Входное тестирование, очная часть, ПМИ ФКН 2019

ФИО: ____

Количество листов решения (без листа условий): __________

На выполнение заданий даётся два астрономических часа. Задания выполняются письменно. По каждой задаче предполагается дать полное решение.

1. Сколько существует различных способов расставить числа от 1 до 9 в квадрат 3×3, чтобы в каждой строке числа возрастали слева направо, и в каждом столбце – возрастали снизу вверх?

2. Для произвольных вещественных a, b, c докажите неравенство

$$\min\left[(a-b)^2, (b-c)^2, (a-c)^2\right] \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

3. Множество A состоит из n элементов, S — семейство k его подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Известно, что для любых двух различных элементов $x, y \in A$ найдётся A_i такое, что A_i содержит ровно 1 элемент из x и y. Докажите, что $2^k \geqslant n$.

4. Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$, по определению – это наименьшее такое натуральное число, которое делится на каждое из чисел k_i. Для произвольного натурального n докажите

$$\text{НОК}[1, 2, \ldots, n] = \text{НОК}[1 \cdot C_n^1, 2 \cdot C_n^2, \ldots, n \cdot C_n^n]$$