# Категория

$C = (Ob(C), Hom(C))$,
$dom: Hom(C) \to Ob(C)$
$cod: Hom(C) \to Ob(C)$


а) (существование композиции)

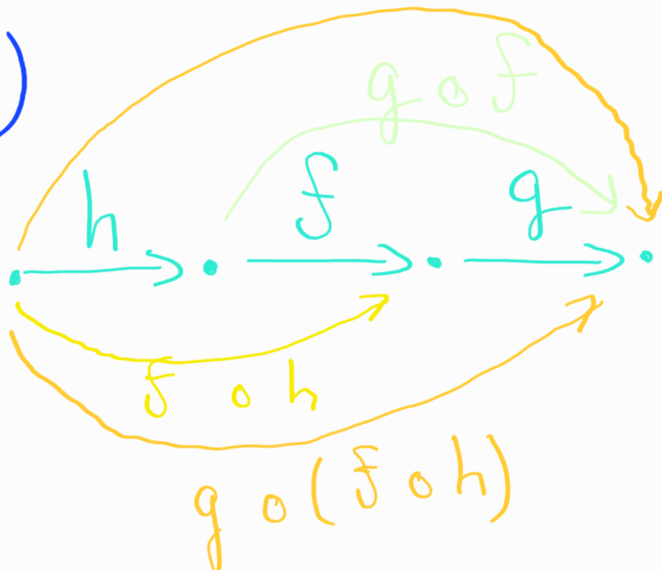
$A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $f, g \in Hom(C)$

$\Rightarrow \exists\, g \circ f \in Hom(C)$ т. ч.

$dom(g \circ f) = A$,
$cod(g \circ f) = C$.


б) (ассоциативность композиции)

$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$




в) $\forall A \in Ob(C)\ \exists 1_A \in Hom(C)$, $dom = cod = A$,
т. ч. $\forall f \in Hom$, $f: A \to B \Rightarrow f \circ 1_A = f$;
$f: B \to A \Rightarrow 1_A \circ f = f$.

# Декартово замкнутая категория (CCC)

① $1 \in Ob$ — терминальный объект, т.е.
$\forall A \in Ob \ \exists! f \in Hom,\ f: A \longrightarrow 1$.

② $\forall X, Y \in Ob$
$\exists X \times Y \in Ob$, $\pi_1 \in Hom(X \times Y, X)$, $\pi_2 \in Hom(X \times Y, Y)$
со св-вами:
$\forall Z \in Ob$, $f_1 \in Hom(Z, X)$, $f_2 \in Hom(Z, Y)$
$\exists! f \in Hom(Z, X \times Y)$, $f =: \langle f_1, f_2 \rangle$, т. ч.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

③ $\forall X, Y \in Ob$
$\exists X^Y \in Ob$, $eval: X^Y \times Y \longrightarrow X$ со св-вами:
$\forall Z \in Ob$, $g \in Hom(Z \times Y \longrightarrow X)$
$\exists! \lambda g \in Hom(Z, X^Y)$ т. ч.

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow{\scriptstyle \lambda g} & & \swarrow{\scriptstyle \lambda g \times 1} & & \searrow{\scriptstyle g} \\ X^Y & & X^Y \times Y & \xrightarrow{eval} & X \end{array}$$

# Простое типизированное лямбда-исчисление (STLC)

## ① Синтаксис

а) $B$ — набор базовых типов, $\sigma \in B$.

$X$ — (набор) ~~множество~~ всех типов, оно содержит:

$B$; $\sigma, \tau \Rightarrow \sigma \to \tau$; $\sigma, \tau \Rightarrow \sigma \times \tau$, $1$.

б) Константы

$* : 1$, $c : 1 \Rightarrow c = *$

в) $U$ — набор термов

$U ::= x : \sigma$ (переменные)

$\lambda x : \sigma . U$ (абстракция)

$U(V)$ (применение) $e_1$ $e_2$

$\langle U, V \rangle$ (пара)

$\pi_1(U)$ (проекция, для $U : \tau \times \sigma$)

$\pi_2(\mathcal{U})$ (проекция, для $\mathcal{U} : \tau \times \sigma$)

$*$

## ② Правила типизации

$\Gamma$ — набор предположений вида $x : \tau$.

1) $$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

2) $$\frac{c : \tau,\ c \text{ - константа}}{\vdash c : \tau}$$

3) $$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau . e) : (\tau \to \sigma)}$$

4) $$\frac{\Gamma \vdash e_1 : (\tau \to \sigma),\ \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash e_1(e_2) : \sigma}$$

Пример

$$((\lambda x : 1 . \lambda y : 1 . x)(*)) : 1 \to 1$$

$$\Uparrow$$

$$\vdash (\lambda x : 1 . \lambda y : 1 . x) : 1 \to (1 \to 1),\ \vdash * : 1$$

$$\Uparrow$$

$$x : 1 \vdash (\lambda y : 1 . x) : 1 \to 1$$

$$\Uparrow$$

$$x : 1, y : 1 \vdash x : 1$$

## ③ $\beta\eta$ — эквациональная теория

- $\beta$ — редукция

$$(\lambda x : \tau . e)(u) =_\beta e[{}^{u}/_{x}]$$

- $\eta$ — редукция

$$\lambda x : \tau . t x =_\eta t,$$ при условии $t$ не содержит свободных $x$

**Опр** Терм — нейтральный, если он имеет вид:  $\langle U, V \rangle$

$x:\sigma$ / $U(V)$, где $U$ — нейтральный, $V$ — long-$\beta\eta$ норм. формы

/ $\pi_i(U)$, где $U$ — нейтральный.

$U \overset{\beta\eta}{=} !\beta\eta(U)$

**Опр** Терм — long-$\beta\eta$ нормальной формы, если он имеет вид:

$U:\alpha$, где $U$ — нейтральный, $\alpha \in B$ / $*$ /

$\lambda x:\sigma.\, U$, где $U$ — long-$\beta\eta$ норм. формы /

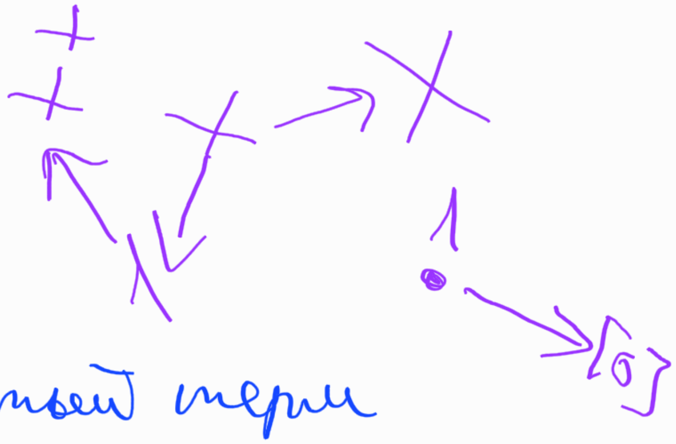
$\langle U, V \rangle$, где $U, V$ — long-$\beta\eta$ норм. формы /

---

$C$ — декартово замкнутая категория

**Опр** Интерпретация вычислений в $C$ — это функция

$$[\cdot] : X \to Ob(C).$$



**Опр** $M:\sigma$ — замкнутый терм $\Rightarrow [M] \in C(1, [\sigma])$ — морфизм в $C$.

**Опр** $\Lambda_X \to C$ —   $[*]$   $*:1$

класс всех интерпретаций вычислений в $C$.

$1 \xrightarrow{[M]} [\sigma] \qquad M:\sigma$

Эквивалентность между интерпретациями и $CC$-функторами $F: F_X \longrightarrow C$:

$F_X$ – (свободная) декартово замкнутая категория,

$Ob(F_X) = X$, $Hom_{\sigma\to\tau}(F_X) =$

$= \{$термы замкн. long-$\beta\eta$ норм. формы типа $\sigma \to \tau\}$.

$$X \xrightarrow{\forall [\cdot]} Ob(C) \longrightarrow F_X \xrightarrow{\exists!\, F} C$$

т. ч. $F(\alpha) = [\alpha]$; $F$ – декартово замкнутый функтор, т.е. $CC$-функтор.

$\forall$ замкн. терма $M:\sigma$

$$[M] = F(\beta\eta(\lambda x:1.M)) \in C(1,[\sigma]);$$

$\forall$ замкн. терма $M:\sigma\to\tau$ long-$\beta\eta$ норм. ф.

$$[M] \in C(1,[\tau]^{[\sigma]}),\ F(M) \in C([\sigma],[\tau]).$$

<u>Опр</u> $C$ – <u>полная</u> (относительно $=_{\beta\eta}$) категория, если $\forall$ замкн. термов $M:\sigma$, $N:\sigma$

$M =_{\beta\eta} N \overset{\Leftarrow}{\underset{\Rightarrow}{\Leftrightarrow}} \left(\forall [\cdot] : \Lambda_x \to C \Rightarrow [M] = [N]\right).$

Опр Класс функторов между кат. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назыв. точным, если $\forall A, B \in Ob(\mathcal{A}),\ f, g \in Hom(A, B)$

$\forall F \quad F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$ ! $A \to B$, $\Rightarrow F$ ✓

Зам $C$ – полная $\Leftrightarrow$ класс $CC$-функторов $\{F_x \to C\}$ – точный.

$$\left\{\begin{array}{c} X \xrightarrow{[\cdot]} Ob(C) \\ [M] = [N] \\ \Downarrow \\ M =_{\beta\eta} N \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} F_x \xrightarrow{F} C \\ F(M) = F(N) \\ \Downarrow \\ M = N \end{array}\right\}$$

Опр Интерпретация $[\cdot] : \Lambda_x \to C$ – полная (относит. $=_{\beta\eta}$), если $\forall$ замкн. термов $M : \sigma$, $N : \sigma$

$M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow [M] = [N].$

**Опр** Категория $C$ имеет полную интерпретацию, если $\exists$ полная $[\cdot] : \Lambda_\times \to C$.

**Утв** Интерпретация $[\cdot]$ — полная $\Leftrightarrow$ соотв. функтор $F([\cdot]) : F_\times \to C$ — точный.

$C$ имеет полную интерпретацию $\Leftrightarrow$ $\exists$ полный CC-функтор $F : F_\times \to C$.

$C$ - имеет полную интерпретацию $\Rightarrow$ $C$ - полная.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists [\cdot] : \Lambda_\times \to C \\ \text{т. ч.} \left( \begin{array}{c} [M] = [N] \\ \Updownarrow \\ M =_{\beta\eta} N \end{array} \right) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \forall [\cdot] : \Lambda_\times \to C \\ [M] = [N] \end{array} \right) \\ \Downarrow \\ M =_{\beta\eta} N \end{array} \right\}$$

**Пример** Категория предпорядка — не полна.

$A$ – мн-во, $\leq \subset A \times A$ – предпорядок, если

1) $\forall a \in A \quad a \leq a$ ✓
2) $\forall a, b, c \in A \quad a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$. ✓

$Ob(Preorder) = A$ ✓

$Hom(Preorder) = \{ a \leq b \mid a, b \in A \}$. ✓

$C$ – категория предпорядка $\Longleftrightarrow |Hom(a,b)| \leq 1 \ \forall a, b$.

$(a,b) \in \leq$: $\quad a \longrightarrow b$

$(a,b) \notin \leq$: $\quad a \qquad b$

$\forall [\cdot] : \Lambda_\times \longrightarrow Preorder \quad [M] = [N]$,

но $M : \sigma \neq_{\beta\eta} N : \sigma$.

$i \longrightarrow [\sigma]$

<u>Теорема 1</u> $C$ – полна $\Longleftrightarrow$ ($\Leftarrow$ ?)

$C$ не является декарт-замкнутой категорией предпорядка.

$C$ – полна $\Longleftrightarrow \exists\ Hom(C)$ т.ч. $|Hom(C)| \geq 2$.

Теорема 1 $\Rightarrow$ Set, FinSet — полные.

Ob = мн-ва, Hom = функции.

**Опр** Эндоморфизм $a \in Hom(A, A)$ — неповторяющийся, если

$$a^n = a^k \Rightarrow n = k, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 2** $C$ имеет полную интерпретацию $\Leftrightarrow$ в $C$ есть неповторяющийся эндоморфизм.

Теорема 1, Теорема 2 $\rightarrow$

$\rightarrow$ полнота не зависит от набора типов $X$.

**Д-во теоремы 2**

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $[\cdot] : \Lambda_x \rightarrow C$ — полная интерпретация.

Тогда эндоморфизм $\quad x : T \quad x^T$

$$[(0\to0)\to(0\to0)] \xrightarrow{[\lambda x^{(0\to0)\to0\to0}.\lambda y^{0\to0}.\lambda z^0(x(y)(y(z)))]} [(0\to0)\to0\to0]$$

— неповторяющийся.

$\Rightarrow$ В

$$\left( [(0\to0)\to0\to0] \xrightarrow{[\lambda x^{(0\to0)\to0\to0}.\lambda y^{0\to0}.\lambda z^0 (x(y)(y(z)))]} [(0\to0)\to0\to0] \right)^n \circ \underbrace{1 \xrightarrow{[\lambda y^{0\to0}.\lambda z^0.z]} [(0\to0)\to0\to0]}$$

$$= 1 \xrightarrow{[\lambda y^{0\to0}.\lambda z^0.y^n(z)]} [(0\to0)\to0\to0]$$

$y(y(y\ldots(y(z))$

— неповторяющийся, т.к. $[\cdot]$ — полная.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дан неповторяющийся эндоморфизм.

Построим точный CC-функтор $F_X \to C$.

① Существует точный функтор $F_X \to F_{\{0\}}$.

② $\Lambda_{\vec{X}}$ — набор замкнутых термов таких, у которых все подтермы построены из $X$ только с помощью „$\to$".

(Стетман, 1982) $\forall M:\sigma, N:\sigma \in \Lambda_{\vec{\{0\}}}, \forall \tau$

$M =_{\beta\eta} N \Longleftrightarrow \forall L:\sigma\to\tau$

$L(M) =_{\beta\eta} L(N)$.

③ $\forall M:\sigma, N:\sigma \in \Lambda_{\{0\}}, \forall \tau$

$M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow \forall L:\sigma\to\tau$

$L(M) =_{\beta\eta} L(N)$.

$\ldots =_{\beta\eta} \ldots$

④ Интерпретация $[\cdot] : \Lambda\{o\} \to \mathcal{C}$ — полная

$\Longleftrightarrow$

$\forall$ замкн. термов $M : T,\ N : T$

$$[M] = [N] \Rightarrow M =_{\beta\eta} N.$$

⑤ $B$ — очень слабый объект натуральных чисел, $B \in Ob$,

если $\exists\ \overline{0} \in Hom(1, B)$, $s \in Hom(B, B)$,

$+, \times \in Hom(B \times B, B)$

$$1 \xrightarrow{\overline{0}} B \xrightarrow{s} B \underset{\times}{\overset{+}{\leftleftarrows}} B \times B \quad \text{т.ч.}$$

$\forall\ m, n \in \mathbb{N}$

√ $\overline{m+n} = + \circ \langle \overline{m}, \overline{n} \rangle$, $\overline{m \times n} = \times \circ \langle \overline{m}, \overline{n} \rangle$,

где $\overline{n} = s^n \circ \overline{0}$.

$2 \to 3$

$\downarrow$

$4$

$\downarrow$

$5$

Кроме этого, $B$ — точное, если

$$\overline{m} = \overline{n} \Rightarrow m = n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Интерпретация $[\cdot] : \Lambda\{o\} \to \mathcal{C}$ — полная,

если $[o]$ — точный очень слабый объект натуральных чисел.

$A \xrightarrow{a} A$ — неповторяющийся эндоморфизм.

$B := (A^A)^{(A^A)}$

$\overline{0} := 1 \xrightarrow{\lambda f^{A^A}.\lambda a^A.a} B$

$S = B \xrightarrow{b \mapsto \lambda f^{A^A}.\lambda a^A.b(f)(f(a))} B$

$+ = B \times B \xrightarrow{\langle b, b' \rangle \mapsto \lambda f^{A^A}.\lambda a^A.b(f)(b'(f)(a))} B$

$\times = B \times B \xrightarrow{\langle b, b' \rangle \mapsto \lambda f^{A^A}\lambda a^A.b(b'(f))(a)} B$

Так, $B$ — очень слабое натуральное число.

$\overline{n} \rightsquigarrow A^A \xrightarrow{\overline{n}} A^A$; $1 \xrightarrow{\overline{a}} A^A \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{n} \circ \overline{a} = A \xrightarrow{a^n} A \Rightarrow B$ — точное.

a — неповт.

(5): $[\circ] := B \Rightarrow$

$[\circ] : \Lambda_{\{0\}} \to C$ — полная. $[\cdot] \rightsquigarrow F$

(1): $F : F_\times \to F_{\{0\}}$ — точный

(5) : (1) : F ... F ... F([·])

(5)+(1). $F_X \to F_{306} \to C$ — точный. $\blacksquare$

---

Д-во теоремы 1

жан

$C$ — не предпорядок.

Найдём точный CC-функтор $F: F_X \to C^\omega$

Тогда

CCC-категория

$\{\Pi_i \circ F \mid i \in \omega\}$ — точный набор CC-функторов $F_X \to C$, $\Pi_i$ — проекция $C^\omega \to C$

$\Rightarrow C$ — полная.

Найти $F \Leftarrow\Rightarrow$ найти неповторяющиеся эндоморфизм в $C^\omega$.

$C$ — не предпорядок $\Rightarrow \exists f, g \in Hom_C(A,B)$.

$B_n := B^{(B^n)}$, $n \in \mathbb{N}$. $i \in \{0, \dots, n-1\}$;

$i_n = 1 \xrightarrow{\lambda c^{B^n} \cdot \Pi_i(c)} B_n$ $\lambda c^{B^n} \cdot \Pi_i(c)^{\underbrace{B \times \dots \times B}_{n}}$

$$S_n = B_n \xrightarrow{d \mapsto \lambda c^B . d(\langle \Pi_2(c), \ldots, \Pi_n(c), \Pi_1(c)\rangle)} B_n$$

$S_n \circ \overline{i_n} = \overline{j_n}$, $j = i+1 \mod n$.

$\overline{0_n}, \ldots, \overline{(n-1)_n}$ — различны.

$(B_1, B_2, \ldots) \xrightarrow{(s_1, s_2, \ldots)} (B_1, B_2, \ldots)$ —

неповторяющийся эндоморфизм.

∎