ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук

Шершнев Иван Евгеньевич

ПЕРЕБОРНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ГИПОТЕЗЫ О МНОЖЕСТВАХ, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЪЕДИНЕНИЯ

Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
по направлению подготовки *01.03.02 Прикладная математика и информатика*
образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

Рецензент
д-р физ.-мат. наук
А.В. Устинов

Руководитель
д-р физ.-мат. наук, проф.
И.В. Аржанцев

Санкт-Петербург 2022

Оглавление

Аннотация

Гипотеза Франкла утверждает, что для любого конечного множества $\mathcal{U}$ и для любого замкнутого относительно объединения семейства подмножеств множества $\mathcal{U}$ найдется элемент, который принадлежит не менее чем половине подмножеств семейства.

Гипотеза остается недоказанной с 1979 года, несмотря на большое количество работ по теме. Одним из подходов к доказательству гипотезы можно назвать проверку её справедливости для семейств подмножеств множества $\mathcal{U}$ в случае, когда размер $\mathcal{U}$ не превышает некоторого небольшого фиксированного числа m.

В настоящей работе исследуется подход, применяемый для проверки гипотезы в работе 2017 года за авторством Vuckovic B. и Zivkovic M.. В их публикации доказывается справедливость гипотезы для случая, когда $m \leq 12$. В настоящей работе повторно реализуется предложенный в работе 2017 года алгоритм с параллелизацией и некоторыми другими улучшениями, оценивается полезность этих улучшений. Алгоритм представляет собой оптимизированный перебор частей семейств.

В настоящей работе также описываются расхождения в результатах, полученных авторами публикации 2017 года, и результатами выполнения повторной реализации алгоритма, а также устанавливаются причины этих расхождений. Характер полученных расхождений позволяет утверждать, что повторная реализация находит не учтенные оригинальной реализацией части семейства, что могло бы поставить под сомнения вывод работы 2017 года. Между тем, расхождения не опровергают полученный результат о справедливости гипотезы, если предполагать ряд допущений об авторской реализации.

Ключевые слова: Семейства, замкнутые относительно объединения, гипотеза Франкла, переборные алгоритмы

Frankl's conjecture states that for any finite set $\mathcal{U}$ and any union-closed family of its subsets, there is an element of $\mathcal{U}$ that are in at least a half of the family members.

The conjecture has been unproven since 1979 despite having a huge amount of papers dedicated to it. One of the ways to prove the conjecture is testing its correctness for families of $\mathcal{U}$, when the size of $\mathcal{U}$ is limited by some small number m.

In this work I study the way to test the conjecture used in the 2017 work written by Vuckovic B. and Zivkovic M.. In their work it is proven that the conjecture is true when $m \leq 12$. In this work I once again implement algorithm suggested in the 2017 work. I add parallel execution and other improvements and estimate their impact. The algorithm is an optimized brute-force algorithm.

In this work I describe differencies between the results of 2017 work and the result of the current implementation and state the reasons for the differencies. The way two sets of results differ leads to conclusion that the current implementation finds previously not found families, which could potentially cast a shadow on the outcome of the 2017 work. Meanwhile, the differencies do not disprove the 2017 work's conclusion, if one could allow some assumptions about the 2017 work's algorithm implementation.

Keywords: Union-closed familes, Frankl's conjecture, brute-force algorithms

Введение

Сформулируем гипотезу о замкнутых относительно объединения семействах множеств, иначе называемую гипотезой Франкла.

Гипотеза 1 (Гипотеза Франкла)**.** *Пусть $\mathcal{U}$ — конечное множество и $\mathcal{A}$ — такое семейство подмножеств множества $\mathcal{U}$, что для любых подмножеств A и B из $\mathcal{A}$ их объединение $A \cup B$ также лежит в $\mathcal{A}$. Тогда во множестве $\mathcal{U}$ найдется элемент, который содержится не менее чем в половине подмножеств семейства $\mathcal{A}$.*

Впервые она была упомянута Питером Франклом в 1979 году, в честь которого и получила своё название. Несмотря на свою простейшую формулировку, гипотеза и по сей день остаётся широко открытой. И отнюдь не от недостатка интереса — по состоянию на 2013 год написано более 50 статей и создано несколько сайтов, целиком посвященных гипотезе.

На данный момент про гипотезу известно множество частичных результатов. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств $\mathcal{U}$, замкнутое относительно объединения. Ограничимся случаем, когда $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$, то есть, когда в $\mathcal{U}$ нет «лишних элементов». В таком случае будем называть $\mathcal{U}$ *универсумом.*

Пусть $n = |\mathcal{A}|$, $m = |\mathcal{U}|$. Тогда известно, что гипотеза выполняется для семейств с любыми из нижеперечисленных свойств:

- $n \leq 50$
- $m \leq 12$
- $n \geq \frac{2}{3}2^m$
- $n \leq 2m$ и $\forall a, b \in \mathcal{U} : \exists A \in \mathcal{A} : (a \in A \iff b \notin A)$
- $\mathcal{A}$ содержит одноэлементное или двухэлементное множество

Наличие большое числа различных результатов, вызвано тем, что гипотеза имеет ряд очень неочевидных и плодотворных эквивалентных переформулировок.

Одна из наиболее простых эквивалентных формулировок звучит так.

Гипотеза 2 (Гипотеза Франкла в терминах семейств, замкнутых относительно пересечения)**.** *Пусть* $\mathcal{U}$ *— конечное множество.* $|\mathcal{U}| \geq 2$. $\mathcal{A}$ *— такое семейство подмножеств* $\mathcal{U}$*, что* $\forall A, B \in \mathcal{A} : (A \cap B) \in \mathcal{A}$*. Тогда во множестве* $\mathcal{U}$ *найдется элемент, который содержится не более чем в половине множеств семейства* $\mathcal{A}$*.*

У гипотезы есть эквивалентная переформулировка в терминах теории решеток.

Частично-упорядоченное множество $(L, \leq)$ называется *решеткой*, если для любых двух элементов найдутся точная верхняя грань и точная нижняя грань.

Для любых $a, b \in L$, обозначим $a \vee b$ точную верхнюю грань (*джойн*). Назовем *джойн-неприводимым* такой элемент a, что если $a = b \vee c$, то $a = b$ или $a = c$.

Гипотеза 3 (Гипотеза Франкла в терминах решеток)**.** *Пусть* L *— конечная решетка хотя бы из двух элементов. Тогда в ней найдется такой джойн-неприводимый элемент* a*, что* $|\{x \in L : x \geq a\}| \leq \frac{1}{2}|L|$*.*

Также, у гипотезы есть переформулировка и в терминах теории графов.

Независимым множеством в графе называется такое подмножество вершин, что никакая пара элементов не соединена ребрами. *Максимальным* независимым множеством называется множество максимальное по включению среди всех независимых множеств.

Гипотеза 4 (Гипотеза Франкла в терминах графов)**.** *Любой двудольный граф хотя бы с одним ребром содержит в каждой из своих долей вершину, лежащую не более чем в половине максимальных независимых множеств.*

Есть еще одна переформулировка. На этот раз в терминах весовой функции.

Гипотеза 5 (Гипотеза Франкла в терминах весовой функции)**.** *Для любого непустого семейства подмножеств* $\mathcal{A}$*, замкнутого относительно объединения. Существует такая ненулевая функция* $w : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*, что верно следующее неравенство*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} w(A) \geq \frac{1}{2} w(\mathcal{U})|A|,$$

где $w(A) = \sum\limits_{a \in A} w(a)$*.*

Доказано, что все вышеперечисленные гипотезы эквивалентны. То есть, если верна одна из них, то верны и все остальные. Более того, для некоторых гипотез верно, что если они справедливы в некотором частном случае, то другие гипотезы тоже могут быть верны для этого случая. Например, справедливость гипотезы 5 при $|\mathcal{U}| \leq m$ влечет справедливость гипотезы 1 при $|\mathcal{U}| \leq m$ для некоторого m.

Упомянутый выше результат о том, что для любого семейства множеств, замкнутого относительно объединения, при $|\mathcal{U}| \leq 12$ выполняется гипотеза 1, был достигнут с помощью гипотезы 5 в работе 2017 года Vuckovic и Zivkovic [17].

Примененный авторами подход в работе [17] можно высокоуровнево описать следующим образом. Определим для $\mathcal{G}$, семейства подмножеств универсума, *вес* $w(\mathcal{G}) = \sum\limits_{A \in \mathcal{G}} w(A)$. Рассмотрим семейства с малыми весом. Если верно, что для этих семейств гипотеза выполняется, то для остальных семейств с тем же универсумом гипотеза тоже будет выполняться. Для поиска семейств с малым весом авторы разработали оптимизированный алгоритм перебора, позволяющий за разумное время получить необходимые данные, из которых можно сделать вывод о справедливости гипотезы.

Постановка задачи

В настоящей работе будет исследован алгоритм поиска семейств с минимальным весом, предложенный авторами работы [17], посвященной доказательству гипотезы Франкла в оригинальной формулировке для семейств с универсумом размера не больше 12.

Вместе с этим исследованный алгоритм будет реализован на языке программирования Scala с использованием библиотеки для асинхронного, параллельного программирования в функциональном стиле ZIO, с применением параллелизации вычислений и иными улучшениями, а также проанализирована польза этих улучшений.

Будут изучены результаты работы алгоритма, описаны расхождения с результатами из оригинальной публикации и установлена причина этих расхождений.

Цель и задачи

Целью данной работы является валидация результата о выполнении гипотезы Франкла при размере универсума не более 12 и изучение возможностей ускорения предложенного авторами публикации алгоритма.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- Изучить предложенные авторами работы 2017 года теоретическое доказательство и высокоуровневое описание алгоритма.
- Повторно реализовать алгоритм из работы 2017 года на высокоуровневом языке программирования с добавлением параллелизации вычислений и иных улучшений.
- Проанализировать пользу предложенных в настоящей работе улучшений.
- Описать расхождения полученных результатов с результатами из оригинальной публикации и установить причину такого расхождения.

Структура работы

В первой главе приводится обзор достигнутых результатов при изучении гипотезы — о её выполнимости в разных частных случаях, в разных формулировках.

Во второй главе внимание уделяется работе 2017 года о выполнимости гипотезы Франкла при размере универсума семейства не превышающем 12, рассматривается основная идея, вводятся понятия и проводится подготовка к изложению используемого в работе алгоритма перебора и его реализации.

В третьей главе высокоуровнево описывается алгоритм перебора и основная идея оптимизаций, отличающих его от полного перебора.

В четвертой главе описываются предлагаемые улучшения реализации и их проблемы.

В пятой главе описываются расхождения полученных результатов с результатами фактической реализации авторов оригинальной публикации, приводится причина такого расхождения.

В заключении оцениваются полученные результаты и приводятся возможные направления дальнейшей работы.

1. Обзор литературы

Решетки

Гипотеза Франкла в терминах решеток была упомянута в работе Rival в 1985 году [13]. Утверждалось, что она справедлива для случая дистрибутивных и геометрических решеток, но доказательство приведено не было. В работе Reinhold в 2000 году было доказано, что гипотеза Франкла в ее формулировке для решеток справедлива для нижних полумодулярных решеток — класса, который включает в себя дистрибутивные. Доказательство для случая геометрических решеток было приведено Poonen в работе 1992 года [12].

Для семейств подмножеств, замкнутых относительно объединения, известно, что при достаточно большом числе подмножеств, гипотеза 1 выполняется. Похожий результат доказали Czedli и Schmidt в работе 2008 года [6]. Известно, что максимальный размер решетки 2^m, где m — число джойн-неприводимых элементов. Тогда для достаточно большой решетки L ($|L| \geq \frac{5}{8}2^m$) гипотеза Франкла тоже справедлива.

Используя решетки, справедливость гипотезы для достаточно больших семейств получает Czedli в работе 2009 года [5]: гипотеза справедлива если $|A| \geq 2^m - 2^{m/2}$ при размере универсума $m \geq 3$. Финальный результат с наименьшей границей достигают Balla, Ballobas и Eccles в 2013 году [1]: справедливость при $|A| \geq \frac{2}{3}2^m$.

Графы

Хордальный двудольный граф — это двудольный граф, в котором нет простых циклов длины 6 и больше, не содержащих ребер между несоседними вершинами. Bruhn, Charbit и Schaudt в работе 2015 года [3] доказывают, что гипотеза Франкла в графовой формулировке справедлива для любого хордального двудольного графа. В той же работе доказывается справедливост гипотезы Франкла для графов, в которых степень вершин не превосходит 3.

Случайный двудольный граф — это такой подграф полного двудольного графа, что каждое ребро входит в него с вероятность p независимо от других. Для $\partial > 0$, двудольный граф считается удовлетворяющим гипотезе Франкла с точностью до ∂, если в каждой из его долей найдется такая вершина, что доля максимальных независимых множеств, в которых она лежит, не превосходит $\frac{1}{2} + \partial$.

Известно, что *почти все* случайные двудольные графы удовлетворяют вероятностной ∂-формулировке гипотезы Франкла для графов. То есть, вероятность для случайного двудольного графа не удовлетворять гипотезе Франкла с точностью до ∂ стремится к нулю при росте размера графа [4].

Строение семейства

Также известно много частичных результатов, опирающихся на размер семейства или его универсума. Обозначив за n размер семейства, а за m размер универсума. Приведем здесь работы, в которых доказывается справедливость гипотезы при ограниченных n, m.

1. При $n \leq 11$. Sarvate и Renaud в работе 1989 года [15]
2. При $n \leq 19$. Sarvate и Renaud в работе 1990 года [16]
3. При $m \leq 7, n \leq 28$. Poonen в работе 1992 года [12]
4. При $m \leq 9, n \leq 39$. Lo Faro в работе 1994 года [7]
5. При $m \leq 9, n \leq 39$. Moriss в работе 2006 года [11] (повторно)
6. При $n \leq 40$. Roberts в работе 1992 года [14]
7. При $m \leq 10$. Markovic в работе 2007 года [10]
8. При $m \leq 11$. Bosnjak и Markovic в работе 2008 года [2]
9. При $m \leq 12$. Vuckovic и Zivkovic в работе 2017 года [17]

Результаты 1 и 2 были получены простым анализом случаев. Poonen [12] сформулировал концепцию *полных по Франклу семейств*, то есть таких семейств, все надсемейства которых удовлетворяют гипотезе Франкла. И это оказалось очень плодотворным, потому что остальные результаты уже были получены, опираясь на эту концепцию. А последний, кроме того, был получен с помощью компьютера.

В течение жизни гипотезы было найдено много полных по Франклу семейств. Простейшие из них это два семейства: из одного одноэлементного множества и одного двухэлементного [15]. Много других было найдено в препринте 2019 года [8], в котором перечисляются все полные по Франклу семейства для $|\mathcal{U}| = 6$.

Выводы

Гипотеза активно изучается. Множество частичных результатов достигнуто для самых разных формулировок гипотезы. Так как это одна и так же гипотеза, просто изложенная разным языком и в терминах разных областей математики, частичные результаты для одной формулировки часто вытекают из результатов для другой.

Несмотря на элементарнейшую формулировку и большое количество попыток подойти к доказательству гипотезы, она и по сей день остается недоказанной. Интересным кажется подход к доказательству, опирающийся на ограничение размера универсума конечным фиксированным числом. Перспективным кажется рассмотрение недавнего по меркам возраста гипотезы доказательства с использованием компьютера — доказательства того, что гипотеза выполняется для семейств с универсумом не больше чем из 12 элементов.

2. Идея доказательства

В этой главе мы рассмотрим идею доказательства гипотезы в случае универсума не больше чем из 12 элементов, изложенного в [17].

2.1. Некоторые обозначения

$\binom{A}{n}$ — семейство всех n-элементных подмножеств множества A.
$[n]$ — множество целых чисел от 1 до n.
$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ — семейства получаются одно из другого переименованием элементов универсума.
$Q(\mathcal{A})$ — утверждение Q верно для $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A} \uplus \mathcal{B} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

2.2. Последний шаг доказательства

Для понимания происходящего, лучше сразу рассмотреть последний шаг доказательства.

Будем называть семейство *франкловым*, если для него выполняется гипотеза Франкла, а также *полным по Франклу для 12 элементов* (сокращенно *12-ПФ*), если любое надсемейство с универсумом размера 12 франклово.

Пусть все 5 двухэлементных семейств $\{\emptyset, [i]\}$ для $1 \leq i \leq 5$ являются 12-ПФ. Тогда любое семейство, не содержащее этих 12-ПФ семейств, и имеющее универсум размера ровно 12, содержит только множества размера не меньше 6 и пустое множество.

Рассмотрим гипотезу 5.

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} w(A) \geq \frac{1}{2} w(\mathcal{U})|A|$$

Возьмем $w \equiv 1$, тогда левая часть неравенства из гипотезы равна $w(\emptyset) + w(\mathcal{U}) + g$, где g — сумма весов остальных множеств семейства. Заметим, что вес каждого из оставшихся множеств не меньше 6. Тогда левая часть не меньше $0 + 12 + 6 \cdot (|\mathcal{A}| - 2)$, что не меньше $\frac{12}{2}|\mathcal{A}|$ — правой части неравенства из гипотезы. Таким образом, $\mathcal{A}$ франклово.

Если существует контрпример к гипотезе Франкла с $\mathcal{U} < 12$, то его легко изменить, добавив в каждое множество элементов, чтобы, во-первых, он оставался контрпримером, а во-вторых, имел универсумом множество ровно из 12 элементов. То есть, гипотеза верна для всех семейств с универсумом из 12 элементов или меньше.

2.3. Подготовка

В работе [17] используется гипотеза 5 в качестве стартовой точки. Далее формулировка упрощается, чтобы не зависеть от размера семейства. Основное неравенство гипотезы выглядело так:

$$w(\mathcal{A}) \geq \frac{1}{2} w(\mathcal{U}) |\mathcal{A}|,$$

при $w(\mathcal{A}) = \sum\limits_{A \in \mathcal{A}} w(A)$.

Пусть $t(w) = \frac{1}{2} w(\mathcal{U})$. Тогда, вычитая из обеих частей неравенства $t(w)|\mathcal{A}|$, мы получаем следующее.

Неравенство 1.

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} (w(A) - t(w)) \geq 0$$

Будем называть *вкладом* множества из семейства величину $s(A) = w(A) - t(w)$. Определим также *вклад* подсемейства как $s(\mathcal{A}') = \sum\limits_{A \in \mathcal{A}'} s(A)$ для любого $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Тогда в итоге неравенство 1 сведется к следующему.

Неравенство 2.

$$s(\mathcal{A}) \geq 0$$

Заметим, что s обладает свойством аддитивности. Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{A}_k$, то $s(\mathcal{A}) = s(\mathcal{A}_1) + s(\mathcal{A}_2) + \ldots + s(\mathcal{A}_k)$. То есть, мы можем разбивать $\mathcal{A}$ на подсемейства любым способом и неравенство 2 будет изменяться соответствующе. Это очень удобное свойство, и оно пригодится в дальнейшем.

2.4. $\mathcal{F}_i$-корректность

Можно заметить, что если $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ полно по Франклу и $\mathcal{A}' \sim \mathcal{B}$, то $\mathcal{A}$ франклово. Действительно, не имеет значения как поименованы элементы множеств.

Известна следующая теорема. Первые два утверждения доказываются в работе [15], следующие два в [12], а последнее в [9].

Теорема 2.1. *Следующие семейства полны по Франклу:*

- *семейство из одного элемента*
- *семейство из двух элементов*
- *семейство из любых трёх множеств из* $\binom{[5]}{3}$
- *семейство из любых четырёх множество из* $\binom{[6]}{3}$
- *семейство из любых четырёх множество из* $\binom{[7]}{3}$

Пусть семейства $\mathcal{F}_i$ для $i \in [33]$ заданы, как указано в таблице 1 из приложения. Введем утверждение $Q(\mathcal{A})$ как «$\mathcal{A}$ не содержит подсемейств, эквивалентных семействам полным по Франклу из теоремы 2.1». Введем утверждение $R_i(\mathcal{A})$ как «$\mathcal{A}$ не содержит подсемейств, эквивалентных семействам $\mathcal{F}_j$ для $j < i$».

Замечание 2.1. *Все семейства* $\mathcal{F}_i$ *имеют универсум размера не больше* 7, *то есть, в частности, являются объектом доказательства — необходимо доказать, что все они франкловы.*

Смысл утверждений Q и R_i следующий.

Если утверждение Q не верно для некоторого семейства $\mathcal{A}$, то вопрос о его франкловости уже разрешен положительно. Действительно, в таком случае семейство $\mathcal{A}$ является надсемейством некоторого полного по Франклу семейства, что по определению означает, что оно франклово.

Аналогично, пусть утверждение R_i не выполняется для некоторого $\mathcal{A}$, то есть, $\mathcal{A}$ содержит некоторое подсемейство $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}' \sim \mathcal{F}_j$. Тогда отдельно рассматривать семейство $\mathcal{A}$ нет смысла, поскольку достаточно доказать полноту по Франклу семейства $\mathcal{F}_j$, и это будет означать франкловость $\mathcal{A}$.

То есть, эти утверждения служат для определения множеств, которые можно отдельно не рассматривать и не перебирать.

Семейства $\mathcal{A}$ назовем *$\mathcal{F}_i$-корректным*, если:

1. $\mathcal{A}$ замкнуто относительно объединения
2. $|\mathcal{U}| = 12$
3. $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{A}$
4. $Q(\mathcal{A})$
5. $R_i(\mathcal{A})$

Утверждение 1. *Не существует такого $\mathcal{A}$, которое было бы $\mathcal{F}_i$-корректно и $\mathcal{F}_j$-корректно для $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть такое $\mathcal{A}$ существует. Пусть без потери общности $i < j$. По определению $\mathcal{F}_i$-корректности $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{A}$, но тогда $R_j(\mathcal{A})$ не верное, а значит $\mathcal{A}$ не $\mathcal{F}_j$-корректно. $\square$

Заметим, что, доказав 12-ПФ для F_{25}, F_{32} и F_{33}, мы можем начать последний шаг доказательства. Поскольку из этого и теоремы 2.1 следует, что $\{\emptyset, [i]\}$ полны по Франклу для 12 элементов для $1 \leq i \leq 5$.

Несмотря на то, что нас фактически волнует вопрос 12-ПФ только 3 семейств из 33, ограничиться только ими было бы нельзя. Дело в том, что рассуждения, доказывающие 12-ПФ, удобнее проводить для большего числа множеств. И вот почему.

Если доказывать 12-ПФ некоторого $\mathcal{F}_i$ по определению, то нам нужно для всех надсемейств с универсумом размера 12 показать франкловость. Количество рассматриваемых надсемейств можно сократить, если исключить те из них, которые содержат другие 12-ПФ семейства, например, $\mathcal{F}_j$ для $j < i$ или семейства из теоремы 2.1. Фактически, дополнительные семейства не выполняют самостоятельных функций. Они лишь облегчают рассуждения про семейства F_{25}, F_{32}, F_{33}.

Таким образом, для доказательства 12-ПФ для некоторого $\mathcal{F}_i$ достаточно рассмотреть все $\mathcal{F}_i$-корректные семейства. Далее будет описано, как из рассмотрения $\mathcal{F}_i$-корректных семейств можно сделать необходимые выводы.

2.5. Поиск наименьших частей

Наивно перебрать все $\mathcal{F}_i$-корректные семейства невозможно из-за огромного их количества. Хочется рассмотреть те из них, для которых не очевидно, что они франкловы. Такими являются семейства с маленьким вкладом.

Эффективнее перебирать не сами семейства, а их части. Как в детском конструкторе: из небольшого числа частей, может получаться много разных построек. Если разделить семейства на части определенным удобным образом, то эти части удобно будет перебирать. Рассмотрим, как можно так разделить.

Пусть без потери общности $\mathcal{U} = [12]$. Действительно, не имеет значения, какие элементы в универсуме, главное его размер.

Пусть K, S — некоторые непересекающиеся подмножества универсума. Тогда пусть $\mathcal{C}_{K,S} = \{K \cup S' \mid S' \subseteq S\}$. Можно заметить, что это семейство замкнуто относительно объединения. Такие $\mathcal{C}_{K,S}$ будем называть *гиперкубами с основанием* K. Название мотивированно тем, что семейство можно представить как гиперкуб в векторном пространстве $F_2^{|S|}$ над полем из двух элементов (пространстве бинарных строк длины $|S|$). Каждому множеству можно сопоставить вектор с такими координатами, что в i-ой координате стоит 1, если $\mathcal{A}$ содержит i-й по номеру элемент S.

Заметим, что $\mathcal{A} = \bigsqcup\limits_{K' \subseteq K} (\mathcal{C}_{K',[n]\setminus K'} \cap \mathcal{A})$. То есть, $\mathcal{A}$ разбивается гиперкубами на части. Действительно, множество $A \in \mathcal{A}$ содержится в одном и ровно одном гиперкубе — кубе для $K' = A \cap K$.

Наличие подобных разбиений позволяет нам свести вопрос о положительности вклада $\mathcal{A}$ к вопросам о величинах вкладов $\mathcal{C}_{K,S} \cap \mathcal{A}$. Множество K, играющее определяющую роль в разбиении, предполагается известным и фиксированным для каждого $\mathcal{F}_i$. Оно определяется как будет показано далее. Таким образом, семейство $\mathcal{A}$ можно разделить на пересечения гиперкубов с $\mathcal{A}$.

Пусть $S_i = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}_i} A$, тогда

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{K \subseteq [12] \setminus S_i} \mathcal{C}_{K,S_i} \cap \mathcal{A}.$$

Тогда неравенство 2 можно записать так

$$\sum_{K \subseteq [12] \setminus S_i} s(\mathcal{C}_{K,S_i} \cap \mathcal{A}) > 0$$

.

Если значения $s(\mathcal{C}_{K,S_i})$ зависят только от размера K, но не от конкретных элементов, то перебирать становится проще. То есть, мы перестаем различать части $\mathcal{C}_{K_1,S_i}$ и $\mathcal{C}_{K_2,S_i}$ при $|K_1| = |K_2|$, что существенно упрощает перебор. В работе [17] функция w имеет одинаковое значение на всех элементах $[12] \setminus S_i$, как указано в таблице 1 из приложения. Кроме перебора, дальнейшие рассуждения о вкладах гиперкубов тоже становятся проще.

Семейство $\mathcal{G}$ будем называть $(\mathcal{F}_i, k)$-*корректным*, если существует такое $\mathcal{F}_i$-корректное семейство $\mathcal{A}$, что $\mathcal{G} = \mathcal{C}_{K,S_i} \cap \mathcal{A}$ и $|K| = k$. То есть, $\mathcal{G}$ является «удобной частью» некоторого $\mathcal{F}_i$-корректного семейства в смысле, описанном выше.

Утверждение 2. *$\mathcal{G}$ обладает следующими полезными свойствами.*

1. *$\mathcal{G}$ замкнуто относительно объединения*

2. *$\mathcal{G} = \mathcal{G} \uplus \mathcal{F}_i$ (замкнуто относительно $\mathcal{F}_i$)*

3. *$Q(\mathcal{G})$*

4. *$R_i(\mathcal{G})$*

Доказательство.

1. $\mathcal{G}$ является пересечением двух замкнутых относительно объединения множеств.

2. Буквально это свойство означает, что $\forall G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}_i : G \cup F \in \mathcal{G}$.

   $G \cup F \in \mathcal{A}$, так как $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{A}$, а $\mathcal{A}$ — замкнуто относительно объединения.

   $S_i = \bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} F$, поэтому $(\{\ K\ \} \uplus \mathcal{F}_i) \subseteq \mathcal{C}_{K,S_i}$. Так как $G \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}_{K,S_i}$, то $K \subseteq G$. $G \cup F = (G \cup K) \cup F = G \cup (K \cup F)$. И $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}_{K,S_i}$, $(K \cup F) \subseteq \mathcal{C}_{K,S_i}$, но $\mathcal{C}_{K,S_i}$ — замкнуто относительно объединения. Поэтому $G \cup F \in \mathcal{C}_{K,S_i}$.

   Итого, $G \cup F \in \mathcal{G} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C}_{K,S_i}$.

3. Если $Q(\mathcal{G})$ не верно, то $\mathcal{G}$ содержит некоторое подсемейство $\mathcal{F}$ из теоремы 2.1. Но $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$, поэтому $Q(\mathcal{A})$ не верно, но ведь $\mathcal{A}$ — $\mathcal{F}_i$-корректно. Противоречие.

4. Аналогично предыдущему. Если $R_i(\mathcal{G})$ не верно, то $\exists \mathcal{F} \sim \mathcal{F}_j$ для $j < i$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$, поэтому $R_i(\mathcal{A})$ не верно, но $\mathcal{A}$ — $\mathcal{F}_i$-корректно. Противоречие.

$\square$

Если в определении $(\mathcal{F}_i, k)$-корректного $\mathcal{G}$ не требовать от множества $\mathcal{A}$ удовлетворять утверждениям Q, R_i, то такое множество $\mathcal{G}$ будем называть $(\mathcal{F}_i, k)$-замкнутым. Легко заметить, что в этом случае $\mathcal{G}$ будет удовлетворять первым двум свойствам из утверждения выше.

В работе [17] для анализа используются данные о минимальных вкладах семейств $\mathcal{G}$. Пусть $l \in \{0, 1\}$. Тогда понадобятся следующие величины:

$$d_{k,i}^{l} = \min \{ \ s(\mathcal{G}) \mid \mathcal{G} \text{ — } (\mathcal{F}_i, k)\text{-корректное, } \mathbb{1}_{\mathcal{G}}(K) = l \ \}.$$

Пользу этих величин можно проиллюстрировать на следующем примере. Представим, что все эти величины оказались положительными. Из этого бы немедленно следовало, что все $\mathcal{F}_i$ 12-ПФ. Потому что любое $\mathcal{F}_i$-корректное семейство может быть представлено как дизъюнктное объединение $(\mathcal{F}_i, k)$-корректных семейств, а они все имеют положительный вклад, значит, и собранное семейство тоже. Не $\mathcal{F}_i$-корректные надсемейства $\mathcal{F}_i$ можно не рассматривать, так как они содержат другие 12-ПФ семейства, а значит тоже франкловы.

Конечно, это всего лишь пример, и такой удачи, как положительность всех величин d, не будет. Поэтому и финальные рассуждения будет сложнее, чем эти.

2.6. Анализ результатов работы алгоритма

Алгоритм, позволяющий за разумное время посчитать необходимые величины, существует. Его высокоуровневая схема и детали моей реализации будут представлены в следующих главах. Поэтому пока рассмотрим, как из результатов его работы, полученных авторами оригинальной публикации [17], можно сделать вывод о франкловости семейств. Сами результаты приведены в таблице 2 в приложении.

Лемма 2.1. *(О трех трехэлементных множествах) Пусть A, B, C — три различных трехэлементных множества. Тогда верно одно из следующего:*

- *Объединение некоторых двух множеств содержит* 5 *элементов.*
- *Найдутся две пары непересекающихся множеств.*
- *Семейство $\{A, B, C\}$ полное по Франклу.*

Доказательство леммы 2.1 состоит из простого анализа случаев и приведено в работе [17].

Теорема 2.2. *Семейства $\mathcal{F}_i$ для $1 \leq i \leq 33$ являются 12-ПФ.*

Перед тем, как перейдем к доказательству, рассмотрим следующее.

Определение 2.1. $\mathcal{K}_k = \{\ K \mid K \subseteq [12] \setminus S_i,\ |K| = k\ \}$

Тогда, $|\mathcal{K}_k| = \binom{12-|S_i|}{k}$.

Утверждение 3. $\mathcal{C}_{K,S_i} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ *при* $|K| = 0$ *или* $|K| = 12 - |S_i|$.

Действительно.

- $S_i \in \mathcal{A}$, так как $S_i \in \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{A}$. Но при $|K| = 0$ множество $S_i \in \mathcal{C}_{K,S_i}$.
- $[12] \in \mathcal{A}$, так как это универсум. Но при $|K| = 12 - |S_i|$ максимальное по включению множество в $\mathcal{C}_{K,S_i}$ это $K \cup S_i = [12]$.

Определение 2.2. *Верхний гиперкуб семейства $\mathcal{A}$ — это $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_{[12]\setminus S_i, S_i}$.*

Будем говорить, что гиперкуб *присутствует* в семействе, если его пересечение с семейством не пусто.

Определение 2.3. $w_i = \min\{d^0_{i,12-|S_i|}, d^1_{i,12-|S_i|}\}$ *— минимальный вес присутствующего верхнего гиперкуба.*

Понятно, что если верхний гиперкуб присутствует в семействе, то он вносит вклад не меньше w_i. А если не присутствует, то вклад нулевой.

Доказательство теоремы 2.2. Докажем, что для некоторого $\mathcal{A}$ с универсумом [12], являющегося надсемейством $\mathcal{F}_i$, гипотеза Франкла верна. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $i = 7, 8, 17 \ldots 33$.

Из таблицы 2 можно видеть, что $d^l_{i,k} < 0$ только при $k = 0$. Но в этом случае его отрицательный вклад компенсируется вкладом верхнего гиперкуба в $\mathcal{A}$. Мы знаем, что верхний гиперкуб присутствует в $\mathcal{A}$, исходя из утверждения 3. То есть, $s(\mathcal{A}) \geq d^1_{i,0} + w_i \geq 0$. Так как второе неравенство справедливо по таблице, а первое из-за присутствия в $\mathcal{A}$ верхнего гиперкуба.

Случай 2: $i = 1 \ldots 6, 9 \ldots 16$.

Из таблицы 2 можно видеть, что $d^l_{i,k} < 0$ только при $k \in \{0, 3\}$. В то же время $12 - |S_i| \in \{5, 6, 7\}$. Пусть $m_i = \begin{cases} 3, \text{ если } 12 - |S_i| = 5 \\ 4, \text{ если } 12 - |S_i| \in \{6, 7\} \end{cases}$.

Если $|\mathcal{K}_3 \cap \mathcal{A}| \geq m_i$, то $K_3 \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ для некоторого полного по Франклу семейства $\mathcal{F}$ из теоремы 2.1.

Если $|\mathcal{K}_3 \cap \mathcal{A}| \leq m_i - 2$, то $s(\mathcal{A}) \geq d^1_{i,0} + w_i + (m_i - 2)d^1_{i,3} \geq 0$. Второе неравенство верно по таблице, а первое — так как верхний гиперкуб присутствует в $\mathcal{A}$, и в $\mathcal{A}$ присутствует не более одного гиперкуба с основанием размера 0 и не более $m_i - 2$ гиперкубов с основанием размера 3 (причем мы берем $d^1_{i,3}$ как нижнюю оценку, так как она всегда меньше $d^0_{i,3}$).

Если $|\mathcal{K}_3 \cap \mathcal{A}| = m_i - 1$, то рассмотрим три случая:

- $12 - |S_i| = 7 \implies s(\mathcal{A}) \geq d^1_{i,0} + w_i + (m_i - 1)d^1_{i,3} + \min\{d^1_{i,5}, 2d^1_{i,6}\} \geq 0$. Второе неравенство верно по таблице. Первое неравенство верно, потому что в $\mathcal{A}$ присутствует гиперкуб с основанием размера 0, ровно $m_i - 1$ гиперкубов с основанием размера 3, и, по лемме 2.1, верно одно из трёх: $\mathcal{A}$ полно по Франклу (этот случай леммы автоматически завершает этот случай доказательства), в $\mathcal{A}$ присутствует гиперкуб с основанием размера 5, в $\mathcal{A}$ присутствуют два гиперкуба с основанием размера 6. Видно, что эти случаи зеркально отражают случаи в выводе леммы.

- $12 - |S_i| = 6 \implies s(\mathcal{A}) \geq d^1_{i,0} + w_i + (m_i - 1)d^1_{i,3} + d^1_{i,5} \geq 0$. Второе неравенство верно по таблице. Первое неравенство верно аналогично предыдущему случаю, но при этом гиперкуб с основанием 6 это и есть верхний гиперкуб, поэтому случай из леммы 2.1 с двумя парами непересекающихся множеств из трех элементов не может реализоваться.

- $12 - |S_i| = 5 \implies s(\mathcal{A}) \geq d^1_{i,0} + w_i + (m_i - 1)d^1_{i,3} \geq 0$. Случай аналогичен предыдущим.

Итого, рассмотрев все возможные варианты, мы каждый раз приходили к выводу, что $\mathcal{A}$ франклово, а значит $\mathcal{F}_i$ 12-ПФ.

□

2.7. Выводы

В данной главе была рассмотрена основная идея доказательства гипотезы Франкла для семейств с универсумом из не более чем 12 элементов. Была введена и подробно описана концепция полноты по Франклу и полноты по Франклу для 12 элементов, а также другие концепции из доказательства. Было проиллюстрировано использование переформулировки гипотезы в терминах весовой функции для доказательства, что 33 приведенных семейства действительно 12-ПФ, что позволяет далее непосредственно доказывать гипотезу.

После ознакомления с основными концепциями и идеей доказательства можно переходить к рассмотрению теоретического описания алгоритма оптимизированного перебора, используемого для получения величин d — значений минимальных вкладов частей семейств (гиперкубов).

3. Алгоритм перебора

Для семейств $\mathcal{F}_i$ алгоритм для всех $i \in [33], k \in (12 - |S_i|), l \in \{0, 1\}$ находит величины $\min\{s(\mathcal{G})\}$, где $\mathcal{G}$ — $(\mathcal{F}_i, k)$-корректное, а $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}(K) = l$.

Можно заметить, что для всех значений i, k, b минимумы могут перебираться независимо. Действительно, для вычисления $d^l_{i,k}$ нет необходимости знать другие значения d.

Для алгоритма перебора, не имеет значения какое конкретное множество K, а важен только его размер. Это возможно, потому что значения w на всех элементах K одинаковые, и к этому специально стремились при разработке алгоритма. Действительно, для $\mathcal{G}_1$, полученного из гиперкуба с основанием K_1, найдется некоторое $\mathcal{G}_2$, полученное из гиперкуба с основанием K_2, потому что любое $A \in \mathcal{G}_1$ содержит в себе K_1, и если K_1 заменить внутри A на K_2 того же размера, вклад не изменится. Более того, $\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_2$, потому что элементы K_1 можно переназвать как элементы K_2.

В связи с этим можно считать, что выбрано некоторое конкретное K размера k. Например, $\{|S_i| + 1, |S_i| + 2, \ldots, |S_i| + k\}$. Дальше на конкретных элементах K фокусироваться не будем.

3.1. Общая схема перебора

Перебрать все $\mathcal{G}$ наивным образом можно, перебрав элементы гиперкуба $\mathcal{C}_{K,S_i}$, вошедшие в $\mathcal{G}$. $|\mathcal{C}_{K,S_i}| = 2^{|S_i|}$. Существует $2^{2^{|S_i|}}$ различных семейств подмножеств гиперкуба. Это очень много. Конечно, не все из них замкнуты относительно объединения, но таких все равно неприемлемо много для целей перебора. Решение этой проблемы будет изложено дальше в тексте.

Общая схема алгоритма следующая.

1. Перебираем, какие множества гиперкуба входят в $\mathcal{G}$.

2. Дополняем семейство до минимального $(\mathcal{F}_i, k)$-замкнутого.

3. Проверяем выполняются ли Q, R_i для $\mathcal{G}$, если нет, отбрасываем.

4. Считаем вклад и обновляем $d^l_{i,k}$ при необходимости.

В основном оптимизации будут касаться только первого шага, а пока рассмотрим как реализованы остальные шаги.

Наиболее просто реализован шаг 4. Подсчет вклада осуществляется наивным образом: для каждого множества из $\mathcal{G}$ считается значение функции w, а потом вычитается $t(w)$.

В работе [17] демонстрируется формула дополнения семейства $\mathcal{A}$ до минимального $(\mathcal{F}_i, k)$-замкнутого. Выглядит она так

$$\overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i},$$

где $\overline{\mathcal{F}_i}$ — замыкание относительно объединения.

Утверждение 4. $\overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$ — *минимальное по включению* $(\mathcal{F}_i, k)$*-замкнутое множество, содержащее некоторое* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_{K,S_i}$.

Доказательство. Семейство замкнуто относительно объединения. Пусть $M_1, M_2 \in \overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$. Эти множества можно представить так: $M_t = A_t \cup F_t$, где $A_t \in \overline{\mathcal{A}}$, $F_t \in \overline{\mathcal{F}_i}$.

Тогда $M_1 \cup M_2 = A_1 \cup F_1 \cup A_2 \cup F_1 = (A_1 \cup A_2) \cup (F_1 \cup F_2) = A_3 \cup F_3 \in (\overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i})$, где $A_3 \in \overline{\mathcal{A}}$, $F_3 \in \overline{\mathcal{F}_i}$. Последнее равенстве верно, потому что $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{F}_i}$ замкнуты относительно объединения.

Семейство замкнуто относительно объединения с $\mathcal{F}_i$. $\overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i} = \overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i} \uplus \mathcal{F}_i$, потому что $\overline{\mathcal{F}_i} \uplus \mathcal{F}_i = \overline{\mathcal{F}_i}$.

Это действительно минимальное из возможных семейств. Все множества внутри имеют вид $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_l$, где $A_x \in \mathcal{A}, F_y \in \mathcal{F}_i$. Одновременно, каждое множество такого вида обязано лежать в $(\mathcal{F}_i, k)$-замкнутом семействе, содержащим $\mathcal{A}$.

Объединение A_x обязано лежать в семействе по замкнутости относительно объединения, а множества F_y можно «поместить» в $\mathcal{A}$. То есть, так как $\mathcal{A} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{F}_i$, то $A_1 \cup F_1 = A'_1 \in \mathcal{A}$. И так далее, «избавляясь» от $\mathcal{F}_y$ в объединении.

Ну а $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$, так как $\emptyset \in \mathcal{F}_i$. □

Замыкание семейства относительно объединения реализовано наивно по вышеприведенной формуле.

3.2. Вычисления Q и R_i

Изначально был реализован наивный алгоритм проверки того, содержит ли $\mathcal{G}$ одно из семейств из теоремы 2.1, и содержит ли одно из семейств $\mathcal{F}_i$ с меньшим номером. Перебирался факториал возможных переименований элементов. Конечно, производительности наивного алгоритма не было достаточно. Проверка того, содержит ли семейство определенное подсемейство очень трудоемкая задача в общем случае, если помнить, что сравнение семейств происходит с точностью до переименования элементов.

В работе [17] не приводится реализация вычисления этих утверждений. Однако, по словам одного из авторов оригинальной работы идея в следующем. Несмотря на то, что реализация в общем случае действительно низкопроизводительная, можно для каждого конкретного семейства $\mathcal{F}_i$ составить свой специализированный алгоритм, основанный на структуре семейства и позволяющий эффективно проверять, содержится ли оно в другом семействе или нет.

Например, $\mathcal{F}_4 = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\}\}$. Для него подобный алгоритм бы выглядел так. Возьмем $\mathcal{G}$. Рассмотрим в нём все пары трехэлементных множеств. Если найдется пара, пересекающаяся по одному элементу, то $\mathcal{G}$ содержит $\mathcal{F}_4$.

Замечание 3.1. *В данном месте алгоритма считается, что $\emptyset \notin \mathcal{F}_4$, хотя в целом это не так. Дело в том, что $\mathcal{G}$ для $k > 0$ никогда не содержит $\emptyset$, что лишает R_i смысла.*

Приведенная реализация вычисления утверждений хоть и в разы длиннее с точки зрения количество необходимого кода, но работает она гораздо быстрее. Это позволяет использовать её в работающем алгоритме.

3.3. Основная оптимизация

Рассмотренные выше оптимизации носили вспомогательный характер и не оказали бы решающего влияния на производительность, если бы не следующая, очень существенная.

Напомню, что основная проблема первого шага перебора — огрмное количество потенциальных семейств подмножеств гиперкуба, которые имело бы смысл перебрать.

Учитывая, что они перебираются с целью нахождения семейств с минимальным вкладов, было бы логично предположить, что минимум будет достигаться на некотором семействе, содержащем хотя бы одно множество с отрицательным вкладом. Это предположение, хотя и логично и интуитивно понятно, использовалось без строгого доказательства в работе [17].

Действуя в этом предположении, ограничимся перебором семейств, содержащих множество с отрицательным вкладом.

Пусть $\mathcal{N} = \{\ A \mid A \ \in\ \mathcal{C}_{K,S_i},\ s(A) < 0\ \}$, $p = |\mathcal{N}|$, $\mathcal{N}$ упорядочено по возрастанию вклада. Пусть a — бинарная строка длины не больше p, а $\mathcal{N}_a$ — подсемейство $\mathcal{N}$, содержащее те и только те множества $\mathcal{N}$, по номеру которых в строке a стоит 1. То есть, например, если строка a длины t, то все множества из $\mathcal{N}$ с номерами больше t не содержатся в $\mathcal{N}_a$.

Заметим, что упорядочивание $\mathcal{N}$ по возрастанию вклада дает несколько интересных свойств. Во-первых, $\mathcal{N}_j \not\subseteq \mathcal{N}_i$, при $i < j$, так как функция w аддитивна и положительна. Во-вторых, $\mathcal{N}_1 = K$, так как это самое маленькое по включению (и по вкладу) множество семейства.

Алгоритм 1 Итерация перебора

```
procedure BACKTRACKING(a)
    G_a ← ‾N_a ⊎ ‾F_i
    if Q(G_a) and R_i(G_a) then
        d ← min(s(G_a), d)
        if |a| < p then
            BACKTRACKING(a1)
            if N_{|a|+1} ∉ G_a then
                BACKTRACKING(a0)
            end if
        end if
    end if
end procedure
```

Выше приведена схема рекурсивного алгоритма перебора битовых строк.

Первый вызов происходит со строкой a длины 1. Начальная строка a будет равна 0 или 1 в зависимости от текущего значения b, потому что под номером 1 в $\mathcal{N}$ как раз множество K.

В теле алгоритма проверяются утверждения Q, R_i для текущего семейства $\mathcal{G}_a$. В случае, если они выполняются, для $\mathcal{G}_a$ считается вклад и обновляется глобальная переменная минимума d. Переменная глобальная в рамках запуска алгоритма для фиксированных i, k и b.

Переход от рассмотрения строки a длины q к рассмотрению строк $a0$ и $a1$ длины $q + 1$ (далее — *удлинение*) происходит следующим образом. Во-первых, нужно определить, есть ли куда удлинять, то есть, остались ли ещё не рассмотренные множества из $\mathcal{N}$. Во-вторых, нужно определить, лежит ли в семействе $\mathcal{G}_a$ множество $\mathcal{N}_{q+1}$, и если да, то не переходить к рассмотрению строки $a0$, так как уже выбранные в $\mathcal{N}_a$ множества будут давать в $\mathcal{G}_a$ множество $\mathcal{N}_{q+1}$. То есть, случай будет эквивалентен $a1$.

Если хотя бы одно из утверждений Q или R_i ложно для текущего $\mathcal{G}_a$, то дальнейший перебор строк с префиксом a не происходит в принципе. Это допустимо потому, что если Q ложно для некоторого $\mathcal{A}$, то и для всех его надсемейств оно будет тоже ложно, аналогично для R_i. А любое $\mathcal{G}_a$ всегда будет подсемейством для $\mathcal{G}_{a'}$, если a префикс a'.

Учитывая эту оптимизацию, все равно нужно перебрать порядка 2^p различных семейств, что не позволяет получить результаты за приемлемое время. Поэтому производится еще одна оптимизация.

При добавлении множества с отрицательным вкладом в семейство, общий вклад может как уменьшиться, так и увеличиться (за счет множеств с положительным вкладом, добавленных в результате замыкания). Поэтому, если мы в какой-то момент понимаем, что даже все оставшиееся в $\mathcal{N}$ нерассмотренные множества (их количество $p - |a|$) не смогут вклад $\mathcal{G}_a$ уменьшить ниже минимума d, то продолжать рассматривать множества $\mathcal{G}_{a'}$ для a префикса a' не имеет смысла.

Введем $v(a) = \sum\limits_{i>|a|} s(\mathcal{N}_i)$, тогда новая схема алгоритма перебора битовых строк с учетом новой оптимизации выглядит так.

Алгоритм 2 Итерация перебора (оптимизированная)

```
procedure BACKTRACKING(a)
    G_a ← N̄_a ⊎ F̄_i
    if Q(G_a) and R_i(G_a) then
        d ← min(s(G_a), d)
        if v(a) < d then
            if |a| < p then
                BACKTRACKING(a1)
                if N_{|a|+1} ∉ G_a then
                    BACKTRACKING(a0)
                end if
            end if
        end if
    end if
end procedure
```

Тестирование производительности показывает, что описанных оптимизаций уже достаточно для приемлемого времени работы алгоритма.

3.4. Выводы

В этой главе был описан алгоритм перебора $(\mathcal{F}_i, k)$-корректных семейств с целью поиска минимального по вкладу. Начав с общей схемы перебора, шаг за шагом было показано, как алгоритм приводится к виду, позволяющему ему завершиться за приемлемое время.

Было описано, как реализованы все ключевые шаги из схемы алгоритма. В их числе вычисление истинности утверждений Q и R_i, несмотря на то, что в оригинальной публикации описание было опущено. Была описана как главная оптимизация, так и остальные, применяемые в оригинальной публикации. Был приведен псевдокод реализации основной итерации перебора.

После ознакомления с алгоритмом перебора, можно переходить к предлагаемым в настоящей работе улучшениям реализации и возникающим проблемам.

4. Предлагаемые улучшения реализации и их проблемы

В рамках настоящей работы был повторно реализован описанный выше теоретический алгоритм оптимизированного перебора с рядом улучшений. В этой главе будут описаны эти улучшения, проанализирована их полезность и проблемы.

4.1. Параллелизация

Учитывая то, что в рамках одной итерации перебора, происходит ветвление и рекурсивные вызовы с другими аргументами, естественной кажется идея распараллеливания перебора. В связи с этим моя реализация использует библиотеку для асинхронного, параллельного программирования в функциональном стиле ZIO для языка Scala. Многопоточность в ZIO реализована путем введения абстракции *файберов*, представляющих собой легковесные аналоги потоков исполнения операционной системы. В ZIO встроенному контроллеру поручается планирование файберов на исполнение. Ввиду легковесности файберов по сравнению с потоками операционной системы, достигается быстрота переключения между ними и возможность создания большего числа файберов. Эта особенность не только ускоряет параллельный код, но и может быть особенно актуальной для некоторых схем рекурсии, требующих большого числа потоков.

Естественной выглядит идея каждый рекурсивный вызов перебора поручать своему файберу для исполнения. Это является классической схемой распараллеливания рекурсивных задач в случае, когда общее число веток перебора не превышает лимита на количество потоков, или, в нашем случае, файберов. При повторной реализации алгоритма была опробована эта схема и проверено, что общее число веток перебора, существующих одновременно, превышает лимит на количество файберов. Это даже с учетом того, что этот лимит у файберов в тысячи раз выше, чем у потоков операционной системы.

Поэтому была реализована другая классическая схема распараллеливания рекурсивных задач. Создаем очередь для аргументов рекурсивных вызовов — будем называть такой набор аргументов *задачей.* Так, вместо рекурсивного вызова поток помещает следующую задачу в очередь. Задачи вынимаются из очереди, и раздаются файберам так, чтобы общее число одновременно выполняющихся файберов не превышало T штук. Учитывая, что на одном ядре процессора может в один момент времени выполняться один файбер, дополнительного ускорения от увеличения числа T выше числа ядер не происходит. Поэтому число T было выбрано равным числу ядер на устройстве.

На удивление, параллелизация перебора не принесла заметного ускорения. Для установления причин в первую очередь была проведена профилировка исполнения, чтобы понять, насколько синхронизация потоков его замедляется. Во многих случаях именно долгая синхронизация потоков становится тем, что перекрывает все ускорение от параллельного исполнения. Однако, влияние синхронизации профилировщик оценивал в несколько процентов, что на фоне ожидаемой выгоды от параллелизации не могло являться существенным замедляющим фактором.

В то же время, было проведено сравнение количества рассмотренных веток в переборе. По результатам такого сравнения было установлено, что увеличение числа рассмотренных веток приблизительно пропорционально увеличению количества участвующих потоков. Таким образом, причина отсутствия ускорения, скорее всего, заключается именно в этом. Перебор ускоряется в терминах веток дерева перебора в секунду, но в то же время увеличивается объем перебора, что приводит к сохранению общего времени перебора приблизительно неизменным.

Однако, параллелизация не является вредным улучшением, а также оставалась надежда, что при некоторых порядках распределения задач файберам локальное ускорение могло иметь место, поэтому было решено не отказываться от параллелизации.

4.2. Кэши и предподсчет

Кэш весовой функции. В качестве одного из улучшений алгоритма рассматривалась возможность для каждого множества запоминать значение функции w. В целом, для небольшого универсума хранить все эти значения возможно, поэтому это было потенциально полезно. Кроме того, кэш можно было держать любого размера, чтобы снять даже теоретическую проблему с промахами. Однако, множества в реализации алгоритма хранились как объекты языка Scala, поэтому получить по множеству ключ для какого-либо хранилища кэшированных значений w, а затем достать оттуда это значение, оказывалось дольше, чем посчитать его с нуля. Так, это улучшение оказалось не только бесполезным, но и вредным, поэтому от него было решено отказаться.

Кэш дополнения до замкнутого. Вспоминая формулу дополнения семейства $\mathcal{A}$ до $(\mathcal{F}_i, k)$-замкнутого — $\overline{\mathcal{A}} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$, можно предположить, что среди близких бинарных строк a, определяющих $\mathcal{N}_a$, найдутся такие, для которых будут равны замыкания $\overline{\mathcal{N}_a} = \overline{\mathcal{N}_{a'}}$. Поэтому могло оказаться полезным кэшировать результат оператора $\cdot \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$ для замкнутых множеств $\overline{\mathcal{N}_a}$. Однако, эксперименты показали, что для любого разумного размера кэша попаданий в него было очень мало, и почти все из них были в самом начале. То есть там, где строки наименее различаются. В то же время, обращение к кэшу было очень дорого с точки зрения времени работы, поэтому от этого улучшения, оказавшегося бесполезным, было решено полностью отказаться.

Предподсчет замыканий 33 **семейств.** Простейшее улучшение, значительно ускорившее изначальную реализацию алгоритма — вынос вычисления замыканий $\mathcal{F}_i$ из веток перебора на подготовительный этап. Действительно, это величина ни от чего не зависит, поэтому её можно посчитать заранее для всех i.

4.3. Выводы

В этой главе были описаны предложенные улучшения для алгоритма оптимизированного перебора: параллелизация, кэш весовой функции, кэш дополнения до замкнутого и предподсчет замыканий семейств $\mathcal{F}_i$.

Полезной оказалась только самое простое улучшение — вынос замыкания семейств $\mathcal{F}_i$ за пределы итерации перебора. Остальные улучшения либо не принесли существенной пользы, либо и вовсе оказывались вредны. Самым неудачным оказалось отсутствие ускорения от параллелизации — суммарное время работы практически не уменьшилось на фоне увеличения количества одновременно рассматриваемых веток перебора, а большая часть веток перебиралась зря, так как могла бы быть оптимизирована.

Ознакомившись с предложенными улучшениями и рассмотрев их проблемы, можно переходить к результатам работы реализованного алгоритма и сравнению с результатами из оригинальной публикации.

5. Числа $d^l_{i,k}$ и расхождения с оригинальной публикацией

В данной главе будет рассмотрено принципиальное расхождение результатов работы моей реализации алгоритма с результатами из оригинальной публикации и установлена причина такого расхождения.

5.1. Демонстрация расхождения

Как видно из таблицы 2 в приложении, $d^0_{20,1} = 2$. $\mathcal{F}_{20} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1,4,5,6\}\}$, а функция w для $i = 20$ определена на элементах универсума как

$u \in \mathcal{U}$	1	2	3	4	5	6	7 – 12
$w(u) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	6	6	6	4	4	4	2

Несмотря на значение d, приведенное в оригинальной публикации, в ходе исполнения моей версии алгоритма, получилось найти контрпример $(\mathcal{F}_{20}, 1)$-корректного семейства, вклад которого меньше 2. Наличие этого примера означает, что значение d приведено неверное.

$\mathcal{A} =$

$$\{4,5,7\},$$
$$\{1,2,3,7\},$$
$$\{4,5,6,7\},$$
$$\{1,4,5,6,7\},$$
$$\{1,2,3,4,5,7\},$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

при этом $s(\mathcal{A}) = -2$ для w как приведено в таблице.

Утверждение 5. *Семейство $\mathcal{A}$ является $(\mathcal{F}_{20}, 1)$-корректным.*

Доказательство. Достаточно проверить все пункты определения $(\mathcal{F}_{20}, 1)$-корректности. Перечислим здесь эти пункты и заключим, что они верны, поскольку каждый из пунктов напрямую проверяется руками.

1. $\mathcal{A}$ замкнуто относительно объединения. Да, это действительно так.

2. $\mathcal{A} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{F}_{20}$. Да, это действительно так.

3. $Q(\mathcal{A})$ *(Теорема 2.1)*. Действительно, $\mathcal{A}$ в принципе не содержит множеств размера 1 и 2, а множеств размера 3 в семействе только одно.

4. $R_{20}(\mathcal{A})$. Да, это так. $\mathcal{A}$ не содержит семейств эквивалентных семействам $\mathcal{F}_i$ для $1 \leq i \leq 19$.

□

5.2. Дефект домена

В оригинальной публикации [17] переборным доменом — то есть множеством семейств $\mathcal{G}$, среди вкладов которых ищется минимум — является множество всех $(\mathcal{F}_i, k)$-корректных семейств. Однако, как было показано выше, при данном определении домена, приведенные в работе значения d не являются полностью корректными. Мне удалось сформулировать причину расхождения в числах d.

Дело в том, что теоретически описанный в работе [17] переборный домен не совпадает с доменом в фактической реализации алгоритма. Фактически из домена исключается дополнительный класс семейств, в число которых входит и предложенное мною как контрпример семейство.

Строго описать этот класс не представляется возможным без уточнения деталей реализации у авторов оригинальной публикации. Но нестрого это набор некоторых дополнительных семейств $\mathcal{G}$, которые, при наличии их в составе большего семейства $\mathcal{A}$ лишают его $\mathcal{F}_i$-корректности.

Например, если тем или иным способом группируя множества из других частей $\mathcal{A}$ с множествами из $\mathcal{G}$, можно получить одно из 19 предшествующих 12-ПФ семейств ($\mathcal{F}_i$ для $1 \leq i \leq 19$) или семейства из теоремы 2.1, то $\mathcal{G}$ допустимо исключать из переборного домена без потери корректности дальнейших рассуждений.

Таким образом, хоть эта деталь реализации и не влияет на корректность доказательства гипотезы для $|\mathcal{U}| \leq 12$, несовпадение теоретически описанного и фактического переборных доменов делает невозможным повторение результатов авторов исключительно по тексту из статьи.

5.3. Преодоленные дефекты

На самом деле, дефект домена впервые встречается уже на 2 группе из 33. То есть, на первой группе, для семейств которой актуальна проверка R_i. Однако, вплоть до 19 группы исправлять теоретически описанный домен на, судя по всему, фактически реализованный авторами публикации получается интуитивно и практически без дополнительной информации. Необходимо было лишь рассматривать, как ведут себя $\mathcal{G}$ вместе с пустым множеством в составе $\mathcal{A}$, и это исправление сразу давало результат из оригинальной статьи.

На 20 группе подобный способ исправления перестает работать, поэтому, начиная с этой группы, результаты совпадать перестают. На данный момент неизвестно в точности, как нужно исправить домен, чтобы получался результат из оригинальной статьи, поэтому результаты работы алгоритма после 20 группы получать не имеет смысла.

5.4. Выводы

В данной главе было рассмотренно серьезное расхождение результата работы повторной реализации алгоритма — чисел $d^l_{k,i}$, и результатов, приведенных в оригинальной публикации. Причиной расхождения является более узкий переборный домен у авторов работы [17] в фактической реализации алгоритма, чем теоретически описано в статье. Это расхождение существенно постольку, поскольку не позволяет, опираясь на текст статьи воспроизвести их результаты.

6. Заключение

В рамках данной работы был изучен подход к доказательству гипотезы Франкла о множествах, замкнутых относительно объединения, при условии, что размер универсума ограничен 12 элементами. Был рассмотрен алгоритм поиска семейств с минимальным весом, предложенный авторами оригинальной работы 2017 года [17].

Вместе с этим была описана реализация рассмотренного алгоритма на языке программирования Scala с параллелизацией и рядом улучшений, а также проанализирована польза этих улучшений. Выяснилось, что наилучший эффект дает одна из самых очевидных оптимизаций — вынос «переменной из цикла».

Одновременно в работе приводится существенный контрпример к числам $d^l_{i,k}$, полученным фактической реализацией алгоритма авторами работы 2017 года [17]. Этим демонстрируется, что реализация авторов не соответствует своему теоретическому описанию, что делает невозможным воспроизведение результата без обращения к сторонним источникам информации.

Можно выразить надежду, что в дальнейшем, внедряя больше полезных улучшений алгоритма, можно добиться повышенной производительности, что позволит в целом претендовать на достижение аналогичных результатов о семействах с 13-элементными универсумами и более.

С другой стороны, учитывая развитие многоядерных вычислительных юнитов в современных компьютерах, стоит обратить внимание на оптимизации алгоритма, хорошо работающие в конкурентной среде, чтобы избежать просматривания потенциально оптимизируемых ветвей перебора, и сделать параллелизацию реальным ускоряющим улучшением.

Список литературы

[1] Balla I., Bollobas B., Eccles T. Union-closed families of sets // Journal of Combinatorics. Theory (Series A). — 2013. — Vol. 120. — P. 531–544.

[2] Bosnjak I., Markovic P. The 11-element case of Frankl's conjecture // European Journal of Combinatorics. — 2008. — Vol. 15.

[3] Bruhn Henning, Charbit Pierre, Schaudt Oliver, Telle Jan Arne. The graph formulation of the union-closed sets conjecture // European Journal of Combinatorics. — 2015. — Vol. 43. — P. 210–219.

[4] Bruhn Henning, Schaudt Oliver. The union-closed sets conjecture almost holds for almost all random bipartite graphs // European Journal of Combinatorics. — 2017. — Vol. 59. — P. 129–149.

[5] Czedli G. On averaging Frankl's conjecture for large union-closed sets // Journal of Combinatorics. Theory (Series A). — 2009. — Vol. 116. — P. 724–729.

[6] Czedli G., Schmidt E.T. Frankl's conjecture for large semimodular and planar semimodular lattices // Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Fac. rer. nat., Mathematica. — 2008. — Vol. 47. — P. 47–53.

[7] Lo Faro G. Union-closed sets conjecture: Improved bounds // Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. — 1994. — Vol. 16. — P. 97–102.

[8] Maric Filip, Vuckovic Bojan, Zivkovic Miodrag. Fully Automatic, Verified Classification of all Frankl-Complete (FC(6)) Set Families. — 2019. — arXiv:1902.08765.

[9] Maric Filip, Zivkovic Miodrag, Vuckovic Bojan. Formalizing Frankl's Conjecture: FC-Families // Intelligent Computer Mathematics. — Springer Berlin Heidelberg, 2012. — P. 248–263.

[10] Markovic P. An attempt at Frankl's conjecture // Publications de l'Institut Mathematique. — 2007. — Vol. 81. — P. 29–43.

[11] Moriss R. FC-families, and improved bounds for Frankl's conjecture // European Journal of Combinatorics. — 2006. — Vol. 27. — P. 269–282.

[12] Poonen B. Union-close families // European Journal of Combinatorics. Theory (Series A). — 1992. — Vol. 59. — P. 253–268.

[13] Rival I. Graphs and order // NATO ASI Series. — 1985. — Vol. 147.

[14] Roberts I. The union-closed sets conjecture // Tech. Report 2/92, Curtin University of Technology. — 1992.

[15] Sarvate D.G., Renaud J.-C. On the union-closed sets conjecture // Ars Combinatoria. — 1989. — Vol. 27. — P. 149–154.

[16] Sarvate D.G., Renaud J.-C. Improved bounds for the union-closed sets conjecture // Ars Combinatoria. — 1990. — Vol. 29. — P. 181–185.

[17] Vuckovic B., Zivkovic M. The 12-Element Case of Frankl's Conjecture // IPSI Transactions on Internet Research. — 2017. — Vol. 13. — P. 65–71.

7. Приложение

7.1. Таблица 1. Список 33 семейств

Список 33 семейств $\mathcal{F}_i$, соответствующих весовых функций w и величин $t(w)$. Каждое $\mathcal{F}_i$ содержит дополнительно пустое множество.

i	$\mathcal{F}_i$	1	2	3	4	5	6	7	$8-12$	$t(w)$
1	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,3,5\}$	24	24	18	18	12	2	2	2	55
2	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$,$\{2,4,5,6\}$,$\{3,4,5,6\}$	24	24	24	10	10	10	2	2	57
3	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{4,5,6\}$	6	6	6	9	9	6	1	1	24
4	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5\}$	11	7	7	7	7	1	1	1	23
5	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$,$\{2,4,5,6\}$	6	6	4	4	4	4	1	1	17
6	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,3,7\}$	8	8	8	8	8	8	8	2	33
7	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,4,6\}$,$\{1,2,5,6\}$	5	5	4	4	4	4	1	1	16
8	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,6\}$,$\{1,2,3,7\}$	8	8	8	6	6	6	6	2	29
9	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,6\}$	10	10	10	8	8	8	2	2	33
10	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{4,6,7\}$	3	3	3	3	3	3	3	1	13
11	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{4,5,6\}$	8	8	8	14	6	6	2	2	31
12	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,6\}$	10	10	10	8	8	8	2	2	33
13	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,3,4,5\}$	12	12	12	8	8	2	2	2	33
14	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6,7\}$,$\{2,4,5,6,7\}$,$\{3,4,5,6,7\}$	3	3	3	3	3	3	3	1	13
15	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$,$\{1,2,4,5,6\}$	7	7	4	4	4	4	1	1	18
16	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$	9	9	8	8	8	2	2	2	28
17	$\{1,2,3\}$,$\{4,5,6\}$	3	3	3	3	3	3	1	1	12
18	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$	4	4	4	4	1	1	1	1	12
19	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5,6\}$,$\{1,3,4,5,6\}$	8	8	8	6	6	6	2	2	27
20	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$	6	6	6	4	4	4	2	2	21
21	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$	3	3	3	3	3	1	1	1	11
22	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5\}$	10	10	8	6	6	2	2	2	27
23	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5,6\}$	4	4	4	2	2	2	1	1	12
24	$\{1,2,3\}$,$\{4,5,6,7\}$	3	3	3	2	2	2	2	1	11
25	$\{1,2,3\}$	3	3	3	1	1	1	1	1	9
26	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,4,6\}$	6	6	6	6	6	4	2	2	23
27	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,4,5\}$,$\{1,2,3,4,6\}$	2	2	2	2	2	2	1	1	9
28	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$	3	3	3	2	2	1	1	1	10
29	$\{1,2,3,4,5\}$,$\{1,2,3,4,6\}$	3	3	3	3	3	3	1	1	12
30	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,4,5\}$	3	3	3	3	3	1	1	1	11
31	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,5,6\}$	3	3	3	3	3	3	1	1	12
32	$\{1,2,3,4\}$	5	5	5	5	2	2	2	2	18
33	$\{1,2,3,4,5\}$	4	4	4	4	4	2	2	2	17

7.2. Таблица 2. Значения d

Значения $d^l_{k,i}$ для вкладов частей семейств (гиперкубов).

$1 \le i \le 33$, $0 \le k \le 12 - |S_i|$, $l \in \{0, 1\}$

$\|K\|$	**0**	**1**	**2**	**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**8**		**9**			
$i \setminus l$	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$12 - r_i$	r_i
1	60	38	15	−36	13	0	43	30	51	58	53	86	55					7	5
2	30	47	45	−40	11	8	53	56	55	96	57							6	6
3	6	19	12	−15	6	0	20	15	23	30	24							6	6
4	−3	12	3	−6	1	0	19	6	21	12	22	18	23					7	5
5	2	12	9	−2	4	5	15	20	16	29	17							6	6
6	60	25	1	−18	9	52	31	140	33									5	7
7	22	11	8	7	4	26	14	53	15	80	16							6	6
8	58	18	7	15	6	77	27	155	29									5	7
9	30	14	3	−23	1	8	28	56	31	96	33							6	6
10	−9	6	0	−4	1	9	12	24	13									5	7
11	−17	8	16	−5	9	8	27	26	29	38	31							6	6
12	27	14	12	−7	1	3	28	49	31	87	33							6	6
13	3	19	18	−1	20	1	26	23	29	45	31	64	33					7	5
14	6	3	6	−9	1	9	12	32	13									5	7
15	3	8	11	−5	7	0	13	14	17	24	18							6	6
16	−2	10	4	−10	12	0	20	24	24	48	26	64	28					7	5
17	−12	2	6	0	0	0	8	8	11	12	12							6	6
18	−8	4	4		1	0	8	6	9	14	10	19	11	24	12			8	4
19	−1	16	13		14	0	19	19	25	41	27							6	6
20	−18	2	1		0	3	16	17	19	27	21							6	6
21	−7	5	3		0	0	7	9	9	20	10	27	11					7	5
22	−8	15	12		2	1	17	14	23	31	25	43	27					7	5
23	−4	3	4		2	2	10	10	11	18	12							6	6
24	−10	4	3		0	3	10	10	11									5	7
25	−9	1	2		3		1	0	4	3	6	5	7	7	8	9	9	9	3
26	0	8	5		2	8	19	43	21	65	23							6	6
27	−7	0	0		0	1	6	16	8	24	9							6	6
28	−5	1	0		1	4	3	8	7	15	9	22	10					7	5
29	0	5	3		6	6	0	7	10	18	12							6	6
30	−6	3	3		0	1	3	3	6	9	8	14	10					7	5
31	−6	7	2		6	6	10	5	11	12	12							6	6
32	−16	4	6		1	0	5	0	8	7	13	12	16	16	18			8	4
33	−14	5	5		6		5	1	8	9	14	14	17					7	5