В. Л. Попов, Борелевские подгруппы групп Кремоны, *Матем. заметки*, 2017, том 102, выпуск 1, 72–80

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm11562

Математические заметки

Том 102 выпуск 1 июль 2017

УДК 512.745.4

# Борелевские подгруппы групп Кремоны

**В. Л. Попов**

Мы доказываем, что аффинно-треугольные подгруппы являются борелевскими подгруппами групп Кремоны.

Библиография: 17 названий.

**Ключевые слова:** группа Кремоны, треугольная подгруппа, аффинно-треугольная подгруппа, борелевская подгруппа.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11562

**1.** Зафиксируем алгебраически замкнутое поле $k$. Далее мы обозначаем через $\mathscr{C}_n$ *группу Кремоны ранга* $n$ над $k$, т.е. группу бирациональных автоморфизмов $n$-мерного аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ над $k$. Для каждого элемента $\sigma \in \mathscr{C}_n$ отображение

$$k(\mathbf{A}^n) \to k(\mathbf{A}^n), \qquad f \mapsto f^\sigma := f \circ \sigma, \tag{1}$$

является $k$-автоморфизмом поля $k(\mathbf{A}^n)$ рациональных функций на $\mathbf{A}^n$. Отображение $\mathscr{C}_n \to \operatorname{Aut}_k k(\mathbf{A}^n)$, переводящее каждый элемент $\sigma^{-1}$ в автоморфизм (1), является изоморфизмом групп. По этому изоморфизму они часто отождествляются и поэтому $\operatorname{Aut}_k k(\mathbf{A}^n)$ тоже называют группой Кремоны ранга $n$ над $k$.

Следуя [1], мы наделяем группу $\mathscr{C}_n$ топологией Зарисского (см. также [2], [3]): в ней подмножество $S \subseteq \mathscr{C}_n$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любого алгебраического семейства[1] $\alpha\colon F \to \mathscr{C}_n$ подмножество $\alpha^{-1}(S)$ замкнуто в алгебраическом многообразии $F$. Далее замыкание подмножества $S$ в $\mathscr{C}_n$ обозначается через $\overline{S}$.

Группы Кремоны, наделенные этой топологией, имеют ряд свойств, аналогичных структурным свойствам аффинных алгебраических групп: например, в них существуют максимальные торы, относительно которых можно рассматривать корни и группы Вейля (см. [7], [8; § 9]). Поскольку в структурной теории аффинных алгебраических групп ключевую роль играют борелевские подгруппы (т.е. максимальные среди всех связных замкнутых разрешимых подгрупп), естественно возникает вопрос об их существовании в группах Кремоны. Ответ на него не очевиден: если существование борелевских подгрупп в аффинных алгебраических группах сразу

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

[1] Понятие алгебраического семейства автоморфизмов алгебраического многообразия было введено и исследовано в [4] (о дальнейших исследованиях см. [5]); в контекст бирациональных автоморфизмов оно было затем перенесено в [6].

вытекает из конечномерности последних, то ввиду бесконечномерности групп Кремоны $\mathscr{C}_n$ при $n > 1$ для них этот аргумент неприменим.

Настоящая заметка посвящена исследованию этого вопроса. Мы устанавливаем существование борелевских подгрупп в $\mathscr{C}_n$, доказав, что таковыми являются некоторые явно указанные подгруппы $\mathscr{B}_n$ "треугольных" подгрупп $\mathscr{T}_n$ в $\mathscr{C}_n$ (сами $\mathscr{T}_n$ борелевскими в $\mathscr{C}_n$ не являются, хотя $\mathscr{T}_n \cap \operatorname{Aut} \mathbf{A}^n = \mathscr{B}_n \cap \operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ – борелевская подгруппа в аффинной группе Кремоны $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$, см. [9]).

А именно, пусть $x_1, \ldots, x_n$ –стандартные координатные функции на $\mathbf{A}^n$:

$$x_i(a) = a_i, \qquad a := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n.$$

Для любого элемента $\sigma \in \mathscr{C}_n$ положим $\sigma_i := x_i^\sigma \in k(\mathbf{A}^n) = k(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$\sigma(a) = (\sigma_1(a), \ldots, \sigma_n(a)) \qquad \text{для всех } a \in \mathbf{A}^n, \text{ где определены } \sigma_1, \ldots, \sigma_n. \tag{2}$$

Далее мы называем $i$-й *компонентой элемента* $\sigma$ функцию $\sigma_i$ и полагаем

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) := \sigma. \tag{3}$$

Групповая операция в $\mathscr{C}_n$ (композиция отображений) описывается тогда формулой

$$(\tau_1, \ldots, \tau_n) \circ (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\tau_1^\sigma, \ldots, \tau_n^\sigma). \tag{4}$$

Далее группа $\mathrm{GL}_n(k)$ естественно отождествляется с группой всех $\sigma \in \mathscr{C}_n$, у которых каждая $\sigma_i$ является линейной однородной функций от $x_1, \ldots, x_n$.

Рассмотрим в $k(\mathbf{A}^n)$ флаг подполей

$$k = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n, \qquad \text{где} \quad K_i := k(x_1, x_2, \ldots, x_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5}$$

Из (1), (4), (5) следует, что для любых функций $f_1, \ldots, f_n$, имеющих вид

$$f_i = \frac{a_{i,1}x_i + a_{i,2}}{a_{i,3}x_i + a_{i,4}} \in K_i, \qquad \text{где} \quad a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4} \in K_{i-1}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} \\ a_{i,3} & a_{i,4} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{6}$$

существует элемент $\sigma \in \mathscr{C}_n$, для которого

$$\sigma_i = f_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

и что множество $\mathscr{T}_n$ всех таких элементов $\sigma$ является подгруппой в $\mathscr{C}_n$, сохраняющей флаг (5). Из того, что для любого поля $L(t)$, где $t$ – переменная над полем $L$, орбитой элемента $t$ относительно группы $\operatorname{Aut}_L L(t)$ является множество всех элементов вида

$$\frac{at + b}{ct + d}, \qquad \text{где} \quad a, b, c, d \in L, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

(см., например, [10; § 73]), нетрудно вывести, что на самом деле $\mathscr{T}_n$ является $\mathscr{C}_n$-стабилизатором флага (5). Далее $\mathscr{T}_n$ (и любая сопряженная ей в $\mathscr{C}_n$ подгруппа) называется *треугольной* подгруппой в $\mathscr{C}_n$.

Из (4), (6) следует, что подмножество $\mathscr{B}_n$ всех тех $\sigma \in \mathscr{T}_n$, у которых для каждого $i$ в (7), (6) выполнено равенство $a_{i,3} = 0$, является подгруппой. Далее она (и любая сопряженная ей в $\mathscr{C}_n$ подгруппа) называется *аффинно-треугольной* подгруппой в $\mathscr{C}_n$.

Мы доказываем здесь следующую теорему.

Теорема 1. *Аффинно-треугольные подгруппы группы Кремоны* $\mathscr{C}_n$ *являются ее борелевскими подгруппами.*

Утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из доказываемых ниже предложений 1, 3, 4 и 5, где устанавливается соответственно разрешимость, связность, замкнутость и максимальность аффинно-треугольных подгрупп. В предложении 2 мы даем оценки сверху и снизу на длину ряда последовательных коммутаторов этих подгрупп.

**2.** Мы начнем с вопроса о разрешимости.

Предложение 1. *Аффинно-треугольные подгруппы в* $\mathscr{C}_n$ *разрешимы.*

Доказательство. Для любого поля $L$ и переменной $t$ над $L$ мы можем (и будем) рассматривать группу $\mathrm{PGL}_2(L)$ как множество $\mathrm{PGL}_2(L,t)$ всех имеющих вид (8) элементов поля $L(t)$ (дробно-линейных подстановок с коэффициентами в $L$) с групповой операцией – композицией подстановок. Совокупность $B_2(L,t)$ всех тех подстановок, у которых $c=0$, является тогда борелевской подгруппой в $\mathrm{PGL}_2(L)$.

Рассмотрим цепочку включений

$$\mathscr{B}_n =: \mathscr{B}_n(0) \supset \mathscr{B}_n(1) \supset \cdots \supset \mathscr{B}_n(n) = \mathrm{id},$$

где

$$\mathscr{B}_n(j) := \{\sigma \in \mathscr{B}_n \mid \sigma_1 = x_1, \dots, \sigma_j = x_j\} \qquad \text{при} \quad j \geqslant 1. \tag{9}$$

Из (4) следует, что $\mathscr{B}_n(j)$ – нормальный делитель в $\mathscr{B}_n$, а $\mathscr{B}_n(j) \to B_2(K_j, x_{j+1})$, $\sigma \mapsto \sigma_{j+1}$, – эпиморфизм групп с ядром $\mathscr{B}_n(j+1)$ при любом $j<n$. Поскольку группа $B_2(K_j, x_{j+1})$ разрешима для всех $j<n$, а расширение разрешимой группы с помощью разрешимой само разрешимо, это завершает доказательство.

Замечание 1. Ввиду (4), отображение $\mathscr{T}_n \to \mathrm{PGL}_2(k, x_1)$, $\sigma \mapsto \sigma_1$, является эпиморфизмом групп. Отсюда и из неразрешимости группы $\mathrm{PGL}_2(k)$ следует, что, в отличие от аффинно-треугольных, треугольные подгруппы неразрешимы.

Далее коммутант группы $H$ обозначается через $[H,H]$. Для любого целого $i \geqslant 0$ положим

$$\mathcal{D}^{i+1}(H) := [\mathcal{D}^i(H), \mathcal{D}^i(H)], \qquad \mathcal{D}^0(H) := H. \tag{10}$$

Разрешимость группы $H$ означает существование такого $i$, что группа $\mathcal{D}^i(H)$ тривиальна; далее через $\ell(H)$ обозначается наименьшее такое $i$.

Предложение 2. *Имеем*

$$[\log_2(n-1)] + 2 \leqslant \ell(\mathscr{B}_n) \leqslant 2n.$$

Доказательство. Поскольку $\ell(B_2(K_i, x_{i+1})) = 2$, правое неравенство следует из существования цепочки нормальных делителей $\mathscr{B}_n(i)$ в $\mathscr{B}_n$ и неравенства $\ell(G) \leqslant \ell(H) + \ell(G/H)$, выполненного для любой разрешимой группы $G$ и ее нормального делителя $H$. Чтобы доказать левое, рассмотрим в $\mathscr{B}_n$ подгруппу $B_n$, образованную всеми $\sigma$, у которых $\sigma_i$ является однородной линейной функцией от $x_1, x_2, \dots, x_i$ для каждого $i$. Она является группой всех верхне-треугольных матриц в $\mathrm{GL}_n(k)$ и потому $\ell(B_n) = [\log_2(n-1)] + 2$ (см, например, [11; § 18, теорема 1]). Это завершает доказательство.

**3.** Теперь мы исследуем вопрос о связности. Пусть $\mathscr{S}$ – подмножество в $\mathscr{C}_n$. Мы называем два элемента $\sigma$ и $\tau \in \mathscr{S}$ *линейно соединимыми в* $\mathscr{S}$, если найдутся открытое подмножество $U$ аффинной прямой $\mathbf{A}^1$ и алгебраическое семейство $\alpha\colon U \to \mathscr{C}_n$ такие, что $\sigma, \tau \in \alpha(U) \subseteq \mathscr{S}$. Легко проверяется, что если $\mathscr{S}$ – подгруппа в $\mathscr{C}_n$, то отношение линейной соединимости в $\mathscr{S}$ является отношением эквивалентности на $\mathscr{S}$ (см. относящееся к случаю $\mathscr{S} = \mathscr{C}_n$ рассуждение из доказательства [2; теорема 5.1], пригодное и в общем случае). Если в подгруппе $\mathscr{S}$ имеется единственный класс этого отношения эквивалентности, то она называется *линейно связной*. Линейно связные подгруппы связны.

Предложение 3. *Аффинно-треугольные подгруппы в* $\mathscr{C}_n$ *линейно связны.*

Доказательство. Все элементы $\tau \in \mathscr{B}_n$, для которых

$$\tau_i = c_i x_i, \qquad \text{где} \quad c_i \in K_{i-1}, \quad c_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{11}$$

образуют в $\mathscr{B}_n$ подгруппу $\mathscr{D}_n$. Рассмотрим какой-либо элемент элемент $\tau \in \mathscr{D}_n$ и покажем, что он линейно соединим в $\mathscr{D}_n$ с $\mathrm{id} = (x_1, \dots, x_n)$. Используя обозначения (11), обозначим через $I$ множество всех таких $i$, что $c_i \in k$, $c_i \neq 1$. Пусть $U$ – дополнение в $\mathbf{A}^1$ к конечному множеству $\{1/(1-c_i) \mid i \in I\}$. Тогда алгебраическое семейство

$$\alpha\colon U \to \mathscr{C}_n, \qquad t \mapsto ((1 + t(c_1 - 1))x_1, \dots, (1 + t(c_n - 1))x_n),$$

обладает нужными свойствами: $\alpha(U) \subseteq \mathscr{D}_n$ и $\alpha(0) = \mathrm{id}$, $\alpha(1) = \sigma$.

Для завершения доказательства теперь достаточно установить, что любой элемент $\sigma \in \mathscr{B}_n$ линейно соединим в $\mathscr{B}_n$ с каким-либо элементом из $\mathscr{D}_n$. По определению группы $\mathscr{B}_n$, мы имеем $\sigma_i = c_i x_i + s_i$, где $c_i, s_i \in K_{i-1}$, $c_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим алгебраическое семейство $\beta\colon \mathbf{A}^1 \to \mathscr{C}_n$, $t \mapsto (c_1 x_1 + t s_1, \dots, c_n x_n + t s_n)$. Тогда $\beta(\mathbf{A}^1) \subseteq \mathscr{B}_n$ и $\beta(0) \in \mathscr{D}_n$, $\beta(1) = \sigma$, что и требовалось.

**4.** Исследуем теперь к вопрос о максимальности.

Далее мы следующим образом отождествляем касательное пространство к $\mathbf{A}^n$ в любой точке $a \in \mathbf{A}^n$ с самим $\mathbf{A}^n$: точка $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{A}^n$ отождествляется с дифференцированием кольца $k[\mathbf{A}^n]$ в точке $a$ по направлению $v$,

$$k[\mathbf{A}^n] \to k, \qquad f \mapsto \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i.$$

Рассмотрим какой-либо элемент $\tau \in \mathscr{C}_n$. Поскольку он является бирациональным автоморфизмом пространства $\mathbf{A}^n$, найдется такая точка $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{A}^n$, что все функции $\tau_i$ (а значит, и $\tau$) определены в $s$, а $d_s\tau$ (дифференциал $\tau$ в точке $s$) является изоморфизмом. Значит, ввиду указанного отождествления, $d_s\tau$ – тоже элемент группы $\mathscr{C}_n$, а точнее, ее подгруппы $\mathrm{GL}_n(k)$. Рассмотрим теперь следующие элементы группы $\mathscr{B}_n$:

$$\begin{aligned}
\rho_t &:= (tx_1 - s_1, \dots, tx_n - s_n), && \text{где} \quad t \in k^\times, \\
\lambda_t &:= (t^{-1}x_1, \dots, t^{-1}x_n), && \text{где} \quad t \in k^\times, \\
\mu &:= (x_1 - \tau_1(s), \dots, x_n - \tau_n(s)).
\end{aligned} \tag{12}$$

Лемма 1. *Отображение*

$$\theta\colon \mathbf{A}^1 \to \mathscr{C}_n, \qquad t \mapsto \begin{cases} \lambda_t \circ \mu \circ \tau \circ \rho_t, & \text{если } t \neq 0, \\ d_s\tau, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

*является алгебраическим семейством.*

Доказательство. Рассмотрим систему $x_1 - s_1, \ldots, x_n - s_n$ локальных параметров многообразия $\mathbf{A}^n$ в точке $s$. Поскольку функция $\tau_i$ определена в $s$, ее можно разложить по указанной системе в ряд Тейлора в этой точке, т.е. существует такой (единственный, ввиду гладкости $\mathbf{A}^n$) формальный степенной ряд $F_i(z_1, \ldots, z_n)$ от переменных $z_1, \ldots, z_n$ с коэффициентами в $k$, что в пополнении локального кольца точки $s$ многообразия $\mathbf{A}^n$ имеет место равенство

$$\tau_i = F_i(x_1 - s_1, \ldots, x_n - s_n). \tag{13}$$

Ряд $F_i(z_1, \ldots, z_n)$ представляется в виде

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = \tau_i(s) + \sum_{d \geqslant 1} F_{i,d}(z_1, \ldots, z_n), \tag{14}$$

где $F_{i,d}(z_1, \ldots, z_n)$ – форма степени $d$ от $z_1, \ldots, z_n$ с коэффициентами в $k$, так что

$$F_{i,d}(tz_1, \ldots, tz_n) = t^d F_{i,d}(z_1, \ldots, z_n) \qquad \text{для любого} \quad t \in k. \tag{15}$$

Из (13), (14) и определения дифференциала следует, что

$$d_s\tau = (F_{1,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{n,1}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{16}$$

а из (4), (12), (13), (14) и (15) с помощью простой выкладки получается, что $i$-я компонента элемента $\lambda_t \circ \mu \circ \tau \circ \rho_t \in \mathscr{C}_n$ для любого $t \in k^\times$ равна

$$F_{i,1}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{d \geqslant 2} t^{d-1} F_{i,d}(x_1, \ldots, x_n). \tag{17}$$

Ввиду (12) и (13), для любого $t \in k$ формальный ряд (17) является рядом Тейлора по $x_1, \ldots, x_n$ в нуле для некоторой функции из $k(\mathbf{A}^n)$. Отсюда и из (16) и (17) вытекает утверждение леммы.

Замечание 2. Если $\tau \in \operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$, то $\theta$ – алгебраической семейство в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$.

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{G}$ – подгруппа в $\mathscr{C}_n$. Если $\mathscr{G} = \overline{\mathscr{G}}$ и $\mathscr{G} \supsetneqq \mathscr{B}_n$, то $\mathscr{G}$ неразрешима.*

Доказательство. Будем доказывать это утверждение от противного, предположив, что $\mathscr{G}$ разрешима. Рассмотрим какой-нибудь элемент $\tau \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{B}_n$. Есть две возможности: либо $\tau$ лежит в треугольной подгруппе $\mathscr{T}_n$, либо нет.

Рассмотрим сначала первую из них: пусть $\tau \in \mathscr{T}_n$. Поскольку $\tau \notin \mathscr{B}_n$, найдется такой номер $i$, что $\tau_i \notin B_2(K_{i-1}, x_i)$, а $\tau_j \in B_2(K_{j-1}, x_j)$ при всех $j < i$ (см. обозначения в доказательстве предложения 1). Из (4) следует, что

$$\mathscr{T}_n(j) := \{\sigma \in \mathscr{T}_n \mid \sigma_1 = x_1, \ldots, \sigma_j = x_j\} \tag{18}$$

– подгруппа в $\mathscr{T}_n$. Заменяя $\tau$ на $\tau \circ \sigma$ для подходящего $\sigma \in \mathscr{B}_n$, мы можем (и будем) далее считать, что $\tau \in \mathscr{T}_n(i-1)$. Рассмотрим в $\mathscr{G} \cap \mathscr{T}_n(i-1)$ подгруппу $\mathscr{H}$, порожденную $\tau$ и

$$\mathscr{B}_n(i-1) = \mathscr{B}_n \cap \mathscr{T}_n(i-1)$$

(см. (9)). Поскольку $\mathscr{G}$ разрешима, то и $\mathscr{H}$ разрешима. Из (4), (18) следует, что

$$\mathscr{T}_n(i-1) \to \mathrm{PGL}_2(K_{i-1}, x_i), \qquad \sigma \mapsto \sigma_i,$$

– эпиморфизм групп. Значит, его ограничение на $\mathscr{H}$ является гомоморфизмом групп $\mathscr{H} \to \mathrm{PGL}_2(K_{i-1}, x_i)$. Ввиду разрешимости $\mathscr{H}$, образ $I$ этого гомоморфизма является разрешимой подгруппой в $\mathrm{PGL}_2(K_{i-1}, x_i)$. Но из конструкции следует, что $I$ содержит подгруппу $B_2(K_{i-1}, x_i)$ и не лежащий в ней элемент $\tau_i$. Поскольку $B_2(K_{i-1}, x_i)$ является максимальной подгруппой в $\mathrm{PGL}_2(K_{i-1}, x_i)$ (см., например, [12; теорема 7]), мы заключаем, что $I = \mathrm{PGL}_2(K_{i-1}, x_i)$. Это противоречит тому, что $\mathrm{PGL}_2(K_{i-1}, x_i)$ не является разрешимой группой. Значит, рассмотренная возможность не реализуется.

Рассмотрим оставшуюся возможность: пусть $\tau \notin \mathscr{T}_n$, т.е. $\tau_i \notin K_i$ для какого-то $i$. Значит, $\partial\tau_i/\partial x_j \neq 0$ для некоторого $j > i$. Рассмотрим в $\mathbf{A}^n$ точку $s$ со свойствами: $\tau$ и $\partial\tau_i/\partial x_j$ определены в $s$, дифференциал $d_s\tau$ является изоморфизмом и

$$\frac{\partial\tau_i}{\partial x_j}(s) \neq 0, \tag{19}$$

– ясно, что такая $s$ существует. Поскольку все элементы (12) лежат $\mathscr{G}$, из леммы 1 и замкнутости $\mathscr{G}$ вытекает, что $d_s\tau \in \mathscr{G} \cap \mathrm{GL}_n(k)$. С другой стороны, из (19) следует, что $d_s\tau$ не лежит в борелевской подгруппе $B_n = \mathscr{B}_n \cap \mathrm{GL}_n(k) \subset \mathscr{G}$ группы $\mathrm{GL}_n(k)$. Значит, подгруппа в $\mathscr{G}$, порожденная $d_s\tau$ и $B_n$ неразрешима (см. [13; теорема 11.16]). Это противоречит разрешимости $\mathscr{G}$ и завершает доказательство.

**5.** Исследуем теперь к вопрос о замкнутости.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{G}$ – подгруппа (не обязательно замкнутая) в $\mathscr{C}_n$. Тогда*
(i) *$\overline{\mathscr{G}}$ – подгруппа в $\mathscr{C}_n$;*
(ii) *$\overline{[\mathscr{G}, \mathscr{G}]} = \overline{[\overline{\mathscr{G}}, \overline{\mathscr{G}}]}$;*
(iii) *разрешимость $\mathscr{G}$ эквивалентна разрешимости $\overline{\mathscr{G}}$. Если $\mathscr{G}$ и $\overline{\mathscr{G}}$ разрешимы, то $\ell(\mathscr{G}) = \ell(\overline{\mathscr{G}})$.*

Доказательство. (i) Если в формулировке заменить $\mathscr{C}_n$ на алгебраическую группу $G$, то (i) превращается в верное утвеждение, доказательство которого использует только то, что левые и правые сдвиги группы $G$ являются ее гомеоморфизмами, см., например, [13; I.1.3 (b)]. Поскольку левые и правые сдвиги группы $\mathscr{C}_n$ тоже являются ее гомеоморфизмами, это же доказательство устанавливает и справедливость (i).

(ii) Для любого подмножества $S$ в $\mathscr{C}_n$ положим $S^2 := S \times S$ и обозначим через $\mathscr{A}(S)$ наименьшую замкнутую подгруппу в $\mathscr{C}_n$, содержащую $S$. Ясно, что

$$\mathscr{A}(S) = \mathscr{A}(\overline{S}). \tag{20}$$

Снабдим $\mathscr{C}_n^2$ топологией Зарисского. Тогда отображение $\mathscr{C}_n^2 \to \mathscr{C}_n, (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$, непрерывно (см. [1; 1.6]), а значит, непрерывно и отображение

$$\kappa\colon \mathscr{C}_n^2 \to \mathscr{C}_n, \qquad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}. \tag{21}$$

Как и в доказательстве утверждения (i) мы получаем, что замыкание $\overline{\mathscr{G}^2}$ подгруппы $\mathscr{G}^2$ в $\mathscr{C}_n^2$ является наименьшей замкнутой подгруппой в $\mathscr{C}_n^2$, содержащей $\mathscr{G}^2$. Поскольку $\mathscr{G} \times \{\mathrm{id}\}$ и $\{\mathrm{id}\} \times \mathscr{G}$ являются подгруппами в $\mathscr{G}^2$, их замыкания $\overline{\mathscr{G}} \times \{\mathrm{id}\}$ и $\{\mathrm{id}\} \times \overline{\mathscr{G}}$ в $\mathscr{C}_n^2$ лежат поэтому в $\overline{\mathscr{G}^2}$. Но эти замыкания порождают группу $\overline{\mathscr{G}}^{\,2}$. Значит, $\overline{\mathscr{G}}^{\,2} \subseteq \overline{\mathscr{G}^2}$. Поскольку обратное включение очевидно, этим доказано равенство $\overline{\mathscr{G}^2} = \overline{\mathscr{G}}^{\,2}$.

Из последнего равенства и непрерывности отображения $\kappa$ следует, что $\overline{\kappa(\mathscr{G}^2)} = \overline{\kappa(\overline{\mathscr{G}}^{\,2})}$, откуда, ввиду (20), вытекает равенство $\mathscr{A}(\kappa(\mathscr{G}^2)) = \mathscr{A}(\kappa(\overline{\mathscr{G}}^{\,2}))$. Но из (21) и (i) следует, что левая и правая части последнего равенства равны соответственно $\overline{[\mathscr{G}, \mathscr{G}]}$ и $\overline{[\overline{\mathscr{G}}, \overline{\mathscr{G}}\,]}$. Это доказывает (ii).

(iii) Положим $\mathscr{H} := \overline{\mathscr{G}}$ и воспользуемся обозначениями (10). Тогда

$$\overline{\mathcal{D}^i(\mathscr{G})} = \overline{\mathcal{D}^i(\mathscr{H})} \qquad \text{для любого целого} \quad i \geqslant 0. \tag{22}$$

В самом деле, (22) при $i = 0$ следует из равенства $\overline{\mathscr{H}} = \mathscr{H}$. Если же $i > 0$, то мы, рассуждая по индукции и используя (ii), получаем:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}^i(\mathscr{G})} &= \overline{[\mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{G}), \mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{G})]} \overset{\text{(ii)}}{=} \overline{[\overline{\mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{G})}, \overline{\mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{G})}\,]} \\ &= \overline{[\overline{\mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{H})}, \overline{\mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{H})}\,]} \overset{\text{(ii)}}{=} \overline{[\mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{H}), \mathcal{D}^{i-1}(\mathscr{H})]} = \overline{\mathcal{D}^i(\mathscr{H})}. \end{aligned}$$

Из (22) следует, что тривиальность $\mathcal{D}^i(\mathscr{G})$ эквивалентна тривиальности $\mathcal{D}^i(\overline{\mathscr{G}})$. Это доказывает (iii).

Предложение 5. *Группа $\mathscr{B}_n$ замкнута в $\mathscr{C}_n$.*

Доказательство. Из предложения 1 и утверждений (i), (iii) леммы 2 мы заключаем, что $\overline{\mathscr{B}}_n$ является замкнутой разрешимой подгруппой группы $\mathscr{C}_n$, содержащей $\mathscr{B}_n$. Отсюда и из предложения 4 следует, что $\overline{\mathscr{B}}_n = \mathscr{B}_n$.

**6.** Возвращаясь к аналогии между группами Кремоны и аффинными алгебраическими группами, напомним, что следующие два свойства борелевских подгрупп играют ключевую роль в теории аффинных алгебраических групп $G$ (см. [13], [14], [15]):

(a) всякая связная замкнутая разрешимая подгруппа группы $G$ содержится хотя бы в одной борелевской подгруппе группы $G$;

(b) любые две борелевские подгруппы группы $G$ сопряжены.

Это приводит к естественному вопросу о справедливости утверждений, полученных из (a) и (b) заменой аффинной алгебраической группы $G$ на группу Кремоны $\mathscr{C}_n$.

Теорема 1 вместе со следующей теоремой 2 показывают, что хотя бы одно из полученных таким образом утверждений неверно при $n \geqslant 5$.

Теорема 2. *Если $n \geqslant 5$, то для любой связной разрешимой $(n-3)$-мерной аффинной алгебраической группы $S$ существует такая алгебраическая подгруппа $\mathscr{S}$ группы Кремоны $\mathscr{C}_n$, что*

(a) *алгебраические группы* $S$ *и* $\mathscr{S}$ *изоморфны*;

(b) $\mathscr{S}$ *не лежит ни в какой аффинно-треугольной подгруппе группы* $\mathscr{C}_n$.

Доказательство. Это следует из [7; следствие 4.4].

Гипотеза. При $n \geqslant 5$ в группе Кремоны $\mathscr{C}_n$ существуют несопряженные борелевские подгруппы.

**7.** В заключение рассмотрим в аффинной группе Кремоны $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ подгруппу де Жонкьера

$$\begin{aligned} \mathscr{J}_n &= \{\sigma \in \mathscr{C}_n \mid \sigma_i = a_i x_i + h_i,\ a_i \in k^{\times},\ h_i \in k[\mathbf{A}^n] \cap K_i\} && (23)\\ &= \mathscr{T}_n \cap \operatorname{Aut} \mathbf{A}^n = \mathscr{B}_n \cap \operatorname{Aut} \mathbf{A}^n. && (24) \end{aligned}$$

Из результатов и доказательств этой заметки получается

Следствие. $\mathscr{J}_n$ *является борелевской подгруппой группы* $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ *и*

$$[\log_2(n-1)] + 2 \leqslant \ell(\mathscr{J}_n) \leqslant 2n. \tag{25}$$

Доказательство. Разрешимость $\mathscr{J}_n$ и правое неравенство в (25) следуют соответственно из предложений 1 и 2. Поскольку $B_n = \mathscr{B}_n \cap \mathrm{GL}_n(k)$ является подгруппой в $\mathscr{J}_n$, как и в доказательстве предложения 2 мы получаем левое неравенство в (25). То же рассуждение, что и в доказательстве предложения 3, но с заменой $\mathscr{B}_n$ на $\mathscr{J}_n$, а $\mathscr{D}_n$ на максимальный тор $\mathscr{D}_n \cap \mathscr{J}_n$ в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ (см. [7], [8]) показывает, что $\mathscr{J}_n$ линейно связна. Замена $\mathscr{C}_n$ на $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$, а $\mathscr{B}_n$ на $\mathscr{J}_n$ в предложении 4 дает верное утверждение: ввиду (24) и замечания 2, оно обосновывается теми же аргументами, что и в последнем абзаце доказательства предложения 4. Отсюда следует максимальность $\mathscr{J}_n$. Замкнутость $\mathscr{J}_n$ в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ вытекает из (23) (впрочем, с заменой $\mathscr{C}_n$ на $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$, а $\mathscr{B}_n$ на $\mathscr{J}_n$ сохраняют также силу утверждения и доказательства леммы 2 и предложения 5).

Замечание 3. То, что $\mathscr{J}_n$ при $k = \mathbb{C}$ является борелевской подгруппой в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$, было доказано сначала в [16] для $n = 2$, а затем в [9] для любого $n$. При этом в [9; лемма 2.2] утверждается, что $\ell(\mathscr{J}_n) = n + 1$, но приведенное доказательство неверно, поскольку опирается на неверное равенство $\ell(B_n) = n + 1$. Отметим, что в [16] и [9] борелевские подгруппы определяются как максимальные подгруппы среди всех связных разрешимых подгрупп, хотя классическое определение включает еще и требование замкнутости, см. [14; 21.3], [15; 6.2.6]. В контексте аффинных алгебраических групп это требование выполнено автоматически ввиду общих свойств замыканий подгрупп. То, что оно выполнено автоматически и в контексте бесконечномерных групп $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ и $\mathscr{C}_n$, нуждается в обосновании. Нам не удалось найти такое обоснование в литературе; оно дано в лемме 2.

Замечание 4. Как и в п. 6, естественно рассмотреть вопрос о справедливости утверждений, полученных из (a) и (b) заменой $G$ на $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$. Поскольку при $n \geqslant 3$ в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ имеются одномерные унипотентные подгруппы, не лежащие ни в какой сопряженной с $\mathscr{J}_n$ в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ подгруппе (см. [17]), хотя бы одно из полученных таким образом утверждений неверно при $n \geqslant 3$.

Автор благодарен К. А. Шрамову за замечания.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] J.-P. Serre, "Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis", *Astérisque*, **332** (2010), 75–100.

[2] J. Blanc, "Groupes de Cremona, connexité et simplicité", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4), **43**:2 (2010), 357–364.

[3] J. Blanc, J.-P. Furter, "Topologies and structures of the Cremona groups", *Ann. of Math.* (2), **178**:3 (2013), 1173–1198.

[4] C. P. Ramanujam, "A note on automorphism groups of algebraic varieties", *Math. Ann.*, **156** (1964), 25–33.

[5] V. L. Popov, "On infinite dimensional algebraic transformation groups", *Transform. Groups*, **19**:2 (2014), 549–568.

[6] M. Demazure, "Topologies and structures of the Cremona groups", *Ann. Sci. École Norm. Supér.* (4), **3** (1970), 507–588.

[7] V. L. Popov, "Some subgroups of the Cremona groups", *Affine Algebraic Geometry*, World Sci. Publ., Singapore, 2013, 213–242.

[8] В. Л. Попов, "Торы в группах Кремоны", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:4 (2013), 103–134.

[9] J.-P. Furter, P.-M. Poloni, *On the Maximality of the Triangular Subgroup*, 2016, arXiv: 1605.06344.

[10] Б. Л. ван дер Варден, *Алгебра*, Наука, М., 1976.

[11] Д. А. Супруненко, *Группы матриц*, Наука, М., 1972.

[12] S. Akbari, R. Ebrahimian, H. Momenaee Kermani, A. Salehi Golsefidy, "Maximal subgroups of $\mathrm{GL}_n(D)$", *J. Algebra*, **259**:1 (2003), 201–225.

[13] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Grad. Texts in Math., **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[14] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Grad. Texts in Math., **21**, Springer-Verlag, New York, 1975.

[15] T. A. Springer, *Linear Algebrac Groups*, Progr. Math., **9**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[16] Y. Berest, A. Eshmatov, F. Eshmatov, "Dixmier groups and Borel subgroups", *Adv. Math.*, **286** (2016), 387–429.

[17] V. L. Popov, "On actions of $\mathbf{G}_a$ on $\mathbf{A}^n$", *Algebraic Groups*, Lecture Notes in Math., **1271**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 237–242.



**В. Л. Попов**
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
*E-mail*: popovvl@mi.ras.ru



Поступило
21.02.2017