Сжатие изображений с помощью SVD разложения

Аннотация

Сингулярным разложением (SVD, Singular value decomposition) матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ называется ее представление в виде

$$A = U\Sigma V^T,$$

где $\Sigma \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}^+)$ — диагональная матрица, элементы главной диагонали которой — сингулярные числа матрицы A; $U \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$, $V \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — ортогональные матрицы, элементы которых — левые и правые сингулярные вектора.

Введём норму Фробениуса матрицы как

$$\|A\|_f = \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)},$$

где $\mathrm{tr}(A^TA)$ — след матрицы A^TA. Обозначим через A_r матрицу ранга $r < \mathrm{rang}\, A$. Возникает вопрос: как найти матрицу A_r наименее отличающуюся от A по норме Фробениуса (т.е. найти такую A_r, что $\|A - A_r\|_f$ будет минимальна). Это можно сделать с помощью сингулярного разложения.

Теорема. Пусть Σ_r — матрица полученная из Σ заменой части диагональных элементов нулями: $\sigma_{ii} = 0$, $i > r$. Тогда $A_r = U\Sigma_r V^T$.

Последнее равенство можно переписать еще в более экономичном виде: $A_r = U_r\hat{\Sigma}_r V_r^T$, где матрицы U_r, V_r и Σ_r получаются из U, V, Σ_r отсечением неиспользуемых элементов:

$$U_r = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mr} \end{pmatrix},\ V_r = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1r} & \dots & v_{nr} \end{pmatrix},\ \hat{\Sigma}_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{rr} \end{pmatrix}$$

Если сингулярные значения матрицы убывают достаточно быстро (а, оказывается, в реальных задачах часто это именно так), то норма разности будет малой при небольшом значении r.

Очевидно, что вместо хранения исходной матрицы A (размера $m \times n$) можно хранить матрицы U_r и V_r и диагональные элементы матрицы $\hat{\Sigma}_r$ (т.е. вместо хранения $m \times n$ элементов мы будем хранить $mr + nr + r = r(m + n + 1)$ элементов, где r мало). На этом основано сжатие данных с помощью SVD разложения.

Обозначим через $u_1, \dots u_m$ столбцы матрицы U, а через $v_1, \dots, v_n$ — столбцы матрицы V. Тогда разложение матрицы A имеет вид

$$A = u_1\sigma_{11}v_1^T + u_2\sigma_{22}v_2^T + \dots$$

Матрица $H_k = u_k\sigma_{kk}v_k^T$ называется k-ой главной компонентой матрицы A. Тогда $A_r = \sum\limits_{k=1}^{r} H_k$.

Все растровые изображения в компьютере хранятся в виде матриц: черно-белое изображение — одна матрица (матрица интенсивностей серого цвета), цветное — 3 матрицы (матрицы интенсивностей красного, зеленого и синего цветов). Ваша задача состоит в исследовании SVD разложения для реальной матрицы.

Задачи

1. Изучите функции импорта и экспорта данных в пакет. Загрузите черно-белое изображение растрового формата (jpg, bmp,...) в пакет. Визуализируйте загруженные данные.

2. Реализуйте функцию, которая вычисляет SVD разложение полученной в результате импорта изображения матрицы и нарисуйте график диагональных элементов матрицы Σ. Какой вывод вы можете сделать из графика?

3. Визуализируйте первую главную компоненту. Визуализируйте суммы главных компонент с 1 по 20, с 1 по 50, с 20 по 100, с 100 по последнюю. Какие выводы вы можете сделать?

4. Ответьте на главный вопрос — какое оптимальное число r нужно взять для достаточно хорошего восстановления исходного изображения? Каков критейрий выбора r? Во сколько раз меньше памяти потребуется для их хранения?

5. Проверьте выбранный вами критерий для различных изображений.

Дополнительная задача: Как быть с цветными изображениями — какие будут особенности выбора r в этом случае? Реализуйте модуль сжатия и восстановления для цветных изображений.