

Задача 1. Найдите длину кривой

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq e.$$

Ответ округлите до 1 знака после запятой.

Напомним, что длина кривой $y(x)$, $a \leq x \leq b$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Задача 2. Найдите радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} n^p x^n,$$

где $p > 0$ — некоторое действительное число. Округлите ответ до 1 знака после запятой.

Напомним, что радиус сходимости R ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ вычисляется по формуле:

$$1/R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Задача 3. Выясните, при каких λ квадратичная форма

$$q(x) = -\lambda x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2^2 + 2x_2x_3 - 7x_3^2$$

отрицательно определена. В качестве ответа введите точную нижнюю грань множества искомых λ .

Задача 4. При каких $a \in \mathbb{C}$ матрица $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ диагонализуема? Найдите модуль наибольшего такого a ; если наибольшего не существует, введите «inf» (без кавычек).

Задача 5. На втором этаже корпуса R стоят три кулера с водой. Обозначим через X количество кулеров, которые полностью исправны. Таблица распределения случайной величины X указана ниже. Найдите математическое ожидание случайной величины X .

$X = x$	0	1	2
$P(x)$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$

Задача 6. Нефтяная компания оценивает вероятность успеха новой скважины (наличие нефти) в 40%. Для получения дополнительной информации было запланировано испытание (пробное бурение). Исторически сложилось так, что на 70% успешных скважин проводили испытание и 20% неудачных скважин тоже проводили испытание. Учитывая, что на этой скважине было запланировано испытание, посчитайте вероятность того, что скважина будет успешной.

Задача 7. Пусть Y — дискретная случайная величина принимающие значения $\{0, 1, 2, \dots\}$, а при заданном $Y = y$ условным распределением случайной величины X будет биномиальное распределение с параметрами y и p , где $p = 0,5$ — вероятность успеха. Пусть Y имеет распределение Пуассона со средним значением $\lambda = 4$. Тогда предельное распределение X будет распределение Пуассона. Найдите значение его параметра.

Задача 8. Для случайной величины X с таблицей распределения

$X = x$	0	1	2	4
$P(x)$	$0.5 + \theta$	$0.1 - \theta$	0.2	0.2

получена выборка $\{1, 4, 2, 2, 0, 1\}$. Вычислите оценку максимального правдоподобия.

Задача 9. Незнайка в очередной раз отправился на Луну на своем космическом корабле "Радужный путешественник". Во время своего исследования он обнаружил необычный планшет, который с помощью искусственного интеллекта классифицирует лунные камни по их полезности для землян.

На планшете есть программа, которая предсказывает, насколько полезен каждый камень, с оценками от 0 до 1. Незнайке нужно решить, какие камни забрать с собой, чтобы не перегрузить корабль.

На экране планшета Незнайка увидел следующие данные:

$b(x_1) = 0.1$	$y_1 =$ бесполезен
$b(x_2) = 0.9$	$y_2 =$ полезен
$b(x_3) = 0.05$	$y_3 =$ бесполезен
$b(x_4) = 0.2$	$y_4 =$ бесполезен
$b(x_5) = 0.85$	$y_5 =$ бесполезен
$b(x_6) = 0.95$	$y_6 =$ полезен
$b(x_7) = 0.5$	$y_7 =$ полезен
$b(x_8) = 0.45$	$y_8 =$ бесполезен
$b(x_9) = 0.35$	$y_9 =$ полезен
$b(x_{10}) = 0.6$	$y_{10} =$ полезен

Помогите Незнайке оценить эффективность классификатора. При пороге 0.4 (если $b(x) \geq 0.4$, считаем камень полезным) посчитайте accuracy, precision, recall и f1-меру. Каждую метрику нужно округлить до сотых. В ответ впишите сумму всех метрик.