	4		3	3	7	6	7	4		1	3	5	8	5	7
	7	7	5	7	3	2		6	6	4	2	4	8		1	8	4	6	5	6
	7	6	7	1	6	9		8	7	6	5	6	8		2	6	8	3	7	4
13, 28	7	6	7	1	6	9	14, 29	4	4	5	3	7	1	15, 30	6	2	4	8	1	3
	4	7	6	6	3	9		3	1	2	3	5	3		7	6	7	4	1	3
	8	5	7	7	6	5		6	7	2	2	7	6		4	2	4	8	1	8
	6	5	6	4	2	3		8	6	4	6	3	7		6	5	6	8	2	6

Задание № 5.

Предприниматель решил закупить партию продовольственного товара. У него имеются 4 варианта закупки: партии A, B, C, D и E. В результате прибыль предпринимателя зависит от того, какой спрос будет на его продукцию. Возможны 4 варианта спроса: S1, S2, S3, S4. Прибыль каждой партии для каждого варианта спроса представлена в таблице:

	S1	S2	S3	S4
A	161	***a***	171	201
B	198	187	***b***	204
C	***c***	197	207	187
D	164	164	205	***d***
E	206	***e***	190	188

Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица с α=0,4, принять оптимальное решение. Значения ***a, b, c, d, e*** взять для своего варианта из таблицы:

Вариант	**1, 16**	**2, 17**	**3, 18**	**4, 19**	**5, 20**	**6, 21**	**7, 22**	**8, 23**	**9, 24**	**10, 25**	**11, 26**	**12, 27**	**13, 28**	**14, 29**	**15, 30**
a	185	179	163	197	164	205	210	161	185	172	184	198	179	195	166
b	197	203	196	176	188	191	208	181	193	186	207	199	166	170	163
c	200	194	196	161	190	193	164	198	192	209	187	204	173	173	178
d	175	162	177	183	183	182	184	193	186	178	207	179	197	163	198
e	168	195	200	177	194	194	191	176	177	172	173	161	207	179	188

Задание № 6

Коммерческий директор торговой организации желает открыть филиал в районном центре города. Ему дают «добро» в четырех районных центрах A, B, C и D. Затраты на строительство не определены и, в связи с позиций партнеров, зависят от того, какой будет спрос на предлагаемый товар в период строительства. Возможны 5 вариантов развития ситуации: S1, S2, S3, S4, S5. Матрица затрат имеет вид:

	S1	S2	S3	S4	S5
A	27	***a***	23	7	29
B	31	11	22	***b***	21
C	***c***	32	16	13	***d***
D	8	18	***e***	33	16

Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица с α=0,6, принять оптимальное решение.

Значения ***a, b, c, d, e*** взять для своего варианта из таблицы:

Вариант	**1, 16**	**2, 17**	**3, 18**	**4, 19**	**5, 20**	**6, 21**	**7, 22**	**8, 23**	**9, 24**	**10, 25**	**11, 26**	**12, 27**	**13, 28**	**14, 29**	**15, 30**
a	34	32	33	34	31	31	31	31	31	34	33	33	35	31	33
b	30	31	31	31	34	31	33	34	30	34	33	31	34	33	35
c	34	34	33	30	35	34	34	32	32	32	33	31	35	34	30
d	34	31	35	31	33	33	33	34	34	32	34	30	31	32	30
e	32	35	34	33	32	32	31	33	31	32	30	32	33	33	35