Вопросы к коллоквиуму
“Пределы функций. Непрерывность функций”
Математический анализ
БПМ 241-245, 2-й модуль, 1-й курс
2024/2025 учебный год
В. Лебедев

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника. Коллоквиум имеет характер блиц-опроса. Время на подготовку 5 минут, на ответ 2–3 минуты. Студент должен продемонстрировать знание определений и формулировок утверждений. Доказывать утверждения не требуется, если не указано обратное. Пользоваться вопросником разрешается.

1. Дайте определение окрестности $O(x_0)$ и проколотой окрестности $\dot{O}(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Дайте определения левой и правой полуокрестности $O^-(x_0),\ O^+(x_0)$ и проколотой левой и правой полуокрестности $\dot{O}^-(x_0),\ \dot{O}^+(x_0)$. Дайте определения соответствующих δ -окрестностей. Дайте определения окрестностей $O(+\infty)$, $O(-\infty)$, $O(\infty)$.

2. Дайте определения пределов функции

$$\lim_{x\to x_0\ (+\infty,\ -\infty,\ \infty,\ x_0+0,\ x_0-0)} f(x) = a(+\infty,\ -\infty,\ \infty).$$

Приведите примеры.

3. Сформулируйте теорему о единственности предела функции. Сформулируйте теорему о связи предела и односторонних пределов.

4. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой функции при $x \to x_0$ $(x_0+0, x_0-0, +\infty, -\infty, \infty)$. Поясните связь между ними. Приведите примеры.

5. Сформулируйте утверждение о сумме (двух) бесконечно малых функций и о произведении (локально) ограниченной функции на бесконечно малую. Сформулируйте утверждение об эквивалентности условия $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ и условия $f(x) = a+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

6. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах конечных пределов функций.

7. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенствах для функций. Сформулируйте лемму о "двух милиционерах"для функций.

8. Сформулируйте теоремы о замене переменной в пределах. Изложите идею доказательства того, что $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$.

9. Дайте определение эквивалентных функций при $x \to x_0$ (при $x \to x_0 \pm 0, +\infty, -\infty, \infty$). Пусть $a(x) \sim b(x)$ и $c(x) \sim d(x)$. Верно ли, что $a(x)c(x) \sim b(x)d(x)$. Верно ли что $a(x)/c(x) \sim b(x)/d(x)$. Верно ли, что $a(x) + c(x) \sim b(x) + d(x)$?

10. Дайте определение соотношения $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$. Сформулируйте утверждение о том, что соотношения $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$ и $f(x) = g(x)+o(g(x))$, $x \to x_0$, означают одно и то же. Дайте определение соотношения $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

11. При $x \to 0$ запишите в виде эквивалентностей простейшие асимптотические формулы для $\sin x$, $1 - \cos x$, $\ln(1 + x)$, $e^x - 1$, $(1 + x)^\alpha - 1$. Запишите эти асимптотические формулы в виде равенств.

12. Сформулируйте утверждение о сравнении логарифмической, степенной и показательной функций на $+\infty$.

13. Расскажите, как нарисовать набросок графика функции, выделяя главные части в особых точках и на бесконечности. Постройте набросок графика функции $y = \ln|x + 1| + \ln|x - 2| + 1/x - 1/(x + 1)^2$.

14. Дайте определение функции непрерывной в точке и на интервале (включая одностороннюю непрерывность). Сформулируйте теорему Коши о промежуточном значении. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам.

15. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах непрерывных функций. Сформулируйте теорему о непрерывности суперпозиции (двух) непрерывных функций и теорему о непрерывности обратной функции.

16. Назовите основные элементарные функции. Что такое элементарная функция. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций и укажите основную идею ее доказательства.

17. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках. Дайте определение подпоследовательности. Сформулируйте лемму Больцано–Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности).

18. Дайте определение верхней (нижней) грани функции, заданной на некотором множестве. Сформулируйте теорему о существовании верхней (нижней) грани функции, ограниченной сверху (снизу). Сформулируйте теорему Вейерштрасса о максимальном (минимальном) значении непрерывной функции на отрезке. Покажите на примерах, что все условия этой теоремы являются существенными.

19. Дайте определение функции равномерно непрерывной на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$. Как связаны непрерывность и равномерная непрерывность. (Рассмотрите функцию $1/x$ на интервале $(0, 1)$.) Сформулируйте теорему Кантора о связи непрерывности и равномерной непрерывности функций на отрезке.

20. Дайте определение модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ функции f на множестве E. Сформулируйте критерий равномерной непрерывности в терминах модуля непрерывности. 21. Являются ли равномерно непрерывными функции $x,\ \sin x,\ x^2,\ \sin x^2$ на $\mathbb{R}$? Ответ обоснуйте.

22. Являются ли равномерно непрерывными функции x^2, $1/x$, $\sqrt{x}$, $\sin 1/x$ на интервале $(0, 1)$? Ответ обоснуйте.