

**Вопросы к коллоквиуму**  
**"Пределы функций. Непрерывность**  
**функций".**  
**Математический анализ, 1-й курс, 2-й**  
**модуль**  
**группы БПМ 161-164;**  
**2016/2017 учебный год**  
**В. Лебедев**

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника по выбору преподавателя. Студент должен знать определения и формулировать утверждения. Воспроизводить доказательства лемм и теорем не требуется. Прием коллоквиума осуществляется в виде блиц-опроса на семинарском занятии. На подготовку дается 10 минут, на ответ 2–3 минуты. В исключительных случаях, студенты, не уложившиеся во время, могут (или не могут), по решению преподавателя, продолжить сдачу коллоквиума на консультации.

1. Дайте определения пределов функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \begin{matrix} (+\infty, -\infty, \infty, x_0+0, x_0-0) \\ f(x) = a(+\infty, -\infty, \infty). \end{matrix}$$

Приведите примеры. Сформулируйте теорему о единственности предела функции.

2. Как связан предел функции в точке и односторонние пределы в (той же) точке.

3. Изложите арифметические свойства конечных пределов функций.

5. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенствах для функций.

6. Сформулируйте лемму о "двух милиционерах" для функций.

7. Сформулируйте теорему о замене переменной в пределах. Чему равен  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x$ ?

8. Дайте определение эквивалентных функций при  $x \rightarrow x_0$  (при  $x \rightarrow x_0 \pm 0, +\infty, -\infty, \infty$ ). Сформулируйте утверждение об умножении и делении эквивалентностей. Приведите пример, показывающий, что их нельзя складывать.

9. Дайте определение соотношения  $f(x) = o(g(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ . Приведите примеры. Как связаны утверждения 1)  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$  и 2)  $f(x) = g(x) + o(g(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

10. Дайте определение функции, непрерывной в точке; на интервале. Дайте определение функции непрерывной слева (справа).

11. Что такое элементарная функция? Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.

12. При  $x \rightarrow 0$  запишите асимптотические формулы  $\sin x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim x^2/2$ ,  $\ln(1+x) \sim x$  в виде равенств с использованием символа “ $o$ ”.

13. При  $x \rightarrow 0$  запишите асимптотические формулы  $e^x - 1 \sim x$ ,  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ , в виде равенств с использованием символа “ $o$ ”.

14. Сформулируйте утверждение о сравнении функций  $\log_a x$  и  $x^\alpha$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $a > 1$ ,  $\alpha > 0$ .

15. Сформулируйте утверждение о сравнении функций  $x^\alpha$  и  $b^x$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha > 0$ ,  $b > 1$ .

16. Расскажите, как нарисовать набросок графика функции, выделяя главные части в особых точках и на бесконечности. Постройте набросок графика функции  $y = \ln|x+1| + \ln|x-2| + 1/x - 1/(x+1)^2$ .

17. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках.

18. Сформулируйте теорему Коши о промежуточном значении. Изложите метод решения уравнений  $f(x) = 0$  методом деления отрезка пополам.

19. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах непрерывных функций.

20. Сформулируйте теорему о непрерывности суперпозиции (двух) непрерывных функций.

21. Сформулируйте теорему о непрерывности обратной функции.

22. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.

23. Дайте определение подпоследовательности. Сформулируйте лемму Больцано–Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности).

24. Дайте определение верхней (нижней) грани функции, заданной на некотором множестве. Сформулируйте теорему о существовании верхней (нижней) грани функции, ограниченной сверху (снизу).

25. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о максимальном (минимальном) значении непрерывной функции на отрезке. Покажите на при-

мерах, что все условия этой теоремы являются существенными.

26. Дайте определение функции равномерно непрерывной на множестве  $E \subseteq \mathbb{R}$ .

27. Сформулируйте теорему Кантора о равномерной непрерывности.

28. Дайте определение модуля непрерывности  $\omega_f(\delta)$  функции  $f$  на множестве  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Сформулируйте критерий равномерной непрерывности в терминах модуля непрерывности.

29. Являются ли равномерно непрерывными функции  $x$ ,  $\sin x$ ,  $x^2$ ,  $\sin x^2$  на  $\mathbb{R}$ ? Ответ обоснуйте.

30. Являются ли равномерно непрерывными функции  $x^2$ ,  $1/x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sin 1/x$  на интервале  $(0, 1)$ ? Ответ обоснуйте.