Бескванторная линейная вероятностная логика (в измеримом случае)

Александр Грефенштейн

15 апреля 2022

Синтаксис

Зафиксируем счётное множество пропозициональных переменных (элементарных событий)

$$\Phi = \{p_1, p_2, \dots\}$$

Для построения формул мы будем использовать логические символы пропозициональной классической логики.

Тогда пропозициональные формулы (элементарные события) это элементы замыкания Φ относительно наших логических символов.

Также для удобства обозначим

$$\mathit{true} = p_1 \vee \neg p_1, \qquad \mathit{false} = \neg \mathit{true}.$$

Синтаксис

Сигнатура, с которой мы будем работать:

$$\sigma \;=\; \left\{w^1, +^2; \geqslant^2\right\}.$$

Назовём выражение вида $w(\varphi)$, где φ — пропозициональная формула, атомарным термом с весом. Тогда выражение вида

$$a_1\, w(\varphi_1) + \ldots + a_n\, w(\varphi_n),$$

где $a_i \in \mathrm{Z}$, будем называть термом с весом (или просто термом).

Наконец, элементарная формула с весом — это выражение вида $t \geqslant c$, где t — терм, а $c \in \mathrm{Z}$. А формулой с весом будем называть булеву комбинацию элементарных формул с весом.

Семантика

Вероятностной структурой будем называть кортеж

$$M = \langle \Omega, \mathcal{A}, \mu, \pi \rangle,$$

где $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — вероятностное пространство, $\pi : \Omega \times \Phi \to \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$. Обозначим также

$$p^M = \{\omega \in \Omega \mid \pi(\omega)(p) = \mathit{true}\}.$$

Естественный образом это обозначение расширяется на случай произвольной пропозициональной формулы φ^M. Говорим, что вероятностная структура M измерима, если и только если все p^M измеримы.

В рамках данного доклада будем считать, что любая вероятностная структура является измеримой.

Семантика

Пусть $M = \langle \Omega, \mathcal{A}, \mu, \pi \rangle$ — вероятностная структура (модель). Определим отношение истинности элементарной формулы с весом в модели:

$$M \Vdash a_1\, w(\varphi_1) + \ldots + a_n\, w(\varphi_n) \geqslant c \iff a_1\, \mu(\varphi_1^M) + \ldots + a_n\, \mu(\varphi_n^M) \geqslant c.$$

Для произвольных формул с весом:

$$\begin{aligned} M \Vdash \neg f \quad &\iff \quad M \nVdash f; \\ M \Vdash f \wedge g \quad &\iff \quad M \Vdash f \ \text{ и } \ M \Vdash g. \end{aligned}$$

Логика $\mathsf{AX}_{\mathsf{MEAS}}$

Обозначим за $\mathsf{AX}_{\mathsf{MEAS}}$ систему рассуждения о вероятностях, состоящую из следующего списка схем аксиом и правил вывода:

Taut. тавтологии CL, в которые подставили всевозможные наборы формул с весом;

Ineq. все общезначимые формулы логики линейных неравенств, в которые подставили произвольные атомарные термы с весом;

W1. $w(\varphi) \geqslant 0$;

W2. $w(true) = 1$;

W3. $w(\varphi \wedge \psi) + w(\varphi \wedge \neg\psi) = w(\varphi)$;

W4. $w(\varphi) = w(\psi)$, если $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathsf{CL}$.

Правило всего одно:

$$\frac{f \qquad f \to g}{g}\ (\mathtt{MP})\,.$$

Пример вывода

Лемма

$$(w\,(false) = 0) \in \mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}.$$

Доказательство

1. $w\,(true \wedge true) + w\,(true \wedge false) = w\,(true) \qquad (W3);$
2. $w\,(true \wedge true) = w\,(true) \qquad (W4);$
3. $w\,(true \wedge false) = w\,(false) \qquad (W4);$
4. $(w\,(true \wedge true) + w\,(true \wedge false) = w\,(true)\ \wedge$
   $(true \wedge true) = w\,(true)\ \wedge\ w\,(true \wedge false) = w\,(false))\ \rightarrow$
   $(w\,(false) = 0) \qquad (Ineq);$
5. $w\,(false) = 0 \qquad (1, 2, 3, 4, \mathtt{MP}).$

Полнота AX_{MEAS}

Теорема

AX_{MEAS} полна (слабо) относительно семантики вероятностных структур.

Доказательство

Поскольку в нашей логике есть закон исключенного третьего, полнота эквивалентна следующему утверждению:

любая непротиворечивая формула f выполнима.

Предположим, что формула с весом f непротиворечива. Мы будем строить вероятностную структуру M, в которой истинна f, путем сведения выполнимости f к выполнимости множества линейных неравенств, и затем применим *Ineq*.

Полнота $\mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$

Итак, сначала приведём f к Д.Н.Ф.:

$$f \leftrightarrow g_1 \vee \ldots \vee g_n \in \mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}.$$

Так как f непротиворечива, то непротиворечив какой-то клоз g_i. И, конечно же, любая вероятностная структура M, выполняющая g_i, выполняет и f тоже. Из этих соображений следует, что достаточно рассмотреть случай f равной конъюнкции элементарных формул с весом и их отрицаний.

Назовём *n-атомом* формулу вида

$$\varphi \;=\; p'_1 \wedge \ldots \wedge p'_n,$$

где p'_i это либо p, либо $\neg p$.

Полнота AX_{MEAS}

Лемма

Пусть φ — пропозициональная формула. Предположим, что множество $\{p_1, \ldots, p_n\}$ содержит все пропозициональные переменные формулы φ. Пусть $At_n(\varphi)$ — множество всех n-атомов δ таких, что $\delta \to \varphi \in CL$. Тогда

$$w(\varphi) = \sum_{\delta \in At_n(\varphi)} w(\delta) \in AX_{MEAS}.$$

Доказательство леммы

Сначала докажем индукцией по j, что если $\psi_1, \ldots, \psi_{2^j}$ всевозможные j-атомы, то

$$w(\varphi) = w(\varphi \wedge \psi_1) + \ldots + w(\varphi \wedge \psi_{2^j}) \in AX_{MEAS}.$$

Полнота $\mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$

База следует из W3. Предположим, что мы доказали, что

$$w(\varphi) = w(\varphi \wedge \psi_1) + \ldots + w(\varphi \wedge \psi_{2^j}) \in \mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}. \qquad (*)$$

Снова по W3 мы имеем

$$w(\varphi \wedge \psi_i \wedge p_{j+1}) + w(\varphi \wedge \psi_i \wedge \neg p_{j+1}) = w(\varphi \wedge \psi_i) \in \mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}.$$

По *Ineq* и аксиомам CL мы можем заменить всякое вхождение $w(\varphi \wedge \psi_i)$ в $(*)$ на

$$w(\varphi \wedge \psi_i \wedge p_{j+1}) + w(\varphi \wedge \psi_i \wedge \neg p_{j+1}).$$

Это доказывает шаг индукции. В частности, мы имеем

$$w(\varphi) = w(\varphi \wedge \delta_1) + \ldots + w(\varphi \wedge \delta_{2^n}) \in \mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}. \qquad (**)$$

Полнота $\mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$

Так как множество $\{p_1, \ldots, p_n\}$ содержит все пропозициональные переменные формулы φ, очевидно, что

1. если $\delta_r \in At_n(\varphi)$, то $\varphi \wedge \delta_r \leftrightarrow \delta_r \in \mathrm{CL}$. Значит, по W4 $w(\varphi \wedge \delta_r) = w(\delta_r) \in \mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$;
2. если $\delta_r \notin At_n(\varphi)$, то $\varphi \wedge \delta_r \leftrightarrow \mathit{false} \in \mathrm{CL}$. Значит, по W4 $w(\varphi \wedge \delta_r) = w(\mathit{false}) \in \mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$.

Теперь, заменяя по *Ineq* и аксиомам CL $w(\varphi \wedge \delta_r)$ на $w(\delta_r)$ или $w(\mathit{false})$ в $(**)$ и вспоминая, что $w(\mathit{false}) = 0$, получаем требуемое.

Полнота AX_{MEAS}

Продолжение доказательства теоремы

Пользуясь леммой выше, мы заменим все тремы из f на термы вида

$$a_1\, w(\delta_1) + \ldots + a_{2^n}\, w(\delta_{2^n}),$$

получив вероятностно эквивалентную f формулу f'.

Далее, к f' припишем через конъюнкцию следующие элементарные формулы с весом:

1. $w(\delta_j) \geqslant 0$, для всех $1 \leqslant j \leqslant 2^n$;
2. $w(\delta_1) + \ldots + w(\delta_{2^n}) \geqslant 1$;
3. $-w(\delta_1) - \ldots - w(\delta_{2^n}) \geqslant -1$.

Получим формулу с весом f'' вероятностно эквивалентную f'.

Покажем выполнимость формулы f''.

Полнота $\mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$

Итак, f'' — это конъюнкция следующих $2^n + r + s + 2$ формул:

$$\begin{aligned}
w(\delta_1) + \ldots + w(\delta_{2^n}) &\geqslant 1 \\
-w(\delta_1) - \ldots - w(\delta_{2^n}) &\geqslant -1 \\
w(\delta_1) &\geqslant 0 \\
&\ldots \\
w(\delta_{2^n}) &\geqslant 0 \\
a_{1,1}\, w(\delta_1) + \ldots + a_{1,2^n}\, w(\delta_{2^n}) &\geqslant c_1 \\
&\ldots \\
a_{r,1}\, w(\delta_1) + \ldots + a_{r,2^n}\, w(\delta_{2^n}) &\geqslant c_r \\
-a'_{1,1}\, w(\delta_1) - \ldots - a'_{1,2^n}\, w(\delta_{2^n}) &> -c'_1 \\
&\ldots \\
-a'_{s,1}\, w(\delta_1) - \ldots - a'_{s,2^n}\, w(\delta_{2^n}) &> -c'_s.
\end{aligned}$$

Полнота AX_{MEAS}

Предположим, что f'' невыполнима. Тогда система неравенств выше невыполнима. А это значит, что $\neg f''$ — это вариант аксиомы *Ineq*. Но тогда $\neg f$ выводима. Противоречие.

В общем случае, когда φ^M не обязательно являются измеримыми множествами, тоже удалось получить аксиоматизацию и адаптировать семантику таким образом, чтобы была полнота.

Сильной полноты относительно данной семантики нет.

Если не допускать линейные комбинации, аксиоматика не предъявлена (если верить статье).

Теорема о малой модели для AX_{MEAS}

Далее нам понадобится одно полезное утверждение из линейного программирования.

Лемма

Если у системы r линейных уравнений и (или) неравенств есть неотрицательное решение, то существует неотрицательное решение с не более чем r положительными переменными.

Под длиной $|f|$ формулы с весом f будем понимать количество символов, необходимых для написания f.

Теорема

Пусть f — формула с весом. Предположим, что f выполнима в некоторой вероятностной структуре. Тогда f выполнима в вероятностной структуре $M = \langle \Omega, \mathcal{A}, \mu, \pi \rangle$ с не более чем $|f|$ состояниями. Более того, любое множество состояний M измеримо.

Теорема о малой модели для $\mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$

Доказательство теоремы

Снова приведём f к Д.Н.Ф. Легко видеть, что каждый клоз при этом — это конъюнкция не более чем $|f|-1$ элементарных формул с весом или их отрицаний. Поскольку f выполнима, то выполним некоторый клоз g.

Предположим, что g — это конъюнкция r элементарных формул с весом и s их отрицаний. Значит, выполнимость g влечёт выполнимость следующей системы уравнений и неравенств:

Теорема о малой модели для $\mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$

$$
\begin{aligned}
x_1 + \ldots + x_{2^n} &= 1\\
a_{1,1}\,x_1 + \ldots + a_{1,2^n}\,x_{2^n} &\geqslant c_1\\
&\ldots\\
a_{r,1}\,x_1 + \ldots + a_{r,2^n}\,x_{2^n} &\geqslant c_r\\
-a'_{1,1}\,x_1 - \ldots - a'_{1,2^n}\,x_{2^n} &> -c'_1\\
&\ldots\\
-a'_{s,1}\,x_1 - \ldots - a'_{s,2^n}\,x_{2^n} &> -c'_s.
\end{aligned}
$$

По последней лемме, у этой системы есть неотрицательное решение x^* с не более чем $r+s+1$ положительными переменными ${x_{i_1}}^*, \ldots, {x_{i_t}}^*$. Используем это решение, чтобы построить необходимую модель.

Теорема о малой модели для $\mathrm{AX}_{\mathrm{MEAS}}$

Пусть $M = \langle \Omega, \mathcal{A}, \mu, \pi \rangle$, где Ω имеет столько же состояний, сколько в решении положительных переменных, пусть это $\omega_1, \ldots, \omega_t$, где $t \leqslant r + s + 1$; $\mathcal{A}$ состоит из всех подмножеств Ω. Истинностную функцию π зададим следующим образом:

1. $\pi(\omega_j)(\delta_{i_j}) = \mathit{true}$ для любых $1 \leqslant j \leqslant t$;
2. $\pi(\omega_j)(p) = \mathit{false}$ для любых p не являющихся переменными f и для любых j.

На состояниях определим меру как $\mu(\{\omega_j\}) = x^*_{i_j}$ и далее расспространим по аддитивности.

Теперь уже легко понять, что $M \models g$, а значит и $M \models f$. Причём, поскольку $r + s \leqslant |f| - 1$, мы получаем, что $t \leqslant r + s + 1 \leqslant |f| - 1 + 1 = |f|$. То есть событий в нашей вероятностной структуре не более, чем $|f|$. Что и требовалось.

Проблема выполнимости

Для произвольной формулы с весом f обозначим через $||f||$ наибольшую длину коэффициента, входящего в f, записанного в двоичной системе счисления. При этом под длиной рационального числа $\frac{a}{b}$ будем понимать сумму длин чисел a и b записанных бинарно.

Лемма из линейного программирования, усиленная в частном случае

Если у системы r линейных уравнений и (или) неравенств с целыми коэффициентами длины не более чем l есть неотрицательное решение, то существует неотрицательное решение с не более чем r положительными переменными, в котором каждая переменная приняла рациональное значение длины $O\left(rl + r\log(r)\right)$.

Проблема выполнимости

На основе нашей усиленной леммы мы можем очевидным образом усилить и теорему о малой модели.

Теорема

Пусть f — формула с весом. Предположим, что f выполнима в некоторой вероятностной структуре. Тогда f выполнима в вероятностной структуре $M = \langle \Omega, \mathcal{A}, \mu, \pi \rangle$ с не более чем $|f|$ состояниями, где каждое подмножество Ω измеримо и вероятности, которые принимают состояния M, ограничиваются бинарной длиной $O\left(|f| * ||f|| + |f| \log(|f|)\right)$.

Проблема выполнимости

Заметим, что истинность формулы с весом f в вероятностной структуре не зависит от пропозициональных переменных, не входящих в f.

Лемма

Пусть f — формула с весом. Если вероятностные структуры M и M', заданные на одинаковом вероятностном пространстве таковы, что

$$\pi(s)(p) = \pi'(s)(p)$$

для любых состояния s и пропозициональной переменной p, входящей в f, то

$$M \Vdash f \iff M' \Vdash f.$$

Проблема выполнимости

Теперь мы можем установить основной результат:

Теорема

Проблема выполнимости формулы с весом в измеримых вероятностных структурах **NP**-полна.

Доказательство

NP-трудность получается путём сведения проблемы выполнимости булевой формулы к нашей, а именно:

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Longleftrightarrow \quad w(\varphi) > 0 \text{ выполнима.}$$

Докажем принадлежность **NP**. Пусть f — формула с весом.

Проблема выполнимости

Необходимо проверить два условия:

1. предикат $P(f, M)$, который проверяет, истинна ли формула f в вероятностной структуре M с конечным числом состояний и ограниченной рационально-значной мерой, принадлежит классу **P**;
2. формула f выполнима тогда и только тогда, когда существует вероятностная структура M ограниченного размера $O(Poly(|f|))$ (в некоторой кодировке) такая, что $P(f, M)$.

Второе условие — это как раз усиленная версия теоремы о малой модели.

Первое условие легко проверить.

Таким образом, проблема выполнимости формулы с весом принадлежит **NP**. Вкупе с **NP**-трудностью получаем, что наша проблема является **NP**-полной.