Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Незнанов А.А.

Базовый глоссарий по прикладной теории графов

Используемая терминологическая система с английскими эквивалентами

--- ЧЕРНОВИК ---

Замечания и предложения присылать на адрес **aneznanov@hse.ru**

Версия 0.07.03

Автор выражает благодарность В.А. Кохову, С.В. Ткаченко, М.И. Кановичу за плодотворные дискуссии и ценные терминологические замечания.

Содержание

Часть I. Глоссарий

Раздел 1. Общие замечания

В глоссарии собраны определения, относящиеся к базовым понятиям теории графов и групп (анализу симметрии структур систем).

Большинство приведённых ниже определений взято из [1-10]. Некоторые определения переработаны (изменён порядок введения терминов), а обозначения унифицированы для повышения целостности и стройности изложения. Некоторые термины введены В.А. Коховым и А.А. Незнановым.

Определения пронумерованы. В квадратных скобках после первого употребления термина приводится перевод на английский язык. В круглых скобках приводятся варианты обозначения того же понятия в других терминологических системах. Значимые различия терминологических систем поясняются.

1.1. Процесс абстрагирования и уровни абстракции

Система [*system*] объединение множества элементов некоторыми связями, у которого появляются свойства, отсутствующие у любого элемента по отдельности. Такие свойства называют системными свойствами, а их появление – проявлением **эмерджентности** [*system emergentness*] (от англ. *emergence* – возникновение, появление, непредвиденный случай). Эмерджентность не позволяет свести свойства системы к сумме свойств её элементов. Системы всегда образуют иерархию, то есть можно считать, что у любой системы есть *надсистема* и *подсистемы*.

Подсистема [*subsystem*] – система, рассматриваемая как элемент системы более высокого уровня.

Надсистема [стандартного термина нет, иногда используется *supersystem*] – система, для которой рассматриваемая система является элементом.

Состав [*composition*] системы – совокупность элементов, образующих систему, то есть их перечисление.

Структура [*structure*] системы – совокупность связей между элементами системы, то есть способ объединения элементов, обеспечивающий эмерджентность. Далее мы свяжем графовые модели со структурой системы.

Абстракция [*abstraction*] – 1. Разграничение внешних (существенных с точки зрения надсистем) свойств системы и внутренних деталей её строения и функционирования. 2. Принцип моделирования, заключающийся в игнорировании аспектов проблемы, не оказывающих существенного влияния на её решение. Хорошей абстракцией считается та, которая выделяет свойства системы, не зависящие от реализации подсистем и действительно существенные для рассмотрения и использования в данном контексте, опуская все остальные.

Иерархия абстрактных представлений (иерархия абстракций) [*abstraction hierarchy*] – относительное упорядочение абстракций по структурам классов, объектов или процессов.

Уровень абстракции [*level of abstraction*] – уровень в иерархии абстракций.

Интерфейс [*interface*] – одно из базовых понятий теории систем. В широком смысле, интерфейс – это формальное или неформальное определение связи в тройке «сущность1 – связь – сущность2» [*entity1 – relation – entity2*].

Два более узких определения понятия «интерфейс» – 1. Часть системы, открытая (доступная) для других систем, внешнее восприятие системы. 2. Система связей с унифицированными сигналами и/или аппаратурой, предназначенная для обмена материей/информацией между техническими устройствами и/или людьми.

Раздел 2. Стандартные свойства графов и их частей

2.1. Графовая модель, граф, орграф

Определение I.1. ***Графовая модель*** [*graph model*] – двухосно́вная алгебраическая система (модель) $\langle V, E, I \rangle$, где

- V – конечное или бесконечное множество объектов произвольной природы (множество ***вершин*** [*vertex*]),
- E – конечное или бесконечное множество объектов, отличных от объектов из V (множество ***дуг*** [*arc*]),
- I – отношение *инцидентности* [*incidence*] (отношение множеств V и E, такое что каждый элемент $e \in E$ находится в отношении I с одним или с двумя элементами множества V). Формально можно описать ***инцидентор*** – предикат $PI(v_1, v_2, e)$, истинный тогда и только тогда, $v_1 \in V$ является началом [*head*] дуги $e \in E$, а $v_2 \in V$ – концом [*tail*] дуги e. Дуга e выходит [*starts*] из вершины v_1 и входит [*ends*] в v_2. Вершины v_1 и v_2 соединяются дугой e. Дуга инцидентна [*incident*] вершинам, которые она соединяет.

Если порядок элементов множества V в отношении I не важен, то есть из истинности $PI(v_1, v_2, e)$ следует истинность $PI(v_2, v_1, e)$, то элементы множества E называются ***рёбрами*** [*edge*]. Неформально удобно запомнить, что дуги – это ориентированные рёбра. Отсюда понятно, почему графовая модель, содержащая дуги, называется ***ориентированным графом*** (***орграфом*** [*digraph*]) .

Ребро с инцидентором $PI(v_1, v_2, e)$ обозначается как «$\{v_1,\ v_2\}$» (порядок не существенен), а дуга – «$(v_1,\ v_2)$» (порядок существенен!).

Граф с множеством вершин V часто называют ***заданным на*** V. Например, «рассмотрим следующие два графа на 500 вершинах».

Стандартное обозначение графа (используемое далее): $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, где *идентификаторами* (номерами) вершин и ребер выступают числа натурального ряда:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} = \{0, 1, \dots, p–1\}$, $\boldsymbol{p} = |V|$ – число вершин;
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\} = \{0, 1, \dots, q–1\}$, $\boldsymbol{q} = |E|$ – число ребер.

Определение I.2. ***Кратными*** (или ***мультирёбрами***) [*multiple*] называются рёбра, инцидентные одной и той же паре вершин.

Определение I.3. ***Петля*** [*loop*] – ребро, инцидентное только одной вершине (соединяет вершину с самой собой).

Определение I.4. В теории графов исторически термин ***граф*** обозначает *обыкновенный граф* – неориентированный граф без петель и кратных рёбер. *Граф* можно формализовать проще графовой модели общего вида – как пару множеств (V, E), где $E \subseteq (V \times V)$ и $V \cap E = \emptyset$.

Определение I.5. ***Мультиграф*** [*multigraph*] – граф, содержащий кратные рёбра.

Определение I.6. ***Псевдограф*** [*pseudograph*] – мультиграф, содержащий петли.

Определение I.7. ***Взвешенный*** [*weighted*] ***граф*** – граф, у которого для представления объектов из множеств V и/или E недостаточно идентификатора, а необходимо хранение некоторых дополнительных характеристик или атрибутов (*весов вершин* и *весов рёбер*).

Введём сокращение **ГМС – Графовая Модель Системы** [*graph model of system*]. Оно будет использоваться для обозначения любого класса графовых моделей без привязки к предметной области.

2.2. Определения, связанные с анализом обыкновенных графов

Определение I.8. Две вершины ***смежны*** [*adjacent*], если они соединены ребром.

Определение I.9. Два ребра ***смежны*** [*adjacent*], если они имеют общую вершину.

Определение I.10. ***Окрестность*** [*neighborhood*] *вершины* v (обозначается $\Gamma(v)$) – множество вершин, смежных с вершиной v.

Определение I.11. ***Окрестность подмножества вершин*** V_0 (бахрома) – множество вершин, не принадлежащих V_0 и смежных с вершинами из V_0, то есть $\Gamma(V_0) = \bigcup_{v \in V_0} \Gamma(v) \setminus V_0$.

Определение I.12. ***Степень*** [*degree*] ***вершины*** – мощность её окрестности.

Определение I.13. ***Изолированная*** [*isolated*] ***вершина*** – вершина степени 0 (для псевдографов формализация усложняется из-за наличия петель – вершина, не смежная ни с какой другой вершиной).

Определение I.14. ***Висячая*** [*pendant*/*hanging*] ***вершина*** – вершина степени 1.

Определение I.15. ***Маршрут*** [*sequence*] – чередующаяся последовательность $a = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = b$ вершин и рёбер графа такая, что $e_i = \{v_{i-1},\ v_i\}, 1 \le i \le n$. Вершины a и b – ***концевые вершины*** (***концы***) маршрута.

Определение I.16. ***Цепь*** [*chain*] – маршрут, все рёбра которого различны; число рёбер есть ***длина цепи***. Если все вершины цепи различны, то цепь ***простая***, иначе – ***составная***.

Определение I.17. ***Цикл*** [*cycle*/*circuit*] – цепь, в которой первая и последняя вершины совпадают. Если все вершины цикла, кроме концевых, различны, то цикл ***простой***, иначе – ***составной***.

Определение I.18. ***Эйлерова цепь*** [*Eulerian chain*] – простая цепь, содержащая все рёбра графа.

Определение I.19. ***Эйлеров цикл*** [*Eulerian cycle*] – простой цикл, содержащий все рёбра графа.

Определение I.20. ***Гамильтонова цепь*** [*Hamiltonian chain*] – простая цепь, содержащая все вершины графа.

Определение I.21. ***Гамильтонов цикл*** [*Hamiltonian cycle*] – простой цикл, содержащий все вершины графа.

Определение I.22. Одна вершина ***достижима*** [*reachable*] из другой, если есть цепь, их соединяющая.

Определение I.23. Граф ***связный*** [*connected*], если из одной вершины достижимы все остальные, иначе граф *несвязный* и состоит из *компонент связности* [*connected component*].

Определение I.24. ***Точка сочленения*** [*articulation point*] – вершина, удаление которой увеличивает число компонент связности графа.

Определение I.25. ***Мост*** [*bridge*] – ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности графа.

Определение I.26. ***Расстояние*** (топологическое) [*distance*] $d(v, u)$ между вершинами v и u – длина кратчайшей цепи между v и u, если они взаимно достижимы. Для взаимно недостижимых вершин расстояние **не определено**.

Определение I.27. ***Эксцентриситет*** [*eccentricity*] ***вершины*** – это наибольшее из расстояний от неё до остальных вершин графа.

Определение I.28. ***Диаметр*** [*diameter*] графа – наибольший из эксцентриситетов его вершин.

Определение I.29. ***Радиус*** [*radius*] графа – наименьший из эксцентриситетов его вершин.

Определение I.30. ***Центральная вершина*** [*center/central vertex*] – вершина графа, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

Определение I.31. ***Центр*** [*center*] графа – множество всех центральных вершин графа.

Определение I.32. ***Периферийная*** [*peripheral*] вершина – вершина, эксцентриситет которой равен диаметру графа.

Определение I.33. ***Каркас*** (*Остовное дерево*) [*spanning tree*] – максимальный частичный граф без циклов.

Определение I.34. ***Хорда*** [*chord*] – ребро графа, не принадлежащее заданному каркасу.

Определение I.35. ***Цикломатическое число*** [*cyclomatic number*] – минимальное число рёбер, удаление которых разрушает все циклы графа, образуя каркас графа.

Формула цикломатического числа: $cn = q - p + k$, где k – число компонент связности.

Определение I.36. ***k-связный*** (***k-вершинно-связный***) граф – граф, который при удалении любых $(k-1)$ вершин остаётся связным.

Определение I.37. ***k-реберно-связный*** граф – граф, который при удалении любых $(k-1)$ рёбер остаётся связным.

Определение I.38. ***Клика*** (***полный граф***) [*clique*] – граф, любая пара вершин которого соединена ребром. Обозначается K_p, где $p = |V|$, при этом $q = p(p-1)/2$.

Определение I.39. ***Двудольный*** [*bipartite*] граф – граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, в котором каждое ребро соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2.

Определение I.40. ***Полный двудольный*** граф – двудольный граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, у которого любая пара вершин $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ смежна. Обозначается $K_{n,m}$, где $n = |V_1|,\ m = |V_2|$.

Определение I.41. ***Регулярный*** [*regular*] (***однородный***) граф, если степени всех его вершин равны.

Определение I.42. ***Сильнорегулярный*** [*strongly regular*] граф – регулярный граф, каждая **смежная** пара вершин которого имеет одинаковое количество общих соседей, и каждая **несмежная** пара вершин которого имеет одинаковое количество общих соседей.

Определение I.43. ***Кубический*** [*cubic*] граф – регулярный граф, степень вершин которого равна трём.

Определение I.44. ***Биквадратический*** [*quartic*] граф – регулярный граф, степень вершин которого равна четырём.

Определение I.45. ***Лес*** [*forest*] – граф без циклов.

Определение I.46. ***Дерево*** [*tree*] – связный лес (т.е. связный граф без циклов).

Определение I.47. ***Планарный граф*** [*planar graph*] – граф, диаграмму которого можно прорисовать на плоскости без пересечений линий, соответствующих рёбрам (точнее, так, чтобы линии, соответствующие рёбрам, пересекались только в вершинах).

Определение I.48. ***Дополнение*** графа [*complement of graph, complementary graph*] – граф с тем же числом вершин, что и исходный, вершины которого смежны, если и только если они не были смежны в исходном графе.

Определение I.49. ***Рёберный*** [*line*] граф – граф с числом вершин, равным числу рёбер исходного графа, вершины которого смежны, если и только если смежны соответствующие им рёбра исходного графа.

2.3. Изоморфизм графов

Определение I.50. Два графа ***изоморфны*** [*isomorphic*], если они отличаются лишь нумерацией своих вершин, точнее, если существует биекция их множеств вершин друг на друга, сохраняющая отношение смежности:

$$G_1 \approx G_2 \Leftrightarrow \exists g: V_1 \leftrightarrow V_2 \left[\forall v_1, v_2 \in V_1 [\{v_1, v_2\} \in E_1 \Leftrightarrow \{g(v_1), g(v_2)\} \in E_2]\right]$$

Сама биекция g двух множеств вершин называется ***изоморфизмом***.

Определение I.51. ***Инвариант*** [*invariant*] графа – некоторая характеристика графа (число, вектор, матрица, структура и т.п.), не зависящая от нумерации вершин, то есть совпадающая у изоморфных графов (например, число вершин). Соответственно *инвариант вершины* – характеристика вершины, не зависящая от нумерации вершин (например, степень вершины).

2.4. Части графа, вложения и общие фрагменты

Существует как минимум три устоявшиеся системы терминов, относящихся к частям графа. Мы следуем одной из них, первоначально предложенной К. Бержем.

Определение I.52. ***Частичный граф*** графа $G = (V, E)$ – граф $H = (V', E')$, такой что $V' = V, E' \subset E$.

Определение I.53. ***Подграф*** [*subgraph*] графа G – граф $H = (V', E')$, такой что $V' \subset V, E' = E \cap (V' \times V')$.

Определение I.54. ***Частичный подграф*** графа G – граф $H = (V', E')$, такой что $V' \subset V, E' \subset E \cap (V' \times V')$.

Определение I.55. ***Произвольная часть*** графа G – граф, являющийся либо частичным графом, либо подграфом, либо частичным подграфом графа G.

Вышеприведённые определения (определение i.52 – определение i.55) запрещают считать сам граф своей частью. Однако, если в определениях частей заменить знак $\subset$ на $\subseteq$ (и назвать их определениями *в расширенном смысле*), то, во-первых, сам граф будет являться своей частью; во-вторых, станет возможной ситуация, когда, к примеру, частичный подграф является подграфом или частичным графом, что приведёт к *эквивалентности определений частичного подграфа в расширенном смысле и произвольной части графа*. Иногда это оказывается очень полезно.

Мы будем придерживаться мнения, что понятие «*фрагмент*» возникает только в контексте наличия объекта, частью которого данный фрагмент является. То есть говорить о фрагменте графа без самого графа бессмысленно. Формализацию понятия «фрагмент» проведём далее (см. раздел 4.1) с использованием понятия *канонического изоморфного вложения*.

Определение I.56. Граф G_1 ***изоморфно вкладывается*** в граф G_2, если в G_2 есть фрагмент, изоморфный G_1, точнее, если существует инъекция их множеств вершин, сохраняющая отношение смежности:

$$G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow \exists h: V_1 \to V_2 \left[\forall v_1, v_2 \in V_1 [\{v_1, v_2\} \in E_1 \Rightarrow \{h(v_1), h(v_2)\} \in E_2] \right]$$

Сама инъекция h двух множеств вершин называется ***изоморфным вложением***.

Определения частей графа определяют также ***смысл изоморфного вложения***, то есть вложение:

1) в смысле *частичного графа*;
2) в смысле *подграфа*;
3) в смысле *частичного подграфа*;
4) в смысле *произвольного фрагмента*, соответственно.

В нашей научной группе рассматриваются в основном два типа вложения:

1) в смысле произвольного фрагмента (тип вложения по умолчанию, обозначение – верхний индекс «^{A}», который часто опускается);

2) в смысле подграфа (обозначение – «^{S}», например $tP_2{}^S$, см. раздел).

Определение I.57. ***Максимальным общим фрагментом*** (МОФ) [*maximal common fragment*] графов G_1 и G_2 называется наибольший по числу вершин и/или рёбер граф, изоморфно вкладывающийся как в G_1, так и в G_2.

Подстановку подмножества вершин V_1 на подмножество вершин V_1, определяющую общий фрагмент графов G_1 и G_2, назовём ***пересечением***.

В соответствие с определениями частей графа, в зависимости от смысла вложения МОФ может быть подграфом обоих графов, подграфов одного графа и частичным подграфом другого графа, всего 9 вариантов. Обычно рассматривается два варианта: МОФ в смысле произвольного фрагмента и МОФ в смысле подграфа.

2.5. Объемлющие графы

Определение I.58. ***Надграф*** [*overgraph*] графа G – граф $OG = (V', E')$, такой что $V \subset V', E = E' \cap (V \times V)$.

Определение I.59. ***Сурграф*** графа G – граф $SrG = (V', E')$, такой что $V = V', E \subset E'$ //$V = V', E \subset E'$.

Определение I.60. ***Суперграф*** графа G – граф $SpG = (V', E')$, такой что $V \subset V', E \subset E' \cap (V \times V)$.

2.6. Устойчивость

Определение I.61. ***Внутренне устойчивое подмножество*** вершин графа (независимое множество, ВНУУП) [*independent set, internal stability set*] – любое множество попарно несмежных вершин графа.

Обычно интерес представляют максимальные и наибольшие ВНУУП.

Определение I.62. ***Число внутренней устойчивости*** (число независимости) – мощность наибольшего ВНУУП.

Определение I.63. ***Внешне устойчивое подмножество*** вершин графа (доминирующее множество, покрытие, ВНЕУП) [*dominating set, external stability set*] – такое множество вершин X, что любая вершина графа или принадлежит X или смежна с вершиной из X.

Обычно интерес представляют минимальные и наименьшие ВНЕУП.

Определение I.64. ***Число внешней устойчивости*** (число покрытия, число доминирования) – мощность наименьшего ВНЕУП.

2.7. Планарные графы

Определение I.65. ***Плоский*** [*flat*] граф – граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется ***планарным*** [*planar*].

Определение I.66. ***Грань*** [*face*] плоского графа – максимальное множество точек плоскости, которые могут быть попарно соединены кривой, не пересекающей рёбер графа.

Определение I.67. ***Толщина*** [*thickness*] графа G – наименьшее число планарных частичных графов графа G, объединение рёбер которых содержит все рёбра G.

Определение I.68. ***Двойственный*** [*dual*] граф G^* плоского графа G – граф, вершины которого соответствуют граням G и смежны тогда и только тогда, когда соответствующие грани имеют общее ребро.

Формула Эйлера: $p - q + f = 2$, где f – число граней. **Теорема Понтрягина-Куратовского**: граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеомофных K_5 или $K_{3,3}$. Число рёбер планарного графа ограничено сверху: $q \le 3p - 6$, если $p \ge 3$. В любом планарном графе присутствует вершина, степень которой меньше 6.

2.8. Раскраски

Определение I.69. ***Хроматическое число*** $\gamma(G)$ графа G – минимальное число цветов, в которые можно раскрасить его вершины так, чтобы не существовало смежных вершины одного цвета.

Хроматическое число равно минимальному числу ВНУУП, которыми можно покрыть все вершины графа.

2.9. Прочие определения

Определение I.70. ***Ярусное разбиение*** (*разложение*) множества вершин графа (ЯРГ) относительно выделенной вершины – разбиение множества вершин графа на классы эквивалентности по *расстоянию* до выделенной вершины.

Определение I.71. ***Прорисовка*** [*layout, drawing*] диаграммы графа – конструирование геометрического представления графа, удовлетворяющего заданному набору требований (минимизация числа пересечений рёбер, максимальная симметричность, минимизация области размещения или суммарной длины рёбер и др.).

2.10. Специфика орграфов

Степень вершины в орграфе состоит из ***полустепени захода*** [*indegree*] (число входящих дуг в вершину) и ***полустепени исхода*** [*outdegree*] (число выходящих дуг из вершины).

Вместо терминов цепь, цикл, связность и компонента связности используются термины *путь* [*path*], *контур* [*cycle*] (внимание, английский термин не меняется!), *сильная связность* [*strong connectivity*] и *компонента сильной связности*.

Определение I.72. ***Полумаршрут*** [*semisequence*] – чередующаяся последовательность $a = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = b$ вершин и дуг орграфа такая, что **либо** $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, **либо** $e_i = (v_i, v_{i-1})$, $1 \le i \le n$. Вершины a и b – *концевые вершины* (*концы*) полумаршрута.

Определение I.73. ***Полупуть*** [*semipath*] – полумаршрут, все дуги которого различны. Простой полупуть – полупуть, все вершины которого различны.

Определение I.74. ***Полуконтур*** [*semicycle*] – полупуть, в котором первая и последняя вершины совпадают. Если все вершины полуконтура, кроме концевых, различны, то полуконтур *простой*, иначе – *составной*.

Определение I.75. Орграф называется ***слабосвязным*** [*weakly connected*], если любая пара его вершин соединяется полупутём. Если орграф не является слабосвязным, он разбивается на ***компоненты слабой связности***.

Определение I.76. ***Симметричный орграф*** [*symmetric digraph*] – орграф, у которого из существования дуги (v, u) следует существование дуги (u, v), то есть любые смежные вершины соединены разнонаправленными дугами.

Определение I.77. ***Основание орграфа*** [*bases of digraph*] – мультиграф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин орграфа, а множество рёбер получается заменой каждой дуги ребром.

Определение I.78. ***Полуоснование орграфа*** [*semibases of digraph*] – обыкновенный граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин орграфа и содержащий ребро $\{v, e\}$ тогда и только тогда, когда орграф содержит дугу (v, e) или дугу (e, v).

Раздел 3. Определения, связанные с расположением вершин в топологии графа

Определение I.79. ***Группа*** [*group*] – это udноосновная алгебраическая система $\langle A; * \rangle$, где A – ***носитель группы*** (непустое конечное или бесконечное множество *элементов группы*), а $*$ – определённая на A бинарная ***групповая операция***, удовлетворяющая следующим четырём свойствам:

1) замкнутости: $(a * b) \in A$ для любых элементов $a, b \in A$;

2) ассоциативности: $a * (b * c) = (a * b) * c$ для любых элементов $a, b, c \in A$;

3) тождественности: существует *единичный элемент* $\boldsymbol{e} \in A$ относительно операции $*$, такой, что $a * e = e * a = a$ для любого элемента $a \in A$;

4) обращения: для любого элемента $a \in A$ существует *обратный элемент* $\boldsymbol{a^{-1}} \in A$, такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Порядком группы называется мощность её носителя ($|A|$).

Подстановкой называется взаимно однозначное отображение конечного множества объектов на себя. Любая конечная группа изоморфна некоторой группе, носителем которой является множество подстановок, а групповой операцией – произведение (композиция) подстановок. Если подстановки группы действуют на множестве X, ***степенью группы подстановок*** называется мощность множества X ($|X|$).

Определение I.80. ***Подгруппа*** [*subgroup*] – подмножество элементов группы, которое само является группой с той же групповой операцией. Другими словами, подмножество $B \subseteq A$ образует подгруппу $\langle B;* \rangle$ группы $\langle A;* \rangle$, если и только если:

1) B замкнуто относительно операции $*$ ($\forall a, b \in B : \{a * b \in B\}$);

2) единичный элемент принадлежит B ($e \in B$);

3) любой элемент принадлежит B вместе с обратным ему элементом ($\forall a \in B : \{a^{-1} \in B\}$).

Определение I.81. ***Автоморфизм*** [*automorphism*] графа – подстановка g на множестве вершин V, сохраняющая отношение смежности, то есть

$$g\colon \forall v, u \in V\ [(\{v, u\} \in E) \Leftrightarrow (\{g(v), g(u)\} \in E)].$$

Множество всех автоморфизмов графа образует группу подстановок, которая называется ***группой автоморфизмов*** [*automorphism group*] *графа* (ГАГ) и обозначается через $Aut(G)$. Степень ГАГ равна числу вершин графа. Единичный элемент ГАГ называется ***тождественным автоморфизмом*** [*identity automorphism*] и, очевидно, представляет собой тождественную подстановку.

Определение I.82. ***Порождающее множество*** [*generating set*] группы автоморфизмов графа (ПМ ГАГ) – подмножество её автоморфизмов $AGS(G) \subseteq Aut(G)$ что любой автоморфизм $g \in Aut(G)$ может быть получен композицией элементов из $AGS(G)$, то есть $g = f_1 * \ldots * f_p$, где $f_1, \ \ldots, \ f_p \in AGS(G)$.

Известны различные варианты ПМ,

Определение I.83. ***Фиксатор*** [*pointwise stabilizer*] *вершины* $v \in V$ – подгруппа $Aut(G, v)$, оставляющая неподвижной вершину v, то есть

$$Aut(G, v) = \{g \in Aut(G): g(v) = v\}.$$

Фиксатор вершины полностью эквивалентен стабилизатору вершины!

Определение I.84. ***Фиксатор*** [*pointwise stabilizer*] ***подмножества*** *вершин* $V^0 \subset V$ – подгруппа $Aut(G,\ V^0)$, оставляющая неподвижной каждую вершину множества V^0, то есть:

$$Aut(G, V^0) = \bigcap_{v \in V^0} Aut(G, v).$$

Определение I.85. ***Стабилизатор*** [*setwise stabilizer*] ***подмножества*** *вершин* $V^1 \subset V$ – подгруппа $Aut[G,\ V^1]$, оставляющая множество V^1 неподвижным, то есть

$$Aut[G, V^1] = \{g \in Aut(G): \forall v \in V^1[g(v) \in V^1]\}.$$

Определение I.86. ***Орбита*** [*orbit*] *вершины* $v \in V$ – подмножество $Aut(G, v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину v:

$$\Theta(Aut(G), v) = \{v': [\exists g \in Aut(G): [g(v' = v)]]\}.$$

Определение I.87. ***Орбита вершины*** $v \in V$ ***относительно фиксатора*** $Aut(G, V^0)$ – подмножество $\Theta(Aut(G, V^0), v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину *v* при условии фиксации подмножества $V^0 \subset V$:

$$\Theta(Aut(G, V^0), v) = \{v': [\exists g \in Aut(G, V^0): [g(v') = v]]\}.$$

Определение I.88. ***Орбита вершины*** $v \in V$ ***относительно стабилизатора*** $Aut[G, V^1]$ – подмножество $\Theta(Aut[G, V^0], v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину *v* при условии стабилизации подмножества $V^1 \in V$:

$$\Theta(Aut[G, V^1], v) = \{v': [\exists g \in Aut[G, V^1]: [g(v') = v]]\}$$

Если ясно, о какой группе (подгруппе) идёт речь, то вместо $\Theta(Aut \ldots, v)$ можно написать просто $\Theta(v)$.

К определению орбит можно подойти и с позиции бинарных отношений. Вершины v и u *принадлежат одной орбите группы* **(***фиксатора группы***,** *стабилизатора группы***)**, если существует автоморфизм $g \in Aut(G)$ ($g \in Aut(G, V^0)$, $g \in Aut[G, V^1]$), отображающий одну из них в другую, то есть $g(v) = u$. Принадлежность к одной орбите – отношение эквивалентности на множестве вершин графа. Действительно, для него выполняются свойства:

1) рефлексивности ($e(v) = v$);
2) симметричности (если $g(v) = u$, то $g^{-1}(u) = v$);
3) транзитивности (если $g(v) = u$ и $h(u) = w$, то $(g * h)(v) = w$).

Таким образом множество вершин разбивается на непересекающиеся ***орбиты*** $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$, где s – число орбит. Опишем *каноническую нумерацию* орбит: первой орбитой будет орбита, содержащая вершину с индексом 1, второй – орбита, содержащая вершину с минимальным индексом среди вершин, не входящих в первую орбиту, и так далее: (1,7,10,11), (2,6,9,12), (3,5), (4,8), (13,15,17), (14,16). ***Структурой орбит*** называется вектор мощностей орбит в порядке их канонической нумерации (4,4,2,2,3,2). Часто также вектор мощностей орбит сортируют в порядке возрастания мощности (2,2,2,3,4,4) и записывают в сокращённой форме, указывая количества орбит одинаковой мощности верхним индексом ($2^3 3^1 4^2$).

Заметим, что из-за разницы в подходах к определению орбит возникает определённая терминологическая проблема, выражающаяся в разном смысле фраз «орбита фиксатора группы» и «орбита вершины графа», но в одинаковом смысле фраз «орбита фиксатора $Aut(G,v)$, включающая вершину u» и «орбита вершины u относительно фиксатора $Aut(G,v)$». Однако, как правило, из контекста понятно, о какой орбите идёт речь.

Определение I.89. *Тождественный* [*identity*, *asymmetric*] граф – граф, все вершины которого принадлежат разным орбитам ($s = p$), то есть ГАГ состоит из единственного тождественного автоморфизма ($Aut(G) \approx E_p$ – единичная группа). Если граф не тождественен, то говорят, что он *обладает симметрией*.

Определение I.90. ***Транзитивный*** [*transitive*] граф – граф, все вершины которого принадлежат одной орбите ($s = 1$).

Определение I.91. ***Симметрический*** [*symmetric*] граф – транзитивный граф, у которого группа автоморфизмов действует транзитивно на рёбрах:

$$\forall \{v,u\},\{v',u'\} \in E: \left[\exists g \in Aut(G): [(g(v) = v')\&(g(u) = u')]\right].$$

Определение I.92. ***Дистанционно-транзитивный*** [*distance-transitive*] граф – транзитивный граф, у которого для любых двух пар вершин, находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга, существует автоморфизм, переводящий первую пару во вторую:

$$\forall v,u,v',u' \in V: \begin{bmatrix} \big(d(v,u) = d(v',u')\big) \Rightarrow \\ (\exists g \in Aut(G): [(g(v) = v')\&(g(u) = u')]) \end{bmatrix}$$

где $d(v,u)$ – расстояние между вершинами v и u.

Определение I.93. Граф ***с регулярной группой*** – транзитивный граф с тождественным фиксатором вершины:

$$(\forall v \in V: [\Theta(Aut(G),v) = V])\&\big(\forall v \in V: \left[Aut(G.v) \approx E_p\right]\big).$$

Определение I.94. Подмножество вершин $V^+ \subset V$ называется ***экстремальным подмножеством тождественной стабильности*** графа, если справедливо

$$\left(Aut(G,V^{+}) \approx E_p\right)\&\left(\forall v \in V^{+}: \left[Aut(G,V^{+}\backslash\{v\}) \not\approx E_p\right]\right).$$

Определение I.95. Подмножество вершин $V^{-} \subset V$ называется ***экстремальным подмножеством нетождественной стабильности*** графа, если справедливо

$$\left(Aut(G,V^{-}) \not\approx E_p\right)\&\left(\forall v \in V\backslash V^{-}: \left[Aut(G,V^{-} \cup \{v\}) \approx E_p\right]\right).$$

Определение I.96. Пусть Π^{+} и Π^{-} обозначают соответственно множество всех подмножеств V^{+} и V^{-} вершин графа G. Тогда $\psi = \min\limits_{V^{+}\in\Pi^{+}}|V^{+}|$ – ***число тождественной стабильности*** графа, а $\chi = \max\limits_{V^{-}\in\Pi^{-}}|V^{-}|$ – ***число нетождественной стабильности*** графа. Таким образом, число тождественной стабильности графа представляет собой минимальную мощность подмножества вершин графа, относительно которого фиксатор группы автоморфизмов является тождественным, а число нетождественной стабильности графа представляет собой максимальную мощность подмножества вершин графа, относительно которого фиксатор группы автоморфизмов не является тождественным. Для тождественного графа по определению $\psi = 0,\ \chi = -1$.

Определение I.97. ***Число тождественности*** [*identity number*] $t(G)$ (или $ID\_NUM(G)$) графа G – минимальное число новых вершин, необходимых для построения тождественного надграфа OG графа G, то есть

$$t(G) = \min_{Aut(OG)\approx E_p}(|V_{OG}| - |V_G|).$$

Известно, что любой автоморфизм из $Aut(G)$ может быть единственным образом представлен в виде произведения непересекающихся циклов. Через $j_k(g)$ обозначим число циклов длины $k = 1, \dots, p$ в разложении автоморфизма $g \in Aut(G)$ в произведение непересекающихся циклов.

Определение I.98. **Цикловой индекс ГАГ** представляет собой многочлен от переменных $z_1, z_2, \dots, z_p$, определяемый формулой:

$$Z\left(Aut(G)\right) = \frac{1}{|Aut(G)|}\sum_{g\in Aut(G)}\prod_{k=1}^{p} z_k^{j_k(g)}.$$

Группы, имеющие одинаковый цикловой индекс, называются *комбинаторно-эквивалентными* [*combinatorially equivalent*], а графы с такими группами – *графами с комбинаторно-эквивалентными группами*.

Раздел 4. Определения, связанные с определением понятия «фрагмент графа»

Мы будем придерживаться мнения, что понятие «*фрагмент*» возникает только в контексте наличия объекта, частью которого данный фрагмент является. То есть говорить о фрагменте графа без самого графа бессмысленно. Формализацию понятия «фрагмент» проведём с использованием понятия *канонического изоморфного вложения*.

4.1. Фрагменты графа и помеченные фрагменты

Определение I.99. *Абстрактный тип* или *абстрактный граф* [*abstract graph*] (t) – произвольный граф, определённый с точностью до автоморфизма. Группу его вершинных автоморфизмов (также с точностью до изоморфизма) обозначим через $Aut(t)$.

Определение I.100. Граф t назовём *фрагментом* графа G, если t изоморфно вкладывается в G в некотором смысле.

В большинстве случаев будем считать, что смысл изоморфного вложения определён заранее.

Определение I.101. *Помеченным графом* [*labeled graph*] называется граф, каждой вершине которого сопоставлен уникальный вес (*пометка*), то есть каждая вершина которого имеет уникальный атрибут. Наличие пометок будем обозначать верхним индексом «$\ldots^{(l)}$». Понятие пометок вершин графа отличается от понятия *нумерации* (идентификации) вершин с целью хранения структурной информации.

Определение I.102. *Помеченным фрагментом* [*labeled fragment*] $f^{(l)t}$ типа t графа G назовём помеченный граф $t^{(l)}$, пометками которого являются вершины графа G, образующие (вместе с некоторыми инцидентными им рёбрами) часть графа G, изоморфную t. Через $F^{(l)t}(G) = \{ f_1^{(l)t}, f_2^{(l)t}, \ldots, f_m^{(l)t}\}$ обозначим множество всех помеченных фрагментов типа t графа G.

Для различения абстрактного типа и типов реальных фрагментов графа будем называть тип фрагмента с заданной нумерацией вершин *идентификационным типом*. Специального обозначения вводить не будем, так как из контекста обычно ясно, введена нумерация вершин или нет. Не ограничивая общности, можно считать, что вершины нумеруются числами из натурального ряда: $(1, 2, \ldots, p)$, где p – число вершин графа. Если на множестве вершин абстрактного типа фрагмента t и графа G задана нумерация, то помеченный фрагмент графа $f^{(l)t}$ может быть представлен различными изоморфными вложениями – отображениями номеров вершин t в номера вершин G. Число изоморфных вложений, представляющих один и тот же помеченный фрагмент графа, равняется порядку группы автоморфизмов абстрактного типа ($|Aut(t)|$). Таким образом, число всех изоморфных вложений фрагмента типа t в граф G равно $|F^{(l)t}(G)| \cdot |Aut(t)|$.

Помеченный фрагмент удобно представлять одним из изоморфных вложений, которое назовём каноническим.

Определение I.103. *Каноническим* будем считать то из изоморфных вложений, образующих фрагмент $f^{(l)t}$ графа G, у которого список номеров вершин графа G, в порядке нумерации вершин типа фрагмента t, лексикографически минимален.

Переход от неканонического представления помеченного фрагмента к каноническому назовём *канонизацией представления* фрагмента. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между помеченными фрагментами и каноническими изоморфными вложениями. Рис. I.1 иллюстрирует связь между понятиями, рассмотренными выше. Пример канонизации представления помеченного фрагмента (частичного подграфа) показан на рис. i.2.

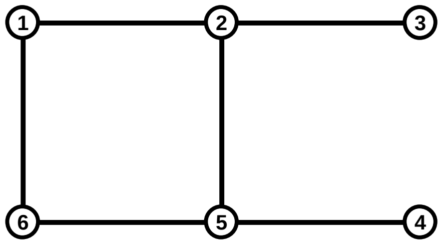
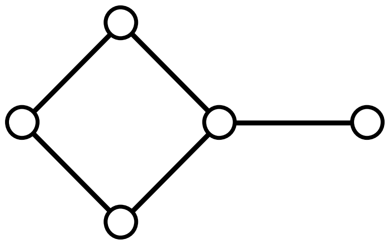
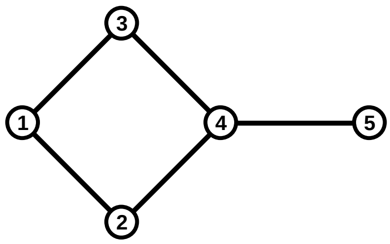
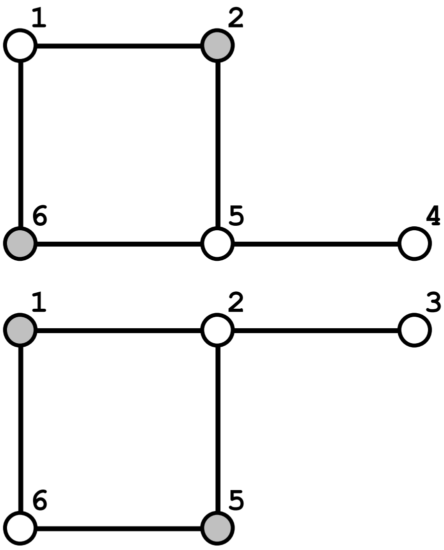
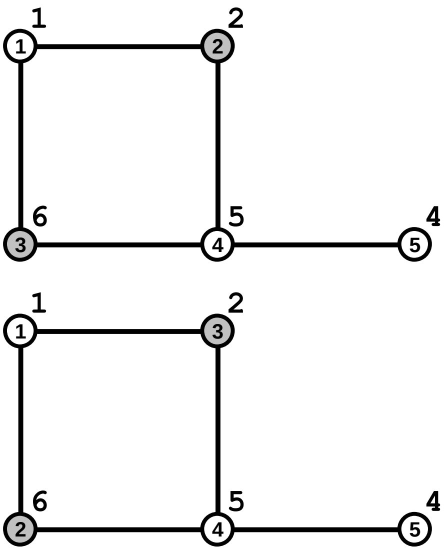
	Граф G с нумерацией вершин (можно сказать, что это помеченный граф или идентификационный тип)
	Абстрактный тип t
	Идентификационный тип $t^{(l)}$

Рис. I.1. Пример помеченных фрагментов (начало)

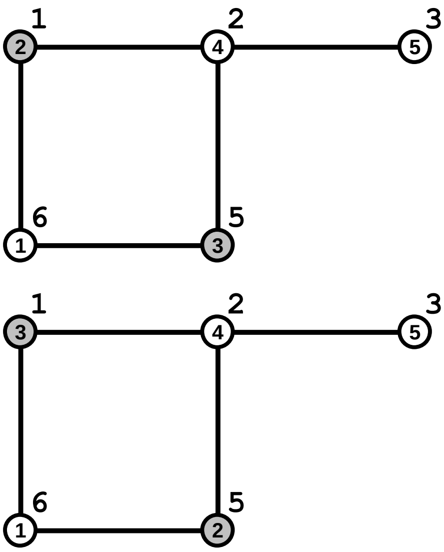


Два помеченных фрагмента типа t графа G ($f_1^{t(l)}$ и $f_2^{t(l)}$).
Серым цветом залиты вершины, принадлежащие единственной нетривиальной орбите фрагмента.



Два изоморфных вложения идентификационного типа t^l в граф G (представляющие один и тот же помеченный фрагмент $f_1^{t(l)}$).

Вложение (1, 2, 6, 5, 4) – каноническое (лексикографически меньшее).
Вложение (1, 6, 2, 5, 4) – *не*каноническое.

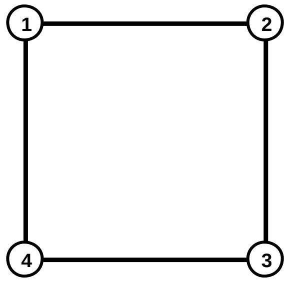


Два изоморфных вложения идентификационного типа $t^{(l)}$ в граф G (представляющие один и тот же помеченный фрагмент $f^{t(l)}{}_2$).

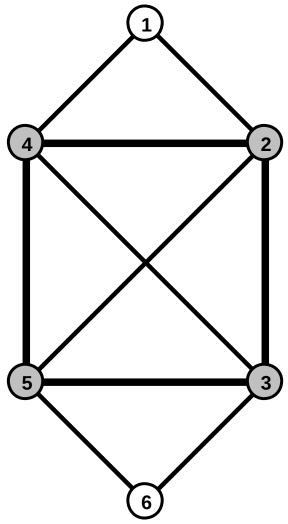
Вложение (6, 1, 5, 2, 3) – каноническое (лексикографически меньшее).
Вложение (6, 5, 1, 2, 3) – *не*каноническое.

Рис. I.1. Пример помеченных фрагментов (начало)

(продолжение)



Идентификационный тип t
(с заданной нумерацией вершин)



Граф с выделением фрагмента типа t

Помеченный фрагмент типа t вложен в граф в смысле частичного подграфа (выделен заливкой вершин и утолщением рёбер).

Множество вершин фрагмента – **{2, 3, 4, 5}**.

Каноническое представление – **(2, 3, 5, 4)**.

Порядок вершинной группы абстрактного типа фрагмента $|Aut(t)| = 8$.
Следовательно, существует ещё семь неканонических представлений данного фрагмента:
(2, 4, 5, 3), **(3, 2, 4, 5)**, **(3, 5, 4, 2)**, **(4, 2, 3, 5)**,
(4, 5, 3, 2), **(5, 3, 2, 4)**, **(5, 4, 2, 3)**.

Такое же множество вершин имеют и другие помеченные фрагменты. Их канонические представления:
(2, 3, 4, 5) и **(2, 4, 3, 5)**.

Рис. I.2. Пример канонизации представления фрагмента графа

4.2. Определения, связанные с расположением фрагментов в топологии графа

Определение I.104. t-*автоморфизмом* графа G называется подстановка g' на множестве помеченных фрагментов типа t графа G (или канонических изоморфных вложений) $F^{(l)t}(G)$, индуцированная некоторым вершинным автоморфизмом g графа G. В процессе индуцирования помеченный фрагмент $f_i^{(l)t} \in F^{(l)t}(G)$, представленный каноническим изоморфным вложением $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ графа G, переходит в помеченный фрагмент $f_j^{(l)t} \in F^{(l)t}(G)$, каноническое представление которого получено *канонизацией* вложения $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, где $u_i = g(v_i), i \in [1, n]$, n – число вершин фрагмента.

Приведённое определение t-автоморфизма не зависит от нумерации вершин графа и абстрактного типа фрагмента. Действительно, пусть перенумерация графа задаётся перестановкой номеров δ и перенумерация типа фрагмента – перестановкой номеров γ. Как известно, группы автоморфизмов исходного и перенумерованного графов идентичны: $\delta(\mu(v)) = \mu^{\delta}(\delta(v))$, где $\mu \in Aut(G)$, и $\gamma\big(\lambda(v)\big) = \lambda^{\gamma}(\gamma(v))$, где $\lambda \in Aut(t)$. Канонизация представления помеченного фрагмента по сути является применением некоторого автоморфизма из $Aut(t)$ к неканоническому изоморфному вложению. Поэтому изменение нумерации будет приводить лишь к выбору других канонических представлений помеченных фрагментов.

Определение I.105. *Группой t-автоморфизмов* графа G ($Aut^t(G)$, t-группа) называется группа подстановок, носителем которой является всё множество t-автоморфизмов для данного t, а групповой операцией – операция произведения (композиции) подстановок.

Тот факт, что множество t-автоморфизмов образует группу, непосредственно следует из свойств ГАГ. Степень t-группы равна числу канонических изоморфных вложений абстрактного типа t в граф G ($\left|F^{(l)t}(G)\right|$), а порядок меньше или равен порядку вершинной группы, так как два различных нетождественных вершинных автоморфизма могут индуцировать один и тот же t-автоморфизм. Все понятия, связанные с анализом $Aut^t(G)$, определяются абсолютно аналогично понятиям, связанным с анализом $Aut(G)$ (например, t-фиксатор, t-стабилизатор и т.д.). t-группа полностью характеризует симметрию фрагментов типа t в графе так же, как ГАГ характеризует симметрию вершин.

Заметим, что нестрого можно определить *автоморфные помеченные фрагменты*, без привлечения $Aut^t(G)$, как помеченные фрагменты, переходящие друг в друга при автоморфизмах исследуемого графа.

Раздел 5. Обозначения основных классов графов и фрагментов графов

G – множество всех обыкновенных графов.

G^c – множество всех связных обыкновенных графов.

$G^{(l)}$ – множество всех помеченных обыкновенных графов.

tV – семейство одновершинных графов.

tE – семейство цепей длины 1 (рёбер).

tP – семейство ациклических графов, степень вершин которых не превосходит 2 (первый представитель – цепь длины 0, то есть вершина).

tP^c – семейство графов – простых цепей.

Если необходимо выделить цепи с заданным диапазоном длин, будем добавлять нижний индекс $(n1 - n2)$, например, $tP^c_{(0-5)}$ – цепи длины от 0 до 5.

tC – семейство графов, степень всех вершин которых равна 2 (первый представитель – цикл длины 3).

tC^c – семейство графов – простых циклов.

tT – семейство графов – лесов.

tT^c – семейство графов – деревьев.

tK – семейство полных графов.

tF^c – семейство всех связных обыкновенных графов (совпадает с G^c).

tF – семейство всех обыкновенных графов (совпадает с G).

5.1. Конкретные графы

K_n – полный граф (клика) на n вершинах.

$K_{n,m}$ – полный двудольный граф с долями с числом вершин n и m.

5.2. Фрагменты графа

$F(G)$ – множество всех собственных фрагментов графа G (то есть графов, изоморфно вкладываемых в G).

$F^l(G)$ – множество всех помеченных фрагментов графа G.

Часть II. Примеры

Раздел 1. Примеры группы вершин и *t*-группы

Рассмотрим группу автоморфизмов транзитивного графа «8-4-3», изображённого на Рис. II.1.

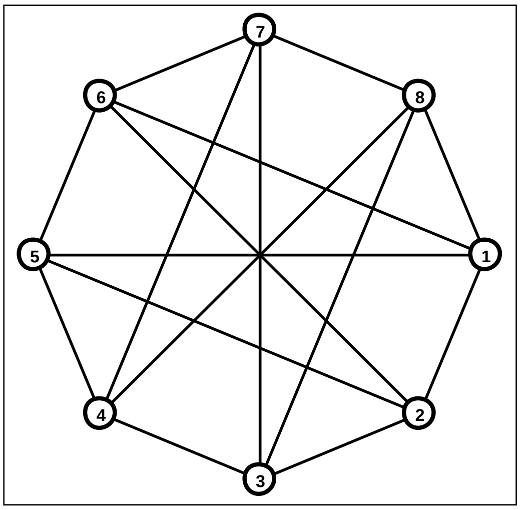


Рис. II.1. Граф 8-4-3

Порядок группы автоморфизмов – 48.

Порядок порождающего множества – 11.

Автоморфизмы графа представлены в табл. 1.2 (неподвижные точки выделены жирным шрифтом; автоморфизмы, входящие в ПМ, залиты серым цветом).

Характеристики стабильности: $\psi = \mathbf{3}$; $\chi = \mathbf{4}$; одно из $V^+ = (1, 2, 4)$; одно из $V^+ = (1, 2, 3, 8)$. Π^- содержит 6 подмножеств мощности 4.

Число тождественности: $t(G) = 2$.

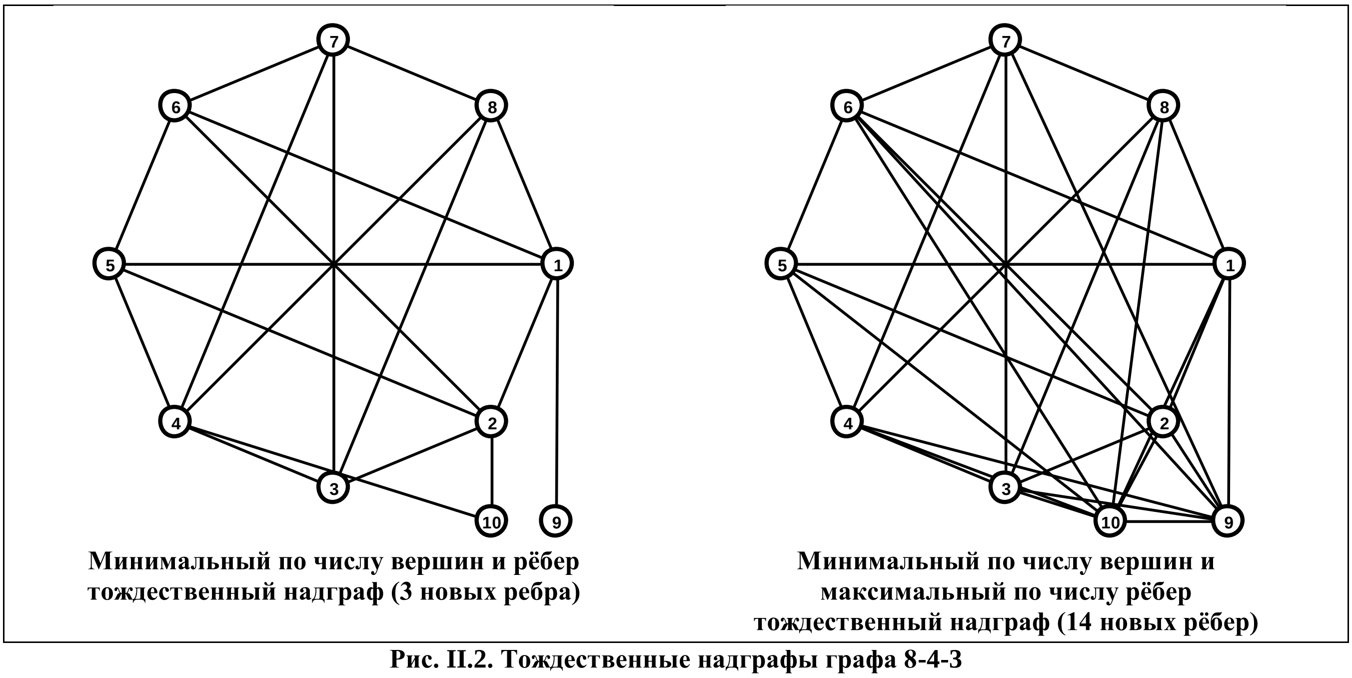


Рис. II.2. Тождественные надграфы графа 8-4-3

Цикловой индекс:

$$Z\big(Aut(G)\big) = \frac{1}{48}\left(8 \cdot z_1^2 z_3^2 + 6 \cdot z_1^4 z_2^2 + z_1^8 + 8 \cdot z_2 z_6 + 13 \cdot z_2^4 + 12 \cdot z_4^2\right).$$

Таблица II.1. Автоморфизмы графа 8-4-3

		Вершины							
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Автоморфизмы	*1*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	2	**1**	**2**	**3**	7	6	5	4	**8**
	3	**1**	5	4	3	2	**6**	**7**	**8**
	4	**1**	5	4	7	6	2	3	**8**
	5	**1**	6	7	3	2	5	4	**8**
	6	**1**	6	7	**4**	**5**	2	3	**8**
	7	2	1	8	**4**	**5**	**6**	**7**	3
	8	2	1	8	7	6	5	4	3
	9	2	5	4	7	6	1	8	3
	10	2	5	4	8	1	**6**	**7**	3
	11	2	6	7	**4**	**5**	1	8	3
	12	2	6	7	8	1	5	4	3
	13	3	4	5	1	8	7	6	2
	14	3	4	5	6	7	8	1	2
	15	3	7	6	1	8	4	5	2
	16	3	7	6	5	4	8	1	2
	17	3	8	1	5	4	7	6	2
	18	3	8	1	6	7	4	5	2
	19	4	3	2	1	8	7	6	5
	20	4	3	2	6	7	8	1	5
	21	4	7	6	1	8	3	2	5
	22	4	7	6	2	3	8	1	5
	23	4	8	1	2	3	7	6	5
	24	4	8	1	6	7	3	2	5
	25	5	1	8	3	2	**6**	**7**	4
	26	5	1	8	7	6	2	3	4
	27	5	**2**	**3**	7	6	1	8	4
	28	5	**2**	**3**	8	1	**6**	**7**	4
	29	5	6	7	3	2	1	8	4
	30	5	6	7	8	1	2	3	4
	31	6	1	8	3	2	5	4	7
	32	6	1	8	**4**	**5**	2	3	7
	33	6	**2**	**3**	**4**	**5**	1	8	7
	34	6	**2**	**3**	8	1	5	4	7
	35	6	5	4	3	2	1	8	7
	36	6	5	4	8	1	2	3	7
	37	7	3	2	1	8	4	5	6
	38	7	3	2	5	4	8	1	6
	39	7	4	5	1	8	3	2	6
	40	7	4	5	2	3	8	1	6
	41	7	8	1	2	3	4	5	6
	42	7	8	1	5	4	3	2	6
	43	8	3	2	5	4	7	6	1
	44	8	3	2	6	7	4	5	1
	45	8	4	5	2	3	7	6	1
	46	8	4	5	6	7	3	2	1
	47	8	7	6	2	3	4	5	1
	48	8	7	6	5	4	3	2	1

Таблица II.2. Автоморфизмы фиксатора вершины 1 (он же стабилизатор)

		Вершины							
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Авт-мы	*1*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	2	**1**	**2**	**3**	7	6	5	4	**8**
	3	**1**	5	4	3	2	**6**	**7**	**8**
	4	**1**	5	4	7	6	2	3	**8**
	5	**1**	6	7	3	2	5	4	**8**
	6	**1**	6	7	**4**	**5**	2	3	**8**

Орбиты фиксатора вершины 1: (1)(2,5,6)(3,4,7)(8) – 4 орбиты.

Структура орбит фиксатора: $1^2 3^2$.

Таблица II.3. Автоморфизмы фиксатора вершин 1 и 2

		Вершины							
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
	1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	2	**1**	**2**	**3**	7	6	5	4	**8**

Орбиты фиксатора вершин 1 и 2: (1)(2)(3)(4,7)(5,6)(8) – 6 орбит.

Структура орбит фиксатора: $1^4 2^2$.

Таблица II.4. Автоморфизмы стабилизатора вершин 1 и 2

		Вершины							
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
	1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	2	**1**	**2**	**3**	7	6	5	4	**8**
	3	2	1	8	**4**	**5**	**6**	**7**	3
	4	2	1	8	7	6	5	4	3

Орбиты стабилизатора вершин 1 и 2: (1,2)(3,8)(4,7)(5,6), то есть 4 орбиты.

Структура орбит стабилизатора: 2^4.

Рассмотрим также небольшую группу *t*-автоморфизмов графа 9-4-1, изображённого на рис. II.3.

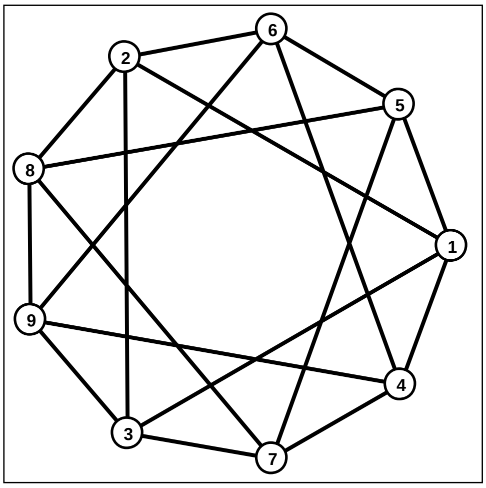


Рис. II.3. Граф 9-4-1

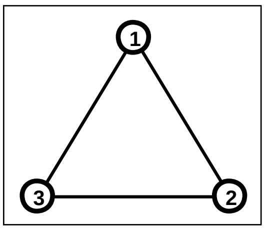


Рис. II.4. Тип фрагмента (*t*) – цикл длины 3

Порядок группы вершинных автоморфизмов – 18.

Количество циклов длины 3 = 3.

Порядок t-группы = 6. Отметим тот факт, что порядок t-группы меньше порядка вершинной группы.

Порядок порождающего множества $|Aut^{C_3}(G)| = 4$.

t-автоморфизмы (где $t = C^3$) графа 9-4-1 содержатся в табл. II.5 (фрагменты представлены каноническим списком вершин; неподвижные точки выделены жирным шрифтом; автоморфизмы, входящие в ПМ, залиты серым цветом).

Таблица II.5. *t*-автоморфизмы графа 9-4-1

		Циклы длины 3		
		1	*2*	*3*
Авт-мы	*1*	**(1,2,3)**	**(4,6,9)**	**(5,7,8)**
	2	**(1,2,3)**	(5,7,8)	(4,6,9)
	3	(4,6,9)	(5,7,8)	(1,2,3)
	4	(4,6,9)	(1,2,3)	**(5,7,8)**
	5	(5,7,8)	**(4,6,9)**	(1,2,3)
	6	(5,7,8)	(1,2,3)	(4,6,9)

Эта группа имеет одну орбиту.

Цикловой индекс:

$$Z\left(Aut^{C_3}(G)\right) = \frac{1}{6}(3 \cdot z_1 z_2 + z_1^3 + 2 \cdot z_3).$$

Часть III. Справочный аппарат

Раздел 1. Рекомендуемые источники информации

1.1. Использованные публикации

1. **Берж К.** Теория графов и её применения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1967. – 320 с.
2. **Айгнер М.** Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558 с.
3. **Зыков А.А.** Основы теории графов. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
4. **Оре О.** Графы и их применение. – 3-е изд. – М.: КомКнига, 2006. – 172 с.
5. **Харари Ф.** Теория графов. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.
6. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / **Нечепуренко М.И., Попков В.К., Кохов В.А. и др.** – Новосибирск: Наука, 1990. – 515 с.
7. **Seress Ákos.** Permutation Group Algorithms. – Cambridge University Press, 2003. – 274 с.
8. Wolfram MathWorld / Graph Theory (http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html)
9. Handbook of Graph Theory. Edited by **Gross J.L., Yellen J., Zhang P.** – 2th ed. – CRC Press, 2014. – 1632 p.
10. Handbook of Graph Drawing and Visualization. Edited by **Tamassia R.** – CRC Press, 2013. – 862 p.

1.2. Прочие публикации

1.2.1. Математика для программистов (дискретная)

11. **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. 3-е издание. – СПб.: Питер, 2008. – 384 с.
12. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998. – 703 с.
13. **Хаггарти Р.** Дискретная математика для программистов, 2-е изд. – Техносфера, 2005. – 400 с.
14. **Андерсон Д.** Дискретная математика и комбинаторика. – Вильямс, 2016. – 960 с.
15. **Айгнер М.** Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558 с.
16. **Гэри М., Джонсон Д., и др.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 420 с.

1.2.2. Теория графов

17. **Татт У.** Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
18. **Bollobas B.** Modern Graph Theory. – Corrected ed. – Springer, 2013. – 394 p.
19. **Steen M.** Graph Theory and Complex Networks: An Introduction. – 2010. – 300 p.
20. **Godsil C., Royle G.F.** Algebraic Graph Theory. – Springer, 2001. – 443 p.

1.2.3. Построение эффективных алгоритмов

21. **Левитин А.В.** Алгоритмы: введение в разработку и анализ. – М. : Вильямс, 2006. – 576 с.
22. **Вирт Н.** Алгоритмы и структуры данных. – СПб. : Невский Диалект, 2001. – 352 с.

23. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Структуры данных и алгоритмы.: Пер. с англ.: Уч. пос. – М. : Вильямс, 2000. – 384 с.
24. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.** Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. – М.: Вильямс, 2013. – 1328 с.
25. **Седжвик Р.** Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах: Пер. с англ. – СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2002. – 496 с.
26. **Седжвик Р.** Фундаментальные алгоритмы на C. Часть 5: Алгоритмы на графах. – СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2003. – 480 с.
27. **Липский В.** Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 213 с.
28. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
29. **Майника Э.** Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 323 с.
30. **Зубов В.С., Шевченко И.В.** Структуры и методы обработки данных. Практикум в среде Delphi. – М. : ФИЛИНЪ, 2004. – 304 с.
31. **Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А.** Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – Спб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
32. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / **Нечепуренко М.И., Попков В.К., Кохов В.А. и др.** – Новосибирск: Наука, 1990. – 515 с.
33. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 476 с.

1.3. Некоторые Интернет-источники

34. **Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А.** Толковый словарь по теории графов (http://pco.iis.nsk.su/grapp)
35. Wolfram MathWorld / Graph Theory (http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html)
36. Graph Theory Glossary by Chris Caldwell, 1995 (http://primes.utm.edu/graph/glossary.html)
37. Дискретная математика: алгоритмы (http://rain.ifmo.ru/cat/view.php)

Раздел 2. Список общепринятых аббревиатур

1. **ГАГ** [*GAG*] – Группа Автоморфизмов Графа.
2. **ГМС** [*GM*] – Графовая Модель Системы.
3. **ВНЕУП** [-] – ВНЕшне Устойчивое Подмножество.
4. **ВНУУП** [-] – ВНУтренне Устойчивое Подмножество.
5. **МОФ** [*MCS*] – Максимальный Общий Подграф.
6. **ПМ** [*GS*] – Порождающее Множество.

Раздел 3. Терминологический указатель