**XII Всероссийская смена «Юный математик».**
**ВДЦ «Орлёнок»**
**XI Южный математический турнир.**
**25 сентября 2016 года.**

**<u>4 тур. Старт-лига высшая. Полуфиналы и бой за V место. *Решения*.</u>**

**1. Все вершины правильного 2016-угольника изначально белые. Какое наименьшее количество из них могут быть перекрашены в черный цвет так, чтобы не осталось прямоугольного треугольника с вершинами белого цвета?**

***<u>Ответ:</u>*** 1008 чёрных вершин. ***<u>Пример:</u>*** Покрасим первые 1008 вершин в чёрный цвет, остальные оставим белыми. Тогда любые две диаметрально противоположные точки будут разного цвета, значит, не будет диаметра описанной окружности с белыми концами, на который бы опирался белый угол в 90°. ***<u>Доказательство оценки</u>*****:** Если у нас будет не более 1007 чёрных точек, то среди 1008 пар диаметрально противоположных найдутся две белые точки, тогда любая другая белая точка даст с этими двумя точками прямоугольный треугольник, т.к. из неё диаметр окружности будет виден под прямым углом в силу свойств вписанных углов.

**2. В клетках доски 10×10 написаны все натуральные числа от 1 до 100 (каждое по одному разу). Вася за один ход может выбрать любой квадрат из четырёх клеток и прибавить к числам этих клеток одно и то же целое число. Существует ли расстановка чисел в таблице, которую Вася за несколько ходов сможет превратить в новую, получающуюся из исходной поворотом на 90 градусов относительно центра?**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |

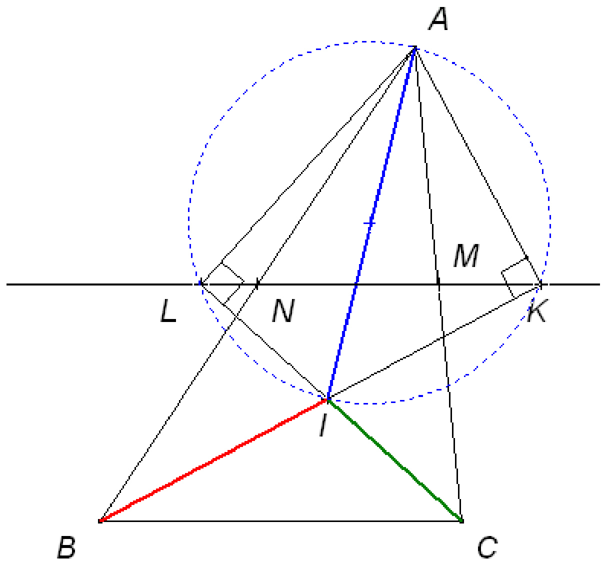
***<u>Ответ</u>*****:** Не существует. ***<u>Доказательство</u>*****:** Раскрасим клетки доски в 4 цвета квадратами 2·2 (см. рис.). Тогда при повороте на 90° числа с клеток каждого цвета поменяются либо по циклу 1→2→3→4→1, либо по циклу 1→4→3→2 в зависимости от поворота по часовой или против часовой стрелки. Заметим, что при описанных операциях с выбором квадрата 2×2 суммы чисел на каждом цвете изменяются на одно и то же число, при этом сумма всех чисел таблицы осталась неизменной, значит, в силу описанных свойств цикличности при повороте суммы чисел на каждом цвете должны быть изначально равными. Тогда и сумма всех чисел должна быть кратна 4, но сумма первых 100 натуральных чисел 1+2+…+100=101·100/2=5050 на 4 не делится. Значит, требуемой расстановки не существует.

**3. Натуральное число назовём симпатичным, если любой его натуральный делитель, увеличенный на 2, является простым числом. Найдите все симпатичные числа с наибольшим возможным количеством делителей.**

***<u>Ответ:</u>*** $5\cdot 3^3$=135, имеющее 8 натуральных делителей. ***<u>Доказательство</u>*****:** Если среди простых множителей найдётся хотя бы один, сравнимый с 1 по модулю 3, то при увеличении на 2 получим составное число, кратное 3. Если будет хотя бы два простых множителя, сравнимых с 2 по модулю 3 (возможно равных), то их произведение будет делителем симпатичного числа и при увеличении на 2 даст составное число, кратное 3. Значит, наибольшее возможное количество делителей будет иметь либо число $3^n$, либо число $p\cdot 3^n$, где простое число $p\equiv 2 \pmod 3$. Если $p\neq 5$, то в зависимости от остатка (1, 2, 3 или 4) при делении на 5 мы после увеличения соответственно делителя 3p, 9p, p и 27p на 2 получим составное число, кратное 5. Значит, в этом случае мы имеем максимум 6 делителей для числа вида $p\cdot 3^2$ в последнем случае. Значит, у нас либо $3^n$, либо число $5\cdot 3^n$. Перебор в первом случае даёт $3^5+2=245$ кратно 5, значит. максимум $3^4$ и 5 делителей. Перебор во втором случае даёт $5\cdot 3^4+2=407$ кратно 11, значит, максимум $5\cdot 3^3$.

**4. Пусть *I* – точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*. Точки *N* и *M* – середины сторон *AB* и *AC* соответственно. Прямые *BI* и *CI* пересекают прямую *MN* в точках *K* и *L* соответственно. Докажите, что *AI*+*BI*+*CI* > *BC*+*KL*.**

***Доказательство*:** Т.к. *BK* – биссектриса, а средняя линия *MN* параллельна *BC*, то $\angle NKB=\angle KBC=\angle KBN$, значит, треугольник *BNK* – равнобедренный. Тогда *NK*=*NB*=*NA*, значит, треугольник *AKB* – прямоугольный с прямым углом *K*, следовательно, прямоугольным является и треугольник *AKI* (где $\angle K=90°$). Аналогично доказывается, что треугольник *ALI* – прямоугольный с $\angle L=90°$. Тогда точки *K* и *L* лежат на окружности с диаметром *AI*, значит, *KL* не превосходит диаметра *AI*. На самом деле *KL*<*AI*, т.к. центр окружности лежит выше прямой *KL*, содержащей среднюю линию *NM* (см. рис.), что нетрудно доказать, значит, *KL* не может быть диаметром. Но нам достаточно и неравенства *KL*≤AI, т.к. в силу строгого неравенства *BI*+*CI*>*BC* (по неравенству треугольника) получаем, что *AI*+*BI*+*CI* > *BC*+*KL*.

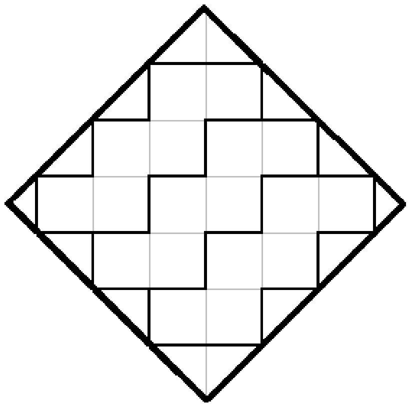



**5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые после приписывания справа такого же числа превращаются в точный квадрат.**

***Решение*:** Пусть наше число *a* имеет *n* цифр, тогда будучи записанным дважды оно даст число $A=a\cdot(10^n+1)$. Найдём такое натуральное *n*, что $10^n+1$ делится на какой-нибудь точный квадрат, например, $7^2=49$. Подойдёт *n*=21, т.к. $10^{21}\equiv 100^{10}\cdot 10\equiv 2^{10}\cdot 10\equiv 10240\equiv -1 (\mathrm{mod}\ 49)$. Но после деления на 49 останется число из 20 цифр, начинающееся на 2, поэтому домножим наше число на точный квадрат $3^2=9$. Тогда получим нужное нам 21-значное число $a=\dfrac{9\cdot(10^{21}+1)}{49}$. Теперь воспользуемся тем, что $10^{21k}+1$ делится на $10^{21}+1$ при любом нечётном натуральном *k*, значит, делится и на 49. Проделав аналогичный «трюк» после деления на 49 и домножения на 9, получим бесконечную серию требуемых чисел вида $a=\dfrac{9\cdot(10^{21k}+1)}{49}$, которые после своего дублирования превратятся в точные квадраты $\left(\dfrac{3\cdot(10^{21k}+1)}{7}\right)^2$.

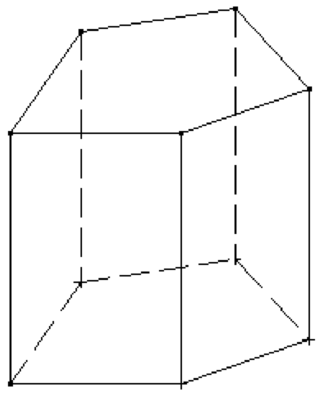
***Комментарий:*** В частности, при *n*=21 получим число 183673469387755102041, т.к. $183673469387755102041183673469387755102041=428571428571428571429^2=\left(\dfrac{3\cdot(10^{21}+1)}{7}\right)^2$.

**6. Развёрткой куба с ребром *a* называется фигура, состоящая из шести квадратов со стороной *a*, сгибая которую по границам квадратов можно покрыть поверхность этого куба. Можно ли из квадрата со стороной меньшей 5 вырезать развертки трёх одинаковых кубов с ребром 1?**



***Ответ:*** Можно. ***Пример*:** возьмём три одинаковые развёртки в виде лесенки, вложенные друг под друга, и поместим их в квадрат со стороной $\frac{7}{2}\sqrt{2}$, повёрнутый по отношению к развёрткам на 45°. Тогда сторона получающегося квадрата $\frac{7}{2}\sqrt{2} < 3{,}5\cdot 1{,}42 = 4{,}97 < 5$.

**7. Барон Мюнхгаузен посетил страну Цикляндию, в которой некоторые города соединены дорогами. Барон утверждает, что для каждого города найдутся проходящие через него циклические маршруты с длинами 4, 5, 6, 7, 8, 9, но нет циклических маршрутов длины 3. Можно ли верить барону?**



***Ответ:*** Можно верить. ***Пример*:** Рассмотрим пятиугольную призму (см. рис.), она удовлетворяет условию с циклами длины 4, 5, 6, 7, 8 и 9, но нет циклов длины 3.

**8. Найдите все решения в действительных числах уравнения**

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 + 1 = a + 2b + 2c.$$

***Ответ:*** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. ***Решение:*** Перенесём все числа в одну сторону и выделим сумму полных квадратов $(a-\frac{1}{2})^2 + 2(b-\frac{1}{2})^2 + (2c-\frac{1}{2})^2 = 0$, значит, каждая скобка равна 0, что и даёт нам решение уравнения.

## 4 тур. Старт-лига высшая. Бой за VII место.
## Старт-лига первая. Полуфиналы. *Решения*.

**1. Все вершины правильного 2016-угольника изначально белые. Какое наименьшее количество из них могут быть перекрашены в черный цвет так, чтобы не осталось прямоугольного треугольника с вершинами белого цвета?**

***Ответ:*** 1008 чёрных вершин. ***Пример:*** Покрасим первые 1008 вершин в чёрный цвет, остальные оставим белыми. Тогда любые две диаметрально противоположные точки будут разного цвета, значит, не будет диаметра описанной окружности с белыми концами, на который бы опирался белый угол в 90°. ***Доказательство оценки*:** Если у нас будет не более 1007 чёрных точек, то среди 1008 пар диаметрально противоположных найдутся две белые точки, тогда любая другая белая точка даст с этими двумя точками прямоугольный треугольник, т.к. из неё диаметр окружности будет виден под прямым углом в силу свойств вписанных углов.

**2. В ряд в некотором порядке выложены 10 монет весами 1 г, 2 г, … и 10 г. За одно взвешивание на чашечных весах разрешается взять любое чётное количество**

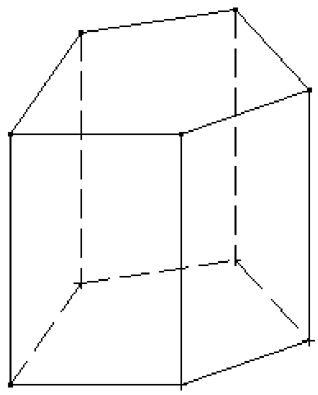
**подряд лежащих монет и левую половину этих монет положить на левую чашу весов, а правую половину – на правую чашу. Верно ли, что с помощью таких взвешиваний мы сможем однозначно установить веса всех монет?**

***<u>Ответ</u>:*** Нет, не верно. ***<u>Контрпример</u>*:** Нетрудно проверить, что расстановки 1, 2, 3, 4, 5, 10, 9, 8, 7, 6 и 1, 2, 3, 4, 6, 10, 9, 8, 7, 5 будут давать одни и те же итоги при всех аналогичных взвешиваниях, значит, мы не сможем различить между собой такие две расстановки.

**3. В хороводе по кругу стоят 30 детей. Правый сосед каждой девочки – мальчик. У половины мальчиков правый сосед – тоже мальчик, а у всех остальных мальчиков правый сосед – девочка. Сколько мальчиков и девочек в хороводе?**

***<u>Ответ</u>:*** 20 мальчиков и 10 девочек. ***<u>Доказательство</u>*:** Из условия следует, что девочки стоят по одной между мальчиками. Пусть мальчиков $2n$, значит, ровно после $n$ мальчиков справа стоит девочка, после которой сразу стоит мальчик, значит, девочек ровно $n$. Тогда всего стоит $2n+n=3n=30$ детей, откуда, $n=10$. И такая ситуация действительно могла быть, например, когда чередуются группы из двух мальчиков и одной девочки.

**4. Барон Мюнхгаузен посетил страну Цикляндию, в которой некоторые города соединены дорогами. Барон утверждает, что для каждого города найдутся проходящие через него циклические маршруты длины 4 и длины 5, но нет циклических маршрутов длины 3. Можно ли верить барону?**



***<u>Ответ</u>:*** Можно верить. ***<u>Пример</u>*:** Рассмотрим пятиугольную призму (см. рис.), она удовлетворяет условию с циклами длины 4 и 5, но нет циклов длины 3.

**5. Развёрткой куба называется фигура, состоящая из шести квадратов со стороной *a*, сгибая которую по границам квадратов можно покрыть поверхность куба с ребром *a*. Можно ли из квадрата со стороной 5 вырезать развертки трёх одинаковых кубов со стороной 1?**

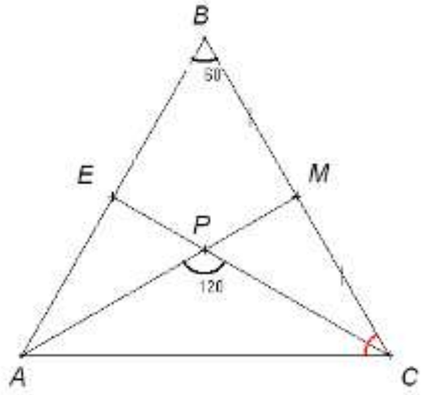

***<u>Ответ</u>:*** Можно, см. пример на рис. с тремя одинаковыми развёртками, где буквами указаны грани: Ф – фасад, В – верхняя, П – правая, Л – левая, Н – нижняя, З – задняя грань.

**6. Задачник по математике содержит 2016 задач. У учительницы имеются магнитные карточки с цифрами. Она прикрепляет их к доске, указывая номера четырёх задач, которые нужно решить на уроке. Каким наименьшим числом карточек может обойтись учительница, чтобы иметь возможность указать номера любых четырёх задач из задачника? (Шестёрка и девятка не взаимозаменяемы.)**

***<u>Ответ</u>:*** 103 карточки: 13 с цифрой 1 и по 10 карточек с каждой из 9 других цифр. ***<u>Доказательство</u>:*** Цифра 1 должна встретиться 13 раз, т.к. возможен набор из числа 1111 и ещё трёх чисел с тремя единицами, например, 111, 1110, 1112. Каждая ненулевая цифра X. отличная от 1, должна встречаться хотя бы 10 раз, т.к. возможны задача XXX, 1XXX и ещё две задачи, в которых по две цифры X. Цифра 0 должна встречаться хотя бы 10 раз, т.к. возможен набор из чисел 1000, 2000 и двух трёхзначных чисел, кратных 100. Значит, нам надо хотя бы 13+9·10=103 карточки.

**7. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 60°, а угол между медианой *AM* и биссектрисой *CE* равен 120°. Докажите, что треугольник *ABC* – правильный.**

***Доказательство***: 1 *случай*. $\angle APC$=120°, где *P* – точка пересечения медианы *AM* и биссектрисы *CE*. Сумма углов *A* и *C* треугольника *ABC* равна 180°–60°=120°, значит, сумма их половинок равна 60°, тогда в треугольнике *APC* $\angle CAP$ равен половине угла *CAB*, значит, луч *AP* (он же *AM*) является биссектрисой. Тогда *AM* – медиана и биссектриса, значит, треугольник *ABC* равнобедренный (*AB=AC*) с углом в 60°, т.е. равносторонний, что и требовалось доказать. 2 *случай*. $\angle APE$=120°, $\angle APC$=60°, значит, $\angle PAC+\angle PCA$=120°, но эта сумма должна быть частью, следовательно. меньше суммы $\angle BAC+\angle ACB$=120°. Противоречие, значит, этот случай невозможен.




**8. Найдите все решения в действительных числах уравнения**

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 + 1 = a + 2b + 2c.$$

***Ответ:*** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. ***Решение:*** Перенесём все числа в одну сторону и выделим сумму полных квадратов $(a-\frac{1}{2})^2+2(b-\frac{1}{2})^2+(2c-\frac{1}{2})^2=0$, значит, каждая скобка равна 0, что и даёт нам решение уравнения.

**4 тур. Старт-лига первая. Бои за 5-8 места. *Решения*.**

**1. Все вершины правильного 2016-угольника изначально белые. Какое наименьшее количество из них могут быть перекрашены в черный цвет так, чтобы не осталось прямоугольного треугольника с вершинами белого цвета?**

***Ответ:*** 1008 чёрных вершин. ***Пример:*** Покрасим первые 1008 вершин в чёрный цвет, остальные оставим белыми. Тогда любые две диаметрально противоположные точки будут разного цвета, значит, не будет диаметра описанной окружности с белыми концами, на который бы опирался белый угол в 90°. ***Доказательство оценки***: Если у нас будет не более 1007 чёрных точек, то среди 1008 пар диаметрально противоположных найдутся две белые точки, тогда любая другая белая точка даст с этими двумя точками прямоугольный треугольник, т.к. из неё диаметр окружности будет виден под прямым углом в силу свойств вписанных углов.

**2. Задачник по математике содержит 1000 задач. У учительницы имеются магнитные карточки с цифрами. Она прикрепляет их к доске, указывая номера четырёх задач, которые нужно решить на уроке. Каким наименьшим числом карточек может обойтись учительница, чтобы иметь возможность указать номера любых четырёх задач из задачника? (Шестёрка и девятка взаимозаменяемы.)**

***Ответ:*** 84 карточки: 12 с цифрой 6/9 и по 9 карточек с каждой из 8 других цифр. ***Доказательство:*** Цифра 6/9 должна встретиться 12 раз, т.к. возможен набор из 4 трёхзначных чисел, состоящих только из 6 и 9, например: 666, 669, 699, 999. Каждая ненулевая цифра X. отличная от 6/9, должна встречаться хотя бы 9 раз, т.к. возможны задача XXX и ещё три задачи, в которых по две цифры X. Цифра 0 должна встречаться хотя бы 9 раз, т.к. возможен набор из числа 1000 и трёх трёхзначных чисел, кратных 100. Значит, нам надо хотя бы 12+8·9=84 карточки.

**3. Девять исследователей планируют 12-дневный переход между двумя оазисами в пустыне. Им требуется нанять носильщиков из местного населения. Каждый носильщик может нести запас воды и пищи, необходимых одному человеку на 15 дней. Сколько носильщиков должны нанять исследователи (сами исследователи запасов воды и пищи не носят)?**

**4. В ребусе $\overline{ИКС}+\overline{РО}=\overline{БЕТА}$ разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам – одинаковые цифры. Чему равно наибольшее возможное значение числа $\overline{БЕТА}$?**

**5. Развёрткой куба называется фигура, состоящая из шести квадратов со стороной *a*, сгибая которую по границам квадратов можно покрыть поверхность куба с ребром *a*. Можно ли из квадрата со стороной 5 вырезать развертки трёх одинаковых кубов со стороной 1?**

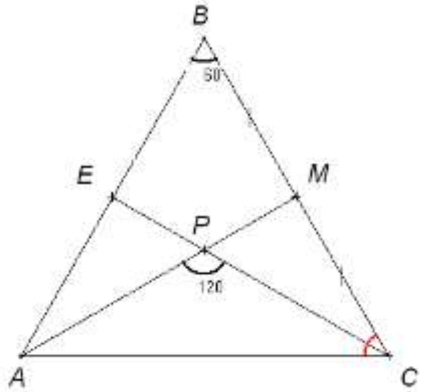
***Ответ:*** Можно, см. пример на рис. с тремя одинаковыми развёртками, где буквами указаны грани: Ф – фасад, В – верхняя, П – правая, Л – левая, Н – нижняя, З – задняя грань.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | в | з | |
| л | ф | п | в | з |
| н | л | ф | п | в |
| | н | ф | п | з |
| | л | н | | |

**6. В ряд в некотором порядке выложены 10 монет весами 1 г, 2 г, … и 10 г. За одно взвешивание на чашечных весах разрешается взять любое чётное количество подряд лежащих монет и левую половину этих монет положить на левую чашу весов, а правую половину – на правую чашу. Верно ли, что с помощью таких взвешиваний мы сможем однозначно установить веса всех монет?**

***Ответ:*** Нет, не верно. ***Контрпример*:** Нетрудно проверить, что расстановки 1, 2, 3, 4, 5, 10, 9, 8, 7, 6 и 1, 2, 3, 4, 6, 10, 9, 8, 7, 5 будут давать одни и те же итоги при всех аналогичных взвешиваниях, значит, мы не сможем различить между собой такие две расстановки.

**7. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 60°, а угол между медианой *AM* и биссектрисой *CE* равен 120°. Докажите, что треугольник *ABC* – правильный.**




***Доказательство*:** Сумма углов *A* и *C* треугольника равна 180°–60°=120°, значит, сумма их половинок равна 60°, тогда в треугольнике *APC* (*P* – точка пересечения медианы *AM* и биссектрисы *CE*) $\angle CAP$ равен половине угла *CAB*, значит, луч *AP* (он же *AM*) является биссектрисой. Тогда *AM* – медиана и биссектриса, значит, треугольник *ABC* равнобедренный (*AB*=*AC*) с углом в 60°, т.е. равносторонний, что и требовалось доказать.

**8. Пончик купил 7 пончиков и 9 ватрушек, без сдачи расплатившись тринадцатифартинговыми купюрами. Авоська купил 5 пончиков и 12 ватрушек. Докажите, что он тоже сможет без сдачи расплатиться теми же купюрами номиналом 13 фартингов.**