X Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике

***Высшая лига.* <u>I тур.</u>** *20 ноября 2009 года. г.Ижевск*

1. На столе лежат $n\geq 3$ карточек, занумерованных числами от 1 до n. Два игрока по очереди берут по одной карточке. Первый стремится к тому, чтобы сумма номеров взятых их карточек оказалась в итоге простым числом. При каких натуральных n второй игрок может ему помешать?
2. Все грани выпуклого многогранника - параллелограммы. Может ли он иметь ровно 2009 граней?
3. Действительные числа a, b, c, d и многочлен третьей степени $P(x)$ таковы, что $P(a) =b+c+d$, $P(b) =a+c+d$, $P(c) =a+ b+d$, $P(d) =a+b+c$. Докажите, что какие-то два числа из данных равны между собой.
4. a, b, c, d – натуральные числа, причем $ab = cd$. Доказать, что число $a + b + c + d$ составное.
5. В треугольник вписаны две касающиеся друг друга окружности. Одна касается AB и AC, другая AB и BC. Доказать, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.
6. H - ортоцентр остроугольного треугольника ABC, D - середина стороны AC. Прямая, проходящая через H перпендикулярно отрезку DH, пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Докажите, что HE = HF.
7. Есть граф, в вершинах которого стоят некоторые попарно различные числа. Разрешается прибавить одно и то же число к числам в двух смежных вершинах. С помощью таких операций удалось получить все перестановки начальных чисел в вершинах. Докажите, что в графе есть нечётный цикл.
8. Найдите все положительные корни уравнения
$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right).$$
9. Найдите все функции $f\colon (0;+\infty)\to(0;+\infty)$, для которых при положительных x и y выполняется равенство
$$x^2\big(f(x)+f(y)\big)=(x+y)f\big(f(x)y\big).$$
10. Найти все простые p, для которых число $10p^2-25p+1$ является квадратом целого числа.

X Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике

***Высшая лига.* <u>II тур.</u>** *21 ноября 2009 года. г.Ижевск*

1. По кругу стоят квадраты натуральных чисел так, что каждое стоящее число является делителем суммы двух своих соседних чисел. Докажите, что все числа равны между собой.

2. Есть плитка шоколада 2009x2009 квадратиков. Малыш и Карлсон по очереди ломают шоколад. Каждый своим ходом ломает один из имеющихся кусков на два прямым разломом, не ломая квадратиков. При этом Карлсон после каждого своего хода съедает один из имеющихся кусков. Игра заканчивается, кода невозможно сделать ход. Кто победит при правильной игре?

3. Какое наибольшее количество несоприкасающихся между собой авианосцев (трёхклеточных кораблей в виде уголка) можно разместить на поле 10×10?

4. Докажите, что для любых цифр a и b ($a > 0$, $b > 0$) существует бесконечно много составных чисел вида $\overline{a00\ldots0b}$.

5. Может ли в тетраэдре $ABCD$, у которого трёхгранный угол с вершиной C имеет все плоские углы равные 60^o, площадь грани ABD быть больше площадей всех остальных граней?

6. Найдите все возможные значения суммы дробей $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_5}{x_6}$, если $1\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\leq x_5\leq x_6\leq 1000$.

7. В ряд лежат 12 карточек трех типов: белые с обеих сторон, черные с обеих сторон и с белой и черной сторонами. В начале девять из двенадцати карточек лежали черными сторонами вверх. Карточки 1–6 перевернули, и оказалось, что четыре из двенадцати карточек лежат черными сторонами вверх. Затем перевернули карточки 4–9, и шесть карточек оказались лежащими черными сторонами вверх. Наконец перевернули карточки 1–3 и 10–12, после чего пять карточек оказались черными сторонами вверх. Сколько было карточек каждого типа?

8. Докажите, что.$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<3.$

9. При каких $n\geq 3$ верно утверждение: в любой компании из n человек найдутся двое, имеющие равное число знакомых, а также общего знакомого или общего незнакомого?

10. Две окружности радиусов R и r (R>r) касаются в точке A. Определите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого в точке A, а две другие лежат на разных окружностях.

X Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике

Первая лига. **II тур.** *21 ноября 2009 года. г.Ижевск*

1. По кругу стоят квадраты натуральных чисел так, что каждое стоящее число является делителем суммы двух своих соседних чисел. Докажите, что все числа равны между собой.

2. В начале есть куча из 2008 камней массой 1,2, ... 2008 г. Два игрока ходят по очереди. За ход можно разбить любую кучку на две кучки, состоящие из четного числа камней. Игра заканчивается, когда образуется 1004 кучи по 2 камня в каждой. Докажите, что второй игрок может добиться того, чтобы массы хотя бы 1002 из этих кучек были четными числами.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно так, что $BD + DE = BC$, и $BE + ED = AB$. Известно также, что четырехугольник $ADEC$ - вписанный. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный

4. Произведение 15 последовательных натуральных чисел не делится на 4096. Докажите, что среднее число делится на 8.

5. На доске нарисовали 8 непересекающихся кругов и от каждого провели по стрелке к тем из остальных семи, которые меньше него. Всего получилось 27 стрелок. Докажите, что среди нарисованных на доске кругов есть равные.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x = 4y + \dfrac{1}{y} \\ 16y = 16z + \dfrac{1}{z} \\ 8z = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

7. В треугольнике ABC N — середина медианы AM, $AM = BC$, $\angle CBN = 30°$. Докажите, что $AC = BN$.

8. Докажите, что для любых цифр a и b ($a > 0$, $b > 0$) существует бесконечно много составных чисел вида $\overline{a00...0b}$.

9. Используя каждую из восьми цифр 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 ровно один раз, образовали трехзначное число A, два двузначных числа B, C ($B < C$) и однозначное число D. Оказалось, что $A + D = B + C = 143$. Сколькими способами можно было это сделать?

10. Можно ли выписать 100 натуральных чисел так, чтобы для каждого из выписанных чисел ровно одно из остальных отличалось от него на 1, ровно одно - на 3, и ровно одно - на 8?

X Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике

Высшая лига. **III тур. Бой за 1-2 место.** *22 ноября 2009 года. г.Ижевск*

1. Какую наибольшую по длине последовательность из букв слова «ВОРОНЕЦКИЙ» можно составить так, чтобы в этой последовательности не нашлось куска, в котором каждая буква встретилась бы чётное число раз?

2. В остроугольном треугольнике ABC с $\angle A=60°$ отмечена точка T, из которой стороны треугольника ABC видны под равными углами. Прямые BT и CT пересекают стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Докажите, что $BE+DC \geq 2ED$.

3. Поверхность куба 3×3×3 оклеили семнадцатью бумажными полосками 3×1 и одним уголком так, что каждая полоска и уголок закрыли по 3 целые клетки (возможно, с перегибанием через ребро). Найдите все возможные расположения уголка (с точностью до поворота и симметрии).

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x = \sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|} \\ y = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \\ z = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \end{cases}$.

5. Найдите все n, при котором множество {n, n+1,..., n+8} можно разбить на две части с равным произведением.

6. Какое наибольшее количество королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы каждый король бил не более одного короля?

7. Окружность проходит через вершины A и C остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках D и E. Точки D_1 и E_1 симметричны точкам D и E относительно основания высоты, опущенной на сторону AC. Прямые CD_1 и AE_1 пересекаются в точке K. Докажите, что угол AKC равен углу ABC

8. Даны n непостоянных линейных функций $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... $p_n(x)$. Докажите, что хотя бы n-2 из многочленов $p_1(x)p_2(x)...p_{n-1}(x) + p_n(x)$, $p_1(x)p_2(x)...p_n(x) + p_{n-1}(x)$, ..., $p_1(x)p_3(x)...p_n(x) + p_2(x)$, $p_2(x)p_3(x)...p_n(x) + p_1(x)$ имеют вещественный корень.

9. В однокруговом турнире участвовали 2n команд. После окончания турнира оказалось, что у каждой команды число ничьих равно числу побед. При каких n такое возможно?

10. a>b>c – корни уравнения $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$. Найдите значение выражения $a^2b + b^2c + c^2a$.

X Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике

***Высшая лига.* <u>III тур.</u> Бой за 3-4 место.** *22 ноября 2009 года. г.Ижевск*

1. Можно ли в пространстве выбрать 6 различных прямых так, чтобы существовали плоскости, содержащие ровно одну, ровно две, ровно три и ровно четыре из выбранных прямых?

2. В строчку выписаны 10 различных чисел. Разрешается менять местами два соседних числа, если их не меняли местами раньше. Докажите, что если было сделано менее 45 таких операций, то можно сделать еще одну.

3. Известно, что для попарно равных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполнено равенство

$$\frac{a_1}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_2(a_2+a_3)}+\dots+\frac{a_{2008}}{a_{2008}(a_{2008}+a_{2009})}+\frac{a_{2009}}{a_{2009}(a_{2009}+a_1)}=2009.$$

Найдите, чему равно значение выражения

$$\frac{a_1}{(a_{2009}+a_1)a_{2009}}+\frac{a_2}{(a_1+a_2)a_1}+\dots+\frac{a_{2008}}{(a_{2007}+a_{2008})a_{2008}}+\frac{a_{2009}}{(a_{2008}+a_{2009})a_{2008}}.$$

4. 14 команд сыграли в однокруговой футбольный турнир (то есть каждая команда с каждой). Докажите, что из них можно выбрать команду, у которой количество ничьих отличается от количества поражений.

5. Даны три непостоянные линейные функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$. Докажите, что хотя бы один из трех квадратных трехчленов $pq+r$, $pr+q$, $qr+p$ имеет корень

6. Точка D –середина стороны AC треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC. AF и BD пересекаются в точке E и $AE=BC$. Докажите, что $BF=EF$.

7. Есть 15 пирожных различного веса. Аня знает, что среднее по весу пирожное испорчено. Ей разрешили сделать 8 взвешиваний на двухчашечных весах (которые показывают только, на какой чаше груз тяжелее). Может ли Аня найти заведомо хорошее пирожное?

8. Существует ли десятизначное число из различных цифр такое, что для любого натурального k от 1 до 10 число из первых k цифр делится на k?

9. На доске 8×8 стоят несколько шашек. Докажите, что найдется «крест», в котором стоит нечетное число шашек. (Крестом называется объединение вертикали и горизонтали).

10. Докажите, что по крайней мере два из трёх отрезков, соединяющих центр вписанной окружности треугольника с его вершинами, короче всех сторон треугольника.

X Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике

***Первая лига.* <u>III тур.</u>** *22 ноября 2009 года. г.Ижевск*

1. Можно ли в пространстве выбрать 6 различных прямых так, чтобы существовали плоскости, содержащие ровно одну, ровно две, ровно три и ровно четыре из выбранных прямых?

2. В строчку выписаны 10 различных чисел. Разрешается менять местами два соседних числа, если их не меняли местами раньше. Докажите, что если было сделано менее 45 таких операций, то можно сделать еще одну.

3. Известно, что для попарно равных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполнено равенство

$$\frac{a_1}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_2(a_2+a_3)}+\dots+\frac{a_{2008}}{a_{2008}(a_{2008}+a_{2009})}+\frac{a_{2009}}{a_{2009}(a_{2009}+a_1)}=2009.$$

Найдите, чему равно значение выражения

$$\frac{a_1}{(a_{2009}+a_1)a_{2009}}+\frac{a_2}{(a_1+a_2)a_1}+\dots+\frac{a_{2008}}{(a_{2007}+a_{2008})a_{2008}}+\frac{a_{2009}}{(a_{2008}+a_{2009})a_{2008}}.$$

4. 14 команд сыграли в однокруговой футбольный турнир (то есть каждая команда с каждой). Докажите, что из них можно выбрать команду, у которой количество ничьих отличается от количества поражений.

5. Даны три непостоянные линейные функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$. Докажите, что хотя бы один из трех квадратных трехчленов $pq+r$, $pr+q$, $qr+p$ имеет корень

6. Точка D –середина стороны AC треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC. AF и BD пересекаются в точке E и $AE=BC$. Докажите, что $BF=EF$.

7. Есть 15 пирожных различного веса. Аня знает, что среднее по весу пирожное испорчено. Ей разрешили сделать 8 взвешиваний на двухчашечных весах (которые показывают только, на какой чаше груз тяжелее). Может ли Аня найти заведомо хорошее пирожное?

8. Существует ли десятизначное число из различных цифр такое, что для любого натурального k от 1 до 10 число из первых k цифр делится на k?

9. На доске 8×8 стоят несколько шашек. Докажите, что найдется «крест», в котором стоит нечетное число шашек. (Крестом называется объединение вертикали и горизонтали).

10. Докажите, что по крайней мере два из трёх отрезков, соединяющих центр вписанной окружности треугольника с его вершинами, короче всех сторон треугольника.

X Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике

Вторая лига, финал. **III тур.** *22 ноября 2009 года. г.Ижевск*

1. В строчку выписаны 10 различных чисел. Разрешается менять местами два соседних числа, если их не меняли местами раньше. Докажите, что если было сделано менее 45 таких операций, то можно сделать еще одну.

2. Произведение высот прямоугольного треугольника вдвое меньше произведения его сторон. Найдите углы треугольника.

3. 14 команд сыграли в однокруговой футбольный турнир (то есть каждая команда с каждой). Докажите, что из них можно выбрать команду, у которой количество ничьих отличается от количества поражений.

4. Даны три непостоянные линейные функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$. Докажите, что хотя бы один из трех квадратных трехчленов $pq+r$, $pr+q$, $qr+p$ имеет корень.

5. На доске 8×8 стоят несколько шашек. Докажите, что найдется «крест», в котором стоит нечетное число шашек. (Крестом называется объединение вертикали и горизонтали).

6. Точка D –середина стороны AC треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC. AF и BD пересекаются в точке E и $AE=BC$. Докажите, что $BF=EF$.

7. Есть 15 пирожных различного веса. Аня знает, что среднее по весу пирожное испорчено. Ей разрешили сделать 8 взвешиваний на двухчашечных весах (которые показывают только, на какой чаше груз тяжелее). Может ли Аня найти заведомо хорошее пирожное?

8. Существует ли десятизначное число из различных цифр такое, что для любого натурального k от 1 до 10 число из первых k цифр делится на k?