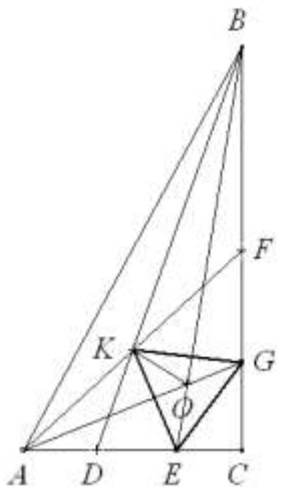
X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
IX Южный математический турнир.
Старт-лига. 3 тур. 24 сентября 2014 года. *Решения*.



1. В прямоугольном треугольнике *ABC* на катете *AC* выбраны точки *D* и *E*, а на катете *BC* – точки *F* и *G* так, что $\angle ABD=\angle DBE=\angle CBE$, $\angle BAF=\angle FAG=\angle GAC$. Отрезки *AF* и *BD* пересекаются в точке *K*. Докажите, что треугольник *EGK* – равносторонний. (*Д.Ю.Кузнецов*)

Решение: Введём *O* – точку пересечения трисектрис *AG* и *BE*. Пусть $\angle A=3\alpha$, $\angle B=3\beta$, тогда $3\alpha+3\beta=90°$ и $\alpha+\beta=30°$. Тогда $\angle AOB=180°-2\alpha-2\beta=180°-60°=120°$, а точка *K* в треугольнике *AOB* будет точкой пересечения биссектрис, значит, $\angle AOK=\angle BOK=60°$. Но и $\angle AOE=\angle BOG=180°-\angle AOB=60°$. Тогда треугольники *AKO* и *AEO* равны (по стороне и двум прилежащим углам). Аналогично равны треугольники *BKO* и *BGO*. Значит, *EO*=*OK*=*OG*. Кроме того, $\angle EOK=\angle KOG=\angle GOE=120°$, следовательно, треугольники *EOK*, *KOG* и *GOE* равны между собой. Значит, *EK*=*KG*=*GE*, т.е. *EGK* – равносторонний треугольник.

2. На доске выписаны несколько уравнений вида *Ax*+*By*=*C*, где все коэффициенты *A, B, C* – не нулевые. Скажем, что два уравнения *дружат*, если система из этих двух уравнений имеет конечное число решений (возможно, 0 решений). Известно, что каждое уравнение дружит ровно со 111 другими уравнениями. Сколько всего уравнений может быть выписано на доске? (*А.В.Шаповалов по мотивам Р.Г.Женодарова*)

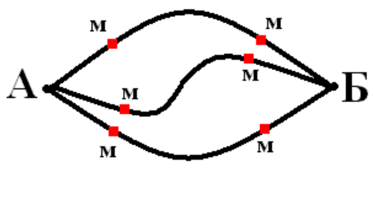
Ответ: 222, 148, 114 или 112. ***Решение:*** Заметим, что каждое уравнение задаёт некоторую прямую на координатной плоскости и конечное количество решений системы будет в случаях пересечения (1 решение) и параллельности несовпадающих прямых (0 решений). Бесконечное количество решений будет в случае совпадения прямых. Пусть у нас *n* семейств совпадающих прямых. Рассмотрим любые два из них и пусть в одном из них k_1 прямых, а в другом – k_2 прямых. Тогда для прямых из этих семейств получим, что $S+k_1=S+k_2=111$, где *S* – количество прямых, не входящих в эти семейства (возможно, 0), т.е. $k_1=k_2$. Таким образом, в каждом семействе поровну прямых (по *k*). Тогда из условия следует, что $(n-1)k= =111=1\cdot111=3\cdot37=37\cdot3=111\cdot1$. Значит, возможны четыре случая и общее количество прямых *nk* равно или $2\cdot111=222$, или $4\cdot37=148$, или $38\cdot3=114$, или $112\cdot1=112$.

3. Петя разрезал на две части квадрат со стороной 2 дм. Докажите, что он не сможет накрыть ими равносторонний треугольник со стороной 3 дм. (*А.В.Шаповалов*)

Решение: Заметим, что диаметр квадрата (максимальное расстояние между его точками) равен $2\sqrt{2}$, что меньше 3, тогда и диаметр каждой из частей после разрезания также будет меньше 3. Значит, невозможно каждой из частей закрыть более одной вершины равностороннего треугольника. Т.о., мы двумя частями закроем не более двух вершин треугольника и хотя бы одна вершина будет не закрыта.

4. Пункты А и Б соединены несколькими непересекающимися дорогами. На каждой дороге стоит одна или несколько машин. Все машины одинаковы, и общее количество бензина в машинах достаточно, чтобы проехать расстояние, не меньшее суммы длин дорог. Обязательно ли одна из машин может доехать до всех остальных машин, собирая у них бензин, и вернуться в исходную точку, ни разу не развернувшись на 180°? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: Необязательно. ***Пример*:** Пусть между пунктами А и Б будет три дороги одинаковой длины (например, по 100 км), на четверти расстояния от каждого пункта на каждой дороге будет по машине (в 25 км от пунктов) – всего 6 машин. И пусть в каждой машине будет бензина ровно на половину каждой дороги (на 50 км), чтобы доехать только до какой-нибудь следующей машины. Тогда суммарно бензина на 300 км, что хватает проехать все дороги. Попав на новую дорогу, машина обязана пройти её всю. Если вернуться в исходную точку, не проходя никакого участка дважды, то будет пройдено чётное число дорог, то есть, не все дороги и не все машины. Лишний участок – это не менее 50 км, при этом на исходной дороге пройдено не менее 75 км. Значит, в сумме надо пройти не менее 325 км, и бензина на это не хватит.



5. Целые числа *p, q, r* таковы, что *p* + 2*q* + 3*r* делится на 11. Докажите, что и 5*p* – *q* + 4*r* делится на 11. (*С.Г.Волченков*)

Доказательство 1: Число $2(5p-q+4r)=11p+11r-(p+2q+3r)$ делится на 11, но 11 и 2 – взаимно просты, значит, на 11 делится число $5p-q+4r$. ***Доказательство 2:*** Из делимости $p+2q+3r$ на 11, следует, что $p\equiv-2q-3r \pmod{11}$. Тогда $5p-q+4r\equiv5(-2q-3r)-q+4r\equiv-11q-11r\equiv0 \pmod{11}$, т.е. делится на 11.

6. По кругу лежит 17 одинаковых на вид монет, из которых две лежащие рядом – фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, и обе фальшивые монеты весят одинаково и при этом легче настоящих на 1 грамм. Имеются *нежные* весы: это чашечные весы, которые ломаются, если разность весов на чашах больше 1 грамма; при этом, однако, весы показывают, какая чаша перевесила. Как за два взвешивания на нежных весах без гирь найти обе фальшивые монеты? (*А.В.Шаповалов*)

***Решение*:** Пронумеруем монеты от 1 до 17. Положим на одну чашу весов монеты 1, 2, 4, 6, 14, 16, а на вторую чашу весов монеты с номерами 3, 5, 7, 8, 10, 12. Если весы сломались, то мы нашли фальшивую пару – 1, 2 или 7, 8 в зависимости от того, какая чаша легче. Если весы в равновесии, то фальшивые монеты есть на обеих чашах по одной (так как, очевидно, наши взвешивания задели любую пару последовательных монет), и значит, пара фальшивых монет – это любая пара от (2, 3) до (6,7). Если первая чаша легче второй, то на ней ровно одна фальшивая монета, значит, пара фальшивых монет – это пара от (13, 14) до (17, 1). Наконец, если легче вторая чаша, то пара фальшивых монет – это пара от (8, 9) до (12, 13). Т.о., в любом случае, если мы ещё не нашли фальшивую пару, то мы имеем задачу поиска фальшивой пары среди шести последовательных монет. Покажем, что это возможно. Пронумеруем заново монеты-претенденты от 1 до 6. Взвесим на одной чаше монеты 1 и 2, а на второй – монеты 5 и 6. Если весы сломались, то мы нашли фальшивую пару, в зависимости от того, какая пара легче. Если равенство, то фальшивые монеты – это (3, 4). Если легче первая чаша, то пара фальшивых – это (2, 3). Наконец, если легче вторая чаша, то фальшивая пара – (4,5).

7. Сколькими способами можно из полного комплекта домино выкинуть две доминошки так, чтобы остальные можно было по правилам выложить в кольцо? (В полный комплект домино входят 28 доминошек с парами 0-0, 0-1, …, 6-6) (*С.Г.Волченков*)

Ответ: $C_7^2=\frac{7\cdot 6}{2}=21$. ***Решение*:** Рассмотрим граф «доминошек», в котором вершины – цифры, рёбра – доминошки. Тогда это будет полный граф K_7 с семью петлями (доминошки-дубли). Каждая вершина при этом будет иметь степень 8 и согласно критерию эйлеровости (связный и все вершины будут чётными) в графе будет эйлеров цикл, т.е. доминошки можно будет выложить в кольцо. Если мы удалим хотя бы одну доминошку с разными цифрами, то сразу две вершины станут нечётными, а при удалении ещё какой-то доминошки хотя бы одна из вершин останется нечётной и в графе не будет эйлерова цикла. Значит, удалять можно только дубли. В этом случае 5 вершин останутся со степенью 8, а две – со степенью 6, т.е. эйлеров цикл в графе существует. Количество способов удалить два дубля из семи равно $C_7^2=\frac{7\cdot 6}{2}=21$.

8. Рассматриваются всевозможные дроби вида k+1/(m+1/n), где k, m, n – различные ненулевые цифры. Какая наименьшая положительная разность может быть между двумя такими дробями? (*А.В.Шаповалов, О.И.Южаков*)

Ответ: $\frac{1}{4672}$. ***Доказательство оценки:*** Пусть минимальная разность равна $\Delta=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}-\left(x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}\right)$.

Заметим, что каждая дробь будет положительна и меньше 1, т.е. является дробной частью соответствующего числа. Тогда для минимальной Δ возможны два случая. 1 случай. $a>x$. Но тогда дробная часть первого числа будет не меньше 0,1, значит, Δ будет заведомо больше 0,1, что превосходит минимальную разность во втором случае. 2 случай. $a=x$. Тогда надо минимизировать положительную величину $\Delta=\frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)-\left(b+\frac{1}{c}\right)}{\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)}$, при этом числитель – положителен. Если $y<b$, то $y+\frac{1}{z}\le y+1\le b<b+\frac{1}{c}$ – получим отрицательный числитель. Если $y>b$, то числитель $(y-b)+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{c}\right)\ge 1+\frac{1}{9}-\frac{1}{1}=\frac{1}{9}$. Знаменатель при этом не более 9·10=90 и $\Delta\ge\frac{1}{810}$, что превосходит минимум, который получим при $y=b$. Тогда $\Delta=\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{c}}{\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)}=\frac{c-z}{cz\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)}=\frac{c-z}{(bc+1)(yz+1)}$. Минимум числителя равен 1, если $c=z+1$. Максимум знаменателя будет достигаться при bc и yz, равных 9·8 и 9·7, т.к. в каждой паре (b, c) и (y, z) цифры разные, но $b=y$. В этом случае $b=y=9$, $c=8$, $z=7$, $(bc+1)(yz+1)=73\cdot 64=4672$ – максимальное значение знаменателя. При этом есть ещё 6 вариантов пары $a=x$ – цифры от 1 до 6. Тогда $\Delta=\frac{1}{4672}$, что меньше и $\frac{1}{10}$, и $\frac{1}{810}$, оценок, возникавших в ранее разобранных случаях.