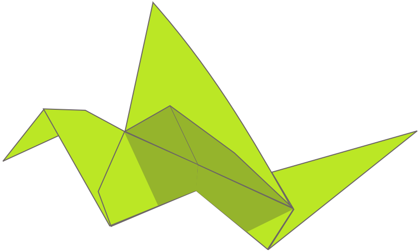
Аксиоматика геометрии оригами

(предиката $Sym(A, l, B)$)

Лукашов Никита
lnv619@gmail.com

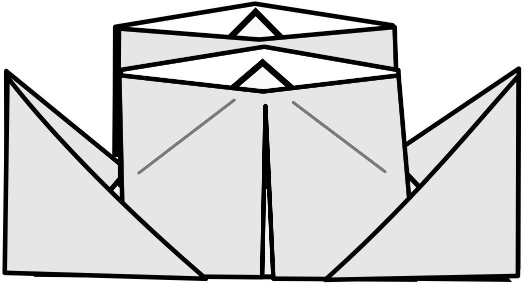
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

13 мая 2022 г.



Оригами

- Искусство складывания фигурок из бумаги
- Берёт корни в Древнем Китае, где была изобретена бумага
- Достижение наибольшей точности



На пути к аксиоматизации

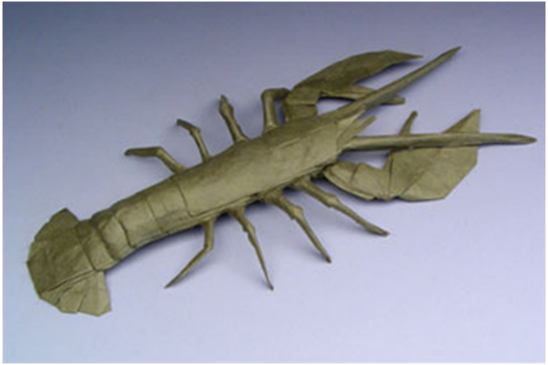
Huzita-Justin или Huzita-Hatory аксиомы, 1989 г.

1. Для данных двух точек P_1 и P_2 можно сделать изгиб, проходящий через обе эти точки.
2. Для данных двух точек P_1 и P_2 можно сделать изгиб, совмещающий точку P_1 с точкой P_2.
3. Для данных двух прямых l_1 и l_2 можно сделать изгиб, совмещающий прямую l_1 с прямой l_2.
4. Для данных прямой l и точки P можно сделать изгиб, ортогональный l и проходящий через точку P.
5. Для данных двух точек P_1 и P_2 и прямой l_1 можно сделать изгиб, помещающий точку P_1 на прямую l_1 и проходящий через точку P_2.
6. Для данных двух точек P_1 и P_2 и двух прямых l_1 и l_2 можно сделать изгиб, помещающий точку P_1 на прямую l_1 и точку P_2 на прямую l_2.

— визуализация: https://mathigon.org/course/euclidean-geometry/origami

Приложение оригами в математике

- можно строить корни многочленов третьей и четвёртой степеней
- решение проблемы удвоения куба
- computational origami
- Robert Lang's algorithm



Постановка проблемы

Замечание

Huzita-Justin аксиомы не являются аксиомами в строгом логическом смысле $\Rightarrow$ необходимо придумать аксиоматику.

- нужно выбрать неопределяемые понятия (зафиксировать сигнатуру)
- записать сопутствующие аксиомы в языке первого порядка для предикатов (отношений) из сигнатуры, а также выраженные через них Huzita-Justin аксиомы.

[Beklemishev et al., 2020],язык из переменных двух сортов: точки $(A, B, C, \ldots)$ и прямые $(l, m, n, \ldots)$

Базовые понятия из [Beklemishev et al., 2020]

1. отношение *инцидентности* $P \in l$ между точками и прямыми,
2. отношение *ортогональности* $l_1 \perp l_2$ между двумя прямыми,
3. отношение *лежать между* или *порядка* для трёх точек P_1, P_2, P_3, обозначаемое $Be(P_1, P_2, P_3)$

Абсолютная геометрия

Аксиомы Гильберта для инцидентности

I-1: Для двух различных точек A и B найдётся единственная прямая l, такая что $A \in l$ и $B \in l$.

I-2: Любой прямой, по крайней мере, принадлежит две различные точки.

I-3: Найдётся три различные точки A, B, C, такие что никакая прямая l не содержит все из них.

Аксиома Гильберта о параллельных (сильная версия)

Пусть дана произвольная прямая l и точка A, не принадлежащая ей. Тогда существует единственная прямая, определённая l и A, которая проходит через A и не пересекает l.

Абсолютная геометрия

Definition

Три точки A, B, C с фиксированным порядком образуют *треугольник* ABC. В этом случае, точки A, B, C называются *вершинами* и соединяющие их прямые AB, AC, BC — *сторонами* этого треугольника.

Definition

Четыре точки A, B, C, D с фиксированным порядком образуют *параллелограмм* $ABCD$, если эти точки различны друг от друга, любые три из них не лежат на одной прямой, и прямые AB и CD, соединяющие точки A, B и C, D соответственно, параллельны, а также прямые AD и BC, соединяющие точки A, D и D, C соответственно, параллельны; т. е. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Абсолютная геометрия

Замечание ([Wu, 2012], с. 19)

Начиная с двух точек A, B, можно построить параллелограмм.

Аксиома бесконечности (схема)

Для данных точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, и прямой l, такой что $A \in l$ и $B, C \notin l$, построим прямую l_1, проходящую через C и параллельную AB, и возьмём за A_1 пересечение l_1 и l. Индукцией, определим l_n как прямую, проходящую через C и параллельную A_nB, и обозначим через A_{n+1} её пересечение с l. Тогда все A_i являются различными.

Theorem

Диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке.

Доказательство.

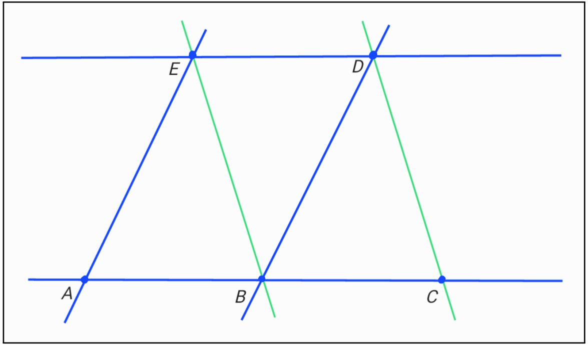
[Wu, 2012], с. 19-20 □

Аксиомы Дезарга

1. Если три пары соответствующих сторон двух треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны друг другу, т. е. $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, то три прямые AA', BB', CC', соединяющие соответствующие вершины этих двух треугольников, либо параллельны друг другу, либо пересекаются в одной точке.
2. Если две пары соответствующих сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны друг другу, скажем $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, и три прямые, соединяющие соответствующие вершины, различны и либо пересекаются в одной точке или параллельны друг другу, то третья пара соответствующих сторон также является параллельной друг другу, т. е. $BC \parallel B'C'$.

Definition

Пусть $A \neq B$ — произвольные точки на прямой l. Построим произвольный параллелограмм $ABCD$, как мы делали ранее. Через D проведём прямую, параллельную BE и пересекающую l в точке C. Будем говорить, что точка C *симметрична точке A относительно B*.

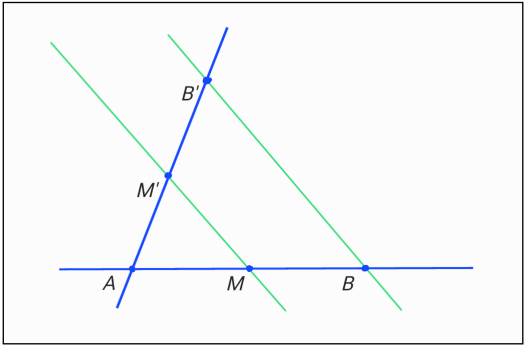


- C не зависит от выбора параллелограмма $ABCD$

Абсолютная геометрия

Definition

Пусть $A \neq B$ — произвольные точки на прямой l. Проведём через A прямую l', отличную от l, и возьмём на ней точку M', отличную от A. Построим точу B', симметричную A относительно M', и проведём через M' прямую $M'M \parallel B'B$ и пересекающую l в точке M. Будем называть M *серединой* A и B.



- M не зависит от выбора прямой l' и точки M'

Абсолютная геометрия

Definition

Центр параллелограмма — точка пересечения его диагоналей.

Theorem

1. *Центр параллелограмма является серединой его противоположных вершин.*
2. *Пусть четыре точки A, D, C, D — попарно различны и никакие три из них не лежат на одной прямой. Если середина A и C совпадает с серединой B и D, то $ABCD$ — параллелограмм.*

Доказательство.

[Wu, 2012], с. 24, теоремы 1 и 2. □

Аксиомы для ортогональности

Аксиомы для $\perp$

1. $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow l_2 \perp l_1$.
2. Для данной точки O и прямой l_1 существует ровно одна прямая l_2, такая что $l_1 \perp l_2$ и $O \in l_2$.
3. Если $l_2 \perp l_1$ и $l_3 \perp l_1$, тогда $l_2 \parallel l_3$ или $l_2 = l_3$.
4. Для любой точки O существует прямая l, такая что $O \in l$ и $l \not\perp l$ (см. замечание ниже).
5. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Замечание

A4 заменим на "Любая прямая не является изотропной".

Аксиомы для ортогональности

Definition

Для пары A, B двух различных точек проведём прямую l, проходящую через середину A и B и перпендикулярную AB. Будем называть l *серединным перпендикуляром* точек A и B и говорить, что точки A и B *симметричны* относительно l. (Положим по определению, что точки на прямой l являются симметричными самим себе).

- Для данной точки A и прямой l можно построить точку B, симметричную A относительно l, т. е. $Sym(A, l, B)$.

Аксиомы для ортогональности

Theorem

Если точки $A_1, A_2, \ldots$ лежат на одной прямой, то симметричные им точки $B_1, B_2, \ldots$ относительно прямой l также лежат на одной прямой.

Definition

Пусть даны прямая l_1 и l_2 и пусть точки, симметричные точкам на прямой l_1 относительно l, образуют прямую l_2 (см. теорему выше). Будем говорить, что l_2 является *симметричной прямой* l_1 относительно l, и что l является *симметрической осью* прямых l_1 и l_2.

Аксиомы для $\perp$

6. Для любых двух пересекающихся прямых существует их симметрическая ось.

Неразрешимость $T_\perp$

- аксиомы порядка
- запись Huzita-Justin в языке $\{\in, \perp, Be\}$
- $T_\perp$ — получившиеся теория упорядоченной плоскости Ву
- биинтерпретация $T_\perp$ с Пифагоровыми полями

Theorem (M. Ziegler, 1982 г.)

Пусть T — конченая подтеория теории $(\mathbb{R}; +, \times)$. Тогда

1. *T неразрешима;*
2. *То же самое верно для расширения T добавленем аксиом, утверждающий что характеристика поля равна 0.*

Theorem ([Beklemishev et al., 2020], theorem 6)

Теория упорядоченных плоскостей Ву $T_\perp$ является неразрешимой.

Постановка задачи

- выбор языка отнюдь не единственный
- многие аксиомы (H-1), ..., (H-6) записываются лаконично через $Sym(A, l, B)$

Problem 1, [Beklemishev et al., 2020]

Найти естественную аксиоматику $T_\perp$ упорядоченных плоскостей Ву в терминах $\in$ и $Sym(A, l, B)$.

- отстутствие (или малая известность) результатов для $Sym(A, l, B)$, аналогичных для $\perp$ из [Wu, 2012]

Цель исследования

1. придумать аксиоматику для $Sym(A, l, B)$
2. эквивалентность с соответствующей аксиоматикой для *perp* по модулю аксиом абсолютной геометрии.

Аксиомы для симметрии

Аксиомы для $Sym(A, l, B)$

0. Для данной прямой все её точки симметричны самим себе относительно этой прямой.

$$\forall l, O \in l \; Sym(O, l, O)$$

Аксиомы для симметрии

Аксиомы для $Sym(A, l, B)$

1. Отношение $Sym(A, l, B)$ симметрично для точек.

$$\forall A, B, l \ (Sym(A, l, B) \to Sym(B, l, A))$$

Аксиомы для симметрии

Аксиомы для $Sym(A, l, B)$

2. Для данных прямой l и точки A существует единственная точка B, симметричная A относительно l.

$$\forall A, l \exists! B \; Sym(A, l, B)$$

Аксиомы для симметрии

Аксиомы для $Sym(A, l, B)$

3

- Для любых двух точек A и B, существует прямая l, относительно которой они симметричны. Прямую l будем называть *серединным перпендикуляром* точек A и B.

$$\forall A, B \exists l \ Sym(A, l, B)$$

- Для противоположных вершин параллелограмма серединный перпендикуляр проходит через его центр.

$$\forall A, B, C, D, l \ (AB \parallel CD \wedge BC \parallel AD \wedge Sym(A, l, C)) \rightarrow AC \cap BD \in l$$

Аксиомы для симметрии

Аксиомы для $Sym(A, l, B)$

4. Для данных пар точек (A_1, B_1) и (A_2, B_2), симметричных относительно заданной прямой l, прямые A_1A_2 и B_1B_2 являются также симметричными относительно прямой l.

$$\forall l, A_1, A_2, B_1, B_2 \, (Sym(A_1, l, B_1) \wedge Sym(A_2, l, B_2) \to \\ \to (\forall P \in A_1A_2 \exists P' \in B_1B_2 \; Sym(P, l, P')))$$

Аксиомы для симметрии

Аксиомы для $Sym(A, l, B)$

5. Для данных прямых l_1 и l_2, пересекающихся в точке O, и для любой точки A, если B — точка, симметричная A относительно l_1, и C — точка, симметричная B относительно l_2, то серединный перпендикуляр для A и C проходит через O.

$$\forall l_1, l_2, O, A, B, C, l \ (l_1 \cap l_2 = O \wedge Sym(A, l_1, B) \wedge Sym(B, l_2, C) \wedge Sym(A, l, C)) \to O \in l$$

Аксиомы для симметрии

Аксиомы для $Sym(A, l, B)$

6. Для данных пересекающихся прямых существует их симметрическая ось.

$$\forall k, m, O\left((O \in k \wedge O \in m) \rightarrow (\exists l \forall P \in k \exists P' \in m \, Sym(P, l, P'))\right)$$

Аксиомы для симметрии

Замечания

- аксиомы в языке первого порядка
- не происходит *профанации*, т. е. никакая аксиома выше не получена из соответствующей для перпендикулярности подстановкой определения.

Definition

Прямая l_1 перпендикулярна прямой l_2, если l_1 при симметрии относительно l_2 переходит в себя.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow l_1 \neq l_2 \wedge \big(\forall A, A' \ \big(A \in l_1 \wedge Sym(A, l_2, A') \rightarrow A' \in l_1\big)\big)$$

- необходимо доказательство эквивалентности с аксиомами (O-1), ..., (O-5) для $\perp$

Заключение

Theorem

Теория T_{Sym} *в языке* $\{Sym^3, \in^2\}$ *упорядоченной плоскости оригами By, получающийся из аналогичной* $T_\perp$ *из [Beklemishev et al., 2020] заменой аксиом (O-1)–(O-5), (AxAsAx) для* $\perp$ *на аксиомы (S-0), ..., (S-6) для Sym, является неразрешимой.*

Ещё одино применение

- $\perp \leftrightarrow Sym(A, l, B)$ при наличии аксиом абсолютной геометрии

Beklemishev, L., Dmitrieva, A., and Makowsky, J. (2020).
Axiomatizing origami planes.

Wu, W.-t. (2012).
Mechanical theorem proving in geometries: Basic principles.
Springer Science & Business Media.