

Демонстрационный вариант

Математический анализ

1. Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1}$$

2. Найти матрицу Якоби отображения $x = u^3 + v^3 - w^3$, $y = \sin(u + v + w)$.

3. Исследовать функцию на экстремум $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

4. Исследовать интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x^2)}{x} dx$$

Линейная алгебра

1. В \mathbb{R}^4 со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^t y$ заданы вектор x и подпространство L . Найдите расстояние от x до L и угол между x и L , если

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. В пространстве \mathbb{R}^3 задан ортогональный оператор матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Приведите ее к каноническому виду и найдите базис канонического вида.

3. Оля и Коля играли в игру. Ведущий загадал матрицу билинейной формы

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Оля ходит первой. Ребята по очереди должны прибавлять к элементу в центре матрицы любое положительное число. После десяти ходов игра останавливается и ведущий проверяет сигнатуру формы. Если в форме положительный индекс инерции больше отрицательного, то Коля выиграл иначе выиграла Оля. Кто победит в этой игре?

4. Найти матрицу $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ такую, что одно из ее сингулярных значений равно $\sqrt{10}$ и ближайшая к ней по норме фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Дискретная математика

1. Докажите или опровергните равенство булевых функций:

$$\neg((x \oplus 1) \vee (y \oplus 1)) = (x \wedge y) \vee \neg(\bar{x} \vee \bar{y}).$$

Замечание: \bar{x} означает отрицание к x , т. е. $\bar{x} = \neg x$.

2. Приведите пример сюръекции множества натуральных чисел на себя, для которой прообраз любого одноэлементного множества бесконечен.
3. Сколько существует десятизначных чисел, в которых все четные цифры расположены строго по убыванию (начиная от старшего разряда), а нечетные строго по возрастанию.
(Пример такого числа: 1864357209.)
4. Найдите наименьшее количество вершин в графе без петель и кратных ребер, в котором ровно 22 ребра.